

## 다단 치차장치의 설계법

정태형\* (한양대), 이성주(한양대 대학원)

### Design Method for Multi-Stage Gear Drive

Tae Hyong Chong (Hanyang Univ.), Sung Joo Lee (Graduate School, Hanyang Univ.)

#### ABSTRACT

Recently as the application of gear drive increases in high-speed and high-loading, the concern of designing multi-stage gear drive is being risen. Until now, however, the research of gear drive is focused on single-stage gear drive and the design depends on experiences and know-how of designer and is carried out by trial and error.

This research automated the basic design and the configuration design for two and three-stage gear drives which consist of cylindrical gears. In basic design, design is executed with two design processes, which minimize the overall volume of gear, and whose results are compared each other. In configuration design, the positions of gears are determined to minimize the volume of gearbox using the result of basic design and simulated annealing algorithm.

**Key Words** : Multi-stage gear drive(다단 치차장치), Basic design(기본설계), Configuration design(배치설계), Simulated annealing algorithm(시뮬레이티드 어닐링 알고리즘)

Nomenclature		
$a$	center distance	[mm]
$b$	face width	[mm]
$d$	pitch diameter	[mm]
$E$	modulus of elasticity	[MPa]
$m_a$	aspect ratio	
$m_n$	normal module	[mm]
$n$	revolution speed	[rpm]
$P$	transmitted power	[kW]
$T_p$	torque	[N · mm]
$u$	gear ratio	
$U_t$	unit load	[N/mm]
$V$	volume	[mm] <sup>3</sup>
$W_t$	transmitted tangential load	[N]
$\phi$	pressure angle	[deg]
$\sigma_H$	Hertz stress	[MPa]
$\sigma_{Hlim}$	allowable stress number (contact)	[MPa]

1	stage one
2	stage two
3	stage three
$p$	pinion
$g$	gear

#### 1. 서론

대부분의 기계장치에 구동 및 동력 전달용으로 쓰이는 치차장치는 최근 고속도, 고부하에서 사용이 증가하면서 다단 치차장치 설계에 대한 관심이 높아졌다. 이러한 다단 치차장치 설계는 전 치차비에 따른 단수의 결정, 각 단에서의 치차비 설정이 요구되며 이에 따른 전달하중을 수용할 수 있는 적절한 치차의 크기를 결정해야 한다. 또한 단수의 증가에 따라 각 치차의 배치 경우의 수, 설계 제약조건의 수가 크게 증가하므로 이러한 조건들을 만족하는 적절한 치차의 배치가 필요하다.

본 연구에서는 원통치차로 구성된 2단, 3단 치차장치에 대해 각각 치차 크기를 결정할 수 있는 기본설계를 자동화하며, 기본설계의 결과로 주어진 치차 제원과 시뮬레이티드 어닐링(Simulated Annealing) 알고리즘<sup>[4][7]</sup>을 이용하여 각 치차의 위

#### Subscripts

치를 결정하는 배치설계를 수행한다.

## 2. 기본설계의 설계 프로세스

기본설계는 설계자가 입력하는 전달동력과 입, 출력 속도 등에 따라 치차의 크기를 결정하는 과정으로 모듈, 잇수, 치폭, 치차비, 피치원 직경, 치폭 등을 구하는 것이다. 본 연구의 기본설계에서는 Fig. 1과 같이 두 가지 프로세스로 구분하였다. 프로세스 1에서는 K 계수(K factor)와 단위하중(unit load)을 이용하여 치차의 크기를 예측하였으며 재료, 열처리에 따른 허용강도의 결정에서 AGMA 규격을 이용하였다. 또한 치차비의 선정에 있어 각 치차의 부피를 최소화 할 수 있도록 각 단의 치차비를 결정하였다. 프로세스 2에서는 재료, 열처리에 따른 허용강도의 결정에서 ISO 규격을 이용하였으며 설계자는 마지막 단계에서 최소잇수(minimum teeth) 또는 표준 모듈(standard module)을 설정함으로써 치차의 크기를 결정하였다.

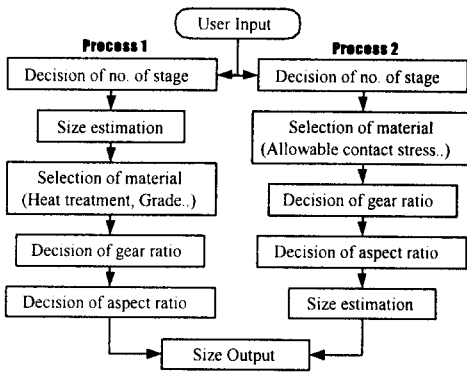


Fig. 1 Two types of basic design process

### 2.1 각 단계에서의 치차비 결정

각 단의 치차비에 대해 프로세스 1에서는 부피최소화를 이용한 치차비 결정을, 프로세스 2에서는 Niemann 식을 사용하였다.

먼저 프로세스 1에서 전체 치차의 부피를 구하기 위해 각 단에서 전달동력이 동일하다는 가정으로부터 Hertz 응력식을 이용하여 전달동력식을 유도하였다. Hertz 응력식은

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{0.7}{(1/E_p + 1/E_r) \cos \phi \sin \phi}} \sqrt{\frac{W_t}{b \cdot d_p} \frac{u+1}{u}} \quad (1)$$

이고 K 계수(K factor)와 Q 계수(Q factor)를 이용하여 식(1)을 정리하면 각 단의 전달동력은 다음과 같다.

$$P = P_1 = P_2 = \dots \sigma_{Hlim1}^2 \frac{u_1}{(u_1+1)^3} n_1 b_1 a_1^2 = \sigma_{Hlim2}^2 \frac{u_2}{(u_2+1)^3} n_2 b_2 a_2^2 = \dots \quad (2)$$

식 (2)를 변수분리하여 항을 정리하면

$$f_{12} = \frac{u_1(u_2+1)^3}{u_2(u_1+1)^3} \frac{n_1}{n_2} = \left( \frac{\sigma_{Hlim2}}{\sigma_{Hlim1}} \right)^2 \frac{b_2}{b_1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^3 \quad (3-1)$$

$$f_{23} = \frac{u_2(u_3+1)^3}{u_3(u_2+1)^3} \frac{n_2}{n_3} = \left( \frac{\sigma_{Hlim3}}{\sigma_{Hlim2}} \right)^2 \frac{b_3}{b_2} \left( \frac{a_3}{a_2} \right)^3 \dots \quad (3-2)$$

으로 표시할 수 있다. 다음으로 1단 치차장치의 부피를 치차비와 물림 중심거리(operating center distance)의 항으로 나타내면

$$V_1 = V_{p1} + V_{g1} = \pi b_1 a_1^2 \frac{u_1^2 + 1}{(u_1 + 1)^2} \quad (4)$$

과 같고 다단에 대한 전 치차장치의 부피를 표시하면 식 (5)와 같다.

$$V = \sum_{i=1} V_i \quad (5)$$

식 (5)를 식 (3)과 전 치차비의 항으로 변경하면 2단 치차장치에 대한 부피는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V = b_1 a_1^2 \cdot \left( \frac{u_1^2 + 1}{(u_1 + 1)^2} + \left( \frac{\sigma_{Hlim1}}{\sigma_{Hlim2}} \right)^2 \frac{u_1^3 + u u_1^2 + u^2 u_1 + u^3}{u(u_1 + 1)^3} \right) \quad (6)$$

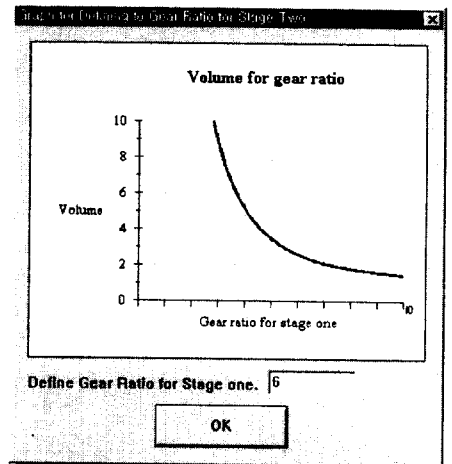


Fig. 2 Variation of volume by gear ratio

식 (6)에서 치폭과 중심거리에 대한 항이 어느 정도 설계자에 의해 결정이 된다고 볼 때 나머지 항을 최소화시킴으로써 치차장치에 대한 부피를 최소화시킬 수 있다. Fig. 2는 본 연구의 기본

설계 과정 중 전 치차비가 2인 2단 치차장치에 대해 각 단에서 동일한 재료를 사용하였을 때 1단 치차비의 변화에 대한 부피의 변화를 나타나고 있다. 이와 같이 치차비 결정에 있어 부피를 고려하는 이유는 치차장치의 부피가 가장 작게 될 때 각 단에서의 치차비 배분이 가장 적절히 될 수 있기 때문이다. 3단 치차장치에 대해서도 위와 같은 방법으로 치차비를 결정할 수 있다.

프로세스 2에서는 각 단의 치차비 결정에 있어 Niemann 식을 이용하였다. 2단 치차장치에서 1단의 치차비는

$$u_1 = 0.8 \cdot \left( u \frac{\sigma_{Hlim1}}{\sigma_{Hlim2}} \right)^{2/3} \quad (7)$$

이며 3단 치차장치에서 1단과 2단의 치차비는

$$u_1 = 0.6 u^{4/7} \cdot \left( \frac{\sigma_{Hlim1}}{\sigma_{Hlim2}} \right)^{2/7} \cdot \left( \frac{\sigma_{Hlim1}}{\sigma_{Hlim3}} \right)^{4/7} \quad (8-1)$$

$$u_2 = 1.1 u^{2/7} \cdot \left( \frac{\sigma_{Hlim2}}{\sigma_{Hlim1}} \right)^{4/7} \cdot \left( \frac{\sigma_{Hlim2}}{\sigma_{Hlim3}} \right)^{2/7} \quad (8-2)$$

이다.

## 2.2 치차 크기의 결정

치차 크기의 결정<sup>[11]</sup>에 있어 프로세스 1에서는 K 계수, 단위하중, 종횡비(aspect ratio) 그리고 앞에서 결정된 치차비를 이용하였으며, 프로세스 2에서는 설계자가 입력하는 1단에서의 중심거리를 이용해 각 단에서의 치차 크기를 결정하였다.

Q 계수에 의한 치차 크기의 결정. Q라고 하는 수는 치차가 전달해야 하는 일의 크기에 대한 측정값이다. 따라서 설계자가 어느 만큼의 하중을 치차에 작용할 것인가를 결정하면 이 Q 계수로부터 중심거리와 치폭을 얻을 수 있다.

$$Q = \frac{P}{n_p} \frac{(u+1)^3}{u} \quad (9)$$

K 계수에 의한 치차 크기의 결정. 원통치차에 대해 치차의 크기를 결정하는데 있어 K 계수가 매우 중요한데 본 연구에서는 치차가 쓰이는 여러 사용경우에 대해 K 계수값을 설계자가 결정할 수 있도록 하였다.

$$K = \frac{W_t}{d_p \cdot b} \left( \frac{u+1}{u} \right) \quad (10)$$

식 (10)은 외접치차에 대한 식만 고려한 것이다.

치면 하중 지표. 치차의 설계에 있어 매우 중요한 치면 하중의 지표가 두 가지 있다. 하나는 단위 하중(unit load)으로서 이 강도의 관점에서 본 지표

이고, 다른 하나는 K 계수로 이의 면압강도의 관점에서 본 지표이다. 다른 말로 하면 단위 하중이 크면 클수록 이가 절손(breakage)될 위험이 커지는 것이고 K 계수가 크면 클수록 이에 피팅(pitting)이 일어날 위험이 커지는 것이다. 단위 하중은 이의 하중에 대한 Lewis의 식으로부터 얻어진다.

$$U_t = \frac{W_t}{b \cdot m_n} \quad (11)$$

식 (10), (11)에서 구한 값들은 굽힘강도와 면압강도의 관점에서 치차가 맞물리고 있을 때 치차의 단위크기 당 어느 만큼의 하중을 전달해야 하는가에 대한 대략적인 값으로 이해될 수 있다.

종횡비의 결정. 일반적으로 종횡비는 치폭의 크기를 결정함으로써 정할 수 있다. 하지만 비틀림 하중이나 평행도(alignment) 등의 문제로 인해 치폭의 크기는 피치원 직경 이상의 것을 잘 쓰지 않는다. 본 연구에서는 원통치차에 쓰이는 종횡비에 대해 기준이 되는 값들을 제시해 줌으로써 설계자가 직접 종횡비를 결정할 수 있게 하였다.

$$m_a = \frac{d_p}{b} \quad (12)$$

중심거리를 이용한 치차 크기의 결정. 프로세스 2에서는 설계자가 입력하는 1단의 중심거리를 이용하여 치차의 크기를 결정하였다. 물림 피치원 직경(operation pitch diameter)을 종횡비를 이용한 치폭의 식으로 변환하면

$$b = \frac{2a}{u+1} \cdot m_a \quad (13)$$

이 된다. 식 (13)을 식 (3)에 대입하여 정리하면 2단, 3단에 대한 중심거리는 다음과 같다.

$$a_2 = a_1 \cdot \left( f_{12} \frac{\sigma_{Hlim1}}{\sigma_{Hlim2}} \frac{u_2+1}{u_1+1} \frac{m_{a1}}{m_{a2}} \right)^{1/3} \quad (14-1)$$

$$a_3 = a_2 \cdot \left( f_{23} \frac{\sigma_{Hlim2}}{\sigma_{Hlim3}} \frac{u_3+1}{u_2+1} \frac{m_{a2}}{m_{a3}} \right)^{1/3} \quad (14-2)$$

## 3. 시뮬레이티드 어닐링을 이용한 3차원 배치설계

시뮬레이티드 어닐링(SA)은 열역학적 이론에 기반을 둔 확률적 최적화 기법<sup>[13]</sup>이다. 많은 최적화 문제에 있어 여러 상충하는 제약들에 종속된 높은 차수의 목적함수는 비선형이며, 따라서 많은 국소해를 가지려는 경향을 가진다. 이러한 문제들에 있어 SA는 전역해를 찾는 데 매우 유용한 확률적인

수치기법이다.

### 3.1 시물레이티드 어닐링 프로세스

기본적으로 SA는 최적화 알고리즘 중 최속강하(Steepest descent) 방법<sup>[14]</sup>의 변형된 형태이다. 즉 설계공간 내에서 해는 현재의 해에 일정한 거리 내에서 선택이 되며 이러한 새로운 해 선택의 반복 과정으로 이루어진다. 이렇게 새로이 선택된 해는 이전의 해와 비교를 통하여 Metropolis 기준을 거치며 만약 이 기준을 통과하지 못하면 다시 현재의 해에 이웃한 해를 선택하여 비교를 반복한다. 이 Metropolis 기준은 목적함수를 늘리는 설계 변수의 이동을 승인함으로써 국소해를 벗어날 수 있는 SA의 특징을 보여준다. Fig. 3은 본 연구에서 쓰인 SA 알고리즘 프로세스를 나타낸다.

### 3.2 배치설계를 위한 정식화

치차요소의 적절한 배치를 위해 본 연구에서는 SA의 최적화 기법을 사용하여 치차상자의 부피가 최소화되도록 치차의 위치를 결정하였다.

목적함수로는 가중계수와 표준계수를 곱하여 직육면체를 가정한 치차상자의 부피와 구속조건들의 합을 사용하였다.

$$F = W_0 P_0 V + \sum_{i=0}^n W_i P_i C_i \quad (13)$$

여기서  $F$ 는 목적함수,  $W$ 는 가중계수,  $P$ 는 표준계수,  $C$ 는 구속조건이다.

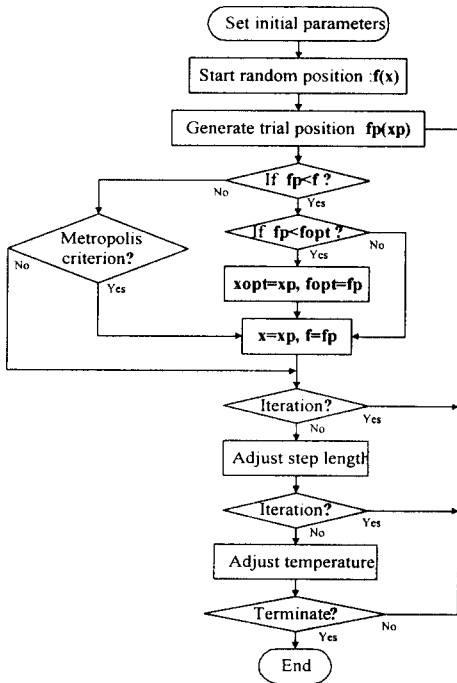


Fig. 3 Simulated Annealing flow chart

구속조건으로는 중심거리와 중심점 위치에 대해 구속조건을 설정하였으며 또한 치차들 사이의 간섭에 대한 검사도 수행함으로써 치차 요소들이 적절히 배치될 수 있도록 하였다.

## 4. 적용 예

본 연구의 기본설계 시스템과 시물레이티드 어닐링 알고리즘은 Visual C++5.0에 의해 구현되었으며 배치설계의 결과에 대해서는 SolidWorks를 이용하여 설계결과를 보았다.

### 4.1 2단 치차장치에 대한 설계 검증

먼저 본 연구에서 수행한 기본설계에 대한 검증으로 현재 사용중인, 헬리컬 치차로 구성된 2단 엘리베이터 치차장치에 대해 동일한 입력 제원을 기본설계에 적용함으로써 서로의 결과를 비교하였다. 엘리베이터 치차장치의 입력 제원은 Table 1과 같다.

Table 1. Input dimension of elevator gear drive

Transmitted power (kW)	7.5
Input/output speed (rpm)	1450/66.5
Material	Carbon steel
Heat treatment	Carburized & Case hardened
Gear type	Helical
Pressure angle (deg.)	20
Helix angle (deg.)	25
Aspect ratio	0.6/0.75

이 밖에 기본설계에서 K 계수와 단위하중은 각각 2.07 MPa, 48 MPa 이며 피니언과 기어의 최소경도는 각각 335 HB, 300 HB 이다. 재료의 등급은 AGMA 1등급과 ISO의 ML등급을 사용하였으며, 1단의 중심거리는 150 mm로 하였다. Table 2는 엘리베이터 치차에 쓰인 치차의 제원과 기본설계 시스템으로 수행한 결과를 보여준다. 설계결과를 보면 엘리베이터 치차장치의 제원과 비교해 프로세스 1과 2에서 1단에서 피니언 피치원과 기어의 피치원 직경을 줄임으로써 전체 치차장치의 부피를 작게하였다.

다음으로 배치설계의 검증은 3단 치차장치에 대해 수행하였다. 우선 전역해를 예측할 수 있는 6개의 실린더를 이용하여 설계를 수행하였다. 실린더는 높이가 10 mm로 동일하며 직경이 10, 20 mm로 각각 3개씩 이용하였다. 6개의 실린더가 상자의 부피를 최소화하며 적절히 배치될 수 있는 예상도는 Fig. 4와 같으며 실제 수행한 결과는 Fig. 5에서 볼 수 있다. 설계조건을 단순화를 위하여 실린더 1,2,3은 고정하였으며 축과의 간섭은 고려하지 않는다는 가정을 하였다.

Table 2. Dimensions of elevator gear drive and result of basic design

Stage	Elevator gear		Process one		Process two	
	One	Two	One	Two	One	Two
(Normal) Module (mm)	2.5	3.5	2	3	2	3
No. of teeth in pinion	24	21	25	25	23	25
No. of teeth in gear	119	92	124	109	114	109
Gear ratio	4.958	4.381	4.96	4.36	4.96	4.36
Pitch dia. of pinion (mm)	66.2	81.1	55.17	82.75	50.755	82.75
Pitch dia. of gear (mm)	328.26	355.23	273.64	360.8	251.57	360.8
Center distance (mm)	198	219	164.4	221.76	151.17	221.76
face width (mm)	40	60	33.1	62.1	30.5	62.1

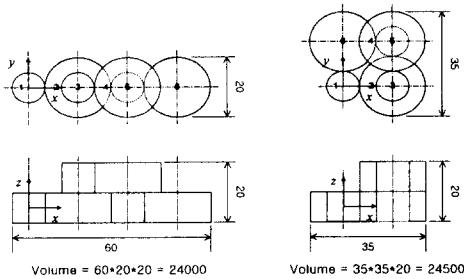


Fig. 4 Configuration of global optimum of six cylinders

Fig. 5는 측면에서 본 위치를 솔리드 모델링 (solid modeling)으로 나타낸 것이다. 시뮬레이터드 어닐링 알고리즘을 이용한 배치설계의 결과가 예상된 전역해의 위치로 배치됨을 볼 수 있다. 최종 위치가 결정될 때까지 수행되는 전체 함수계산 (function evaluation) 횟수는 61201번이며 상자의 부피는 24962.03  $mm^3$  이다.

#### 4.2 3단 치차장치의 설계

3단 치차장치 설계를 위한 입력 제원은 Table 3과 같다. 전체 치차비는 110:1로서 고속도비 치차장치이다. K 계수와 단위하중은 산업용 구동기에 적용되는 값을 사용하였으며, 피니언과 기어의 최소경도는 각각 335, 300 HB, 1단에서의 중심거리는 160 mm로 설정하였다. Table 4는 위의 제원을 이용해 수행한 기본설계의 결과이다. 배치설계는 위의 기본설계 결과를 이용하여 축과 이끝원을 기준으로 실제 물림까지 고려한 배치설계를 수행하였으며 그 결과를 Fig. 6에서 보이고 있다. Fig. 6-(b)는 설계결과를 정면에서 본 그림이다. 실제

치차의 물림을 보여주고 있으며 물림까지 고려한 설계가 잘 이루어졌음을 볼 수 있다. 최종해에 도달할 때까지 함수계산횟수는 128701번이었으며 그때 치차상자의 부피는 76100223.8  $mm^3$  이었다.

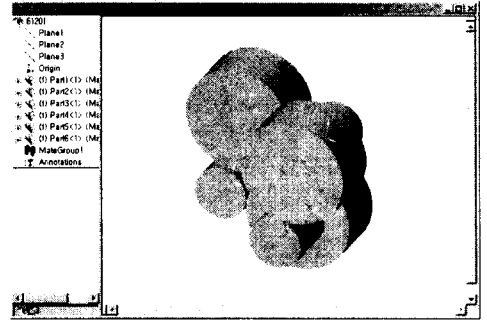


Fig. 5 Output of configuration design of six cylinders with solid

Table 3. Input dimension of three-stage gear drive

Transmitted power (kW)	8.0
Input/ output speed (rpm)	3520/32
Material	Carbon steel
Heat treatment	Carburized & Case hardened
Gear type	Helical
Pressure angle (deg.)	20
Helix angle (deg.)	25
Aspect ratio	0.6/0.6/0.75

Table 4. Result of basic design for three-stage gear drive

Stage	Process one			Process two		
	one	two	three	one	two	three
(Normal) Module (mm)	1.5	3	4	1.25	3	4
No. of teeth in pinion	27	26	27	27	26	27
No. of teeth in gear	229	105	87	237	109	80
Gear ratio	8.481	4.038	3.22	8.777	4.192	2.963
Pitch dia. of pinion (mm)	44.7	86.06	119.16	37.24	86.06	119.16
Pitch dia. of gear (mm)	379	347.56	384.97	326.87	360.8	353.1
Center distance (mm)	211.85	216.8	251.57	182.1	223.4	236.1
Face width (mm)	26.8	47.8	95.3	22.34	51.6	95.3

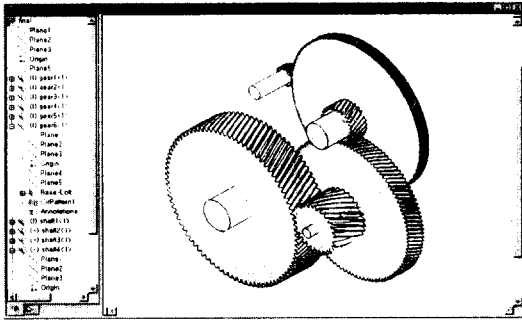


Fig. 6-(a) Configuration design with the consideration of shaft and mesh

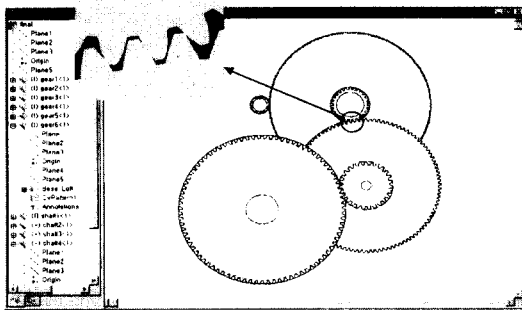


Fig. 6-(b) Configuration design with the consideration of shaft and mesh

## 5. 결론

본 연구에서는 원통치차로 구성된 다단 치차장치 설계를 위한 기본설계 및 배치설계 시스템을 구성하여 2단과 3단 치차장치에 대한 설계를 수행하였다. 기본설계에서는 부피를 고려한 설계 자동화 시스템을 구성하여 2단 치차장치에 대해 설계 결과를 사용중인 엘리베이터 치차와 비교하였으며 2단 치차장치의 설계를 바탕으로 3단 치차장치에 대한 설계도 수행하였다. 배치설계에서는 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘을 이용하여 치차장치의 부피를 최소화 할 수 있는 설계를 수행함으로써 치차의 위치를 결정하였다.

따라서 고속도비의 다단 치차장치에 대해 각각 치차의 부피를 최소화시키며 동시에 치차상자의 부피도 최소화할 수 있는 설계 기반을 마련하였다.

## 참고문헌

[1] Udy, J. L., Balling, R. J., Benzley, S. E., and Landon, M. D., 1998, "Computation of Interferences Between Three-Dimensional Objects and the Optimal Packing Problems", *Advances in Engineering Software*, Vol. 10, No.

1, pp. 8-14.

[2] Fujita, K., Akagi, S., and Hase, H., 1991, "Hybrid Approach to Plant Layout Design Using Constraint-Directed Search and an Optimization Technique", *Advances in Design Automation 1991 : Proceedings of the 17th ASME Design Automation Conference*, Vol. 1, pp. 131-138.

[3] Kim, J. J., and Gossard, D. C., 1991, "Reasoning on the Location of Components for Assembly packaging", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 113, No. 4, pp. 402-407.

[4] Szykman, S., and Cagan, J., 1995, "A Simulated Annealing-Based Approach to Three-dimensional Component Packing", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, No. 2, pp. 308-314.

[5] Szykman, S., and Cagan, J., 1997, "Constrained Three-Dimensional Component Layout Using Simulated Annealing", *ASME Journal of Mechanical Design* Vol. 119, No. 2, pp. 28-35.

[6] Schmidt, L., C., and Cagan, J., 1996, "Configuration Design : An Integrated Approach Using Grammars", *Proceeding of the 1996 ASME Design Engineering Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference*.

[7] Ashish Kolli and Jonathan Cagan and Rob Rutenbar, 1996, "Packing of Generic, Three-Dimensional Components Based on Multi-Resolution Modeling", *Proceedings of The 1996 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference*.

[8] George E. Dieter, 1991, *Engineering Design*.

[9] 1988, 新版 齒車伝動機構設計のポイント、日本規格協會.

[10] G. Niemann and H. Winter, 1989, *Maschinenelemente*, Band II, pp. 261-262.

[11] Darle W. Dudley, 1984, *Handbook of Practical Gear Design*, pp. 2.17-2.18, 2.35-2.47.

[12] 변준영, 1992, "동력전달용 원통치차 설계 전문가 시스템 개발", 한양대학교 박사학위 논문.

[13] Goffe, Ferrier and Rodgers, 1994, "Global Optimization of Statistical Functions with Simulated Annealing," *Journal of Econometrics*, vol. 60, no. 1/2, Jan./Feb. pp. 65-100.

[14] 이인호, 1997, "Simulated Annealing을 이용한 제약 충족 방식", 한양대학교 석사학위 논문.

[15] Guo Q. Huang and John A. Brandon, 1993, *Cooperating Expert Systems in Mechanical Design*, pp. 43-73.