

헬리콥터 꼬리 날개의 최적 설계 Optimal Design of Helicopter Tailer Boom

한 석 영(한양대학교 기계공학부), 진 경 옥(한양대학원 자동차공학과)

Keywords : MMA(이동점근법), Optimization(최적설계), Frame Structure(프레임 구조물), Dual Function(이원 함수), Move Limits(이동 한계)

ABSTRACT

In this paper, the comparison of the first order approximation schemes such as SLP (sequential linear programming), CONLIN (convex linearization), MMA(method of moving asymptotes) and the second order approximation scheme, SQP(sequential quadratic programming) was accomplished for optimization of and nonlinear structures. It was found that MMA and SQP are the most efficient methods for optimization. But the number of function call of SQP is much more than that of MMA. Therefore, when it is considered with the expense of computation, MMA is more efficient than SQP. In order to examine the efficiency of MMA for complex optimization problem, it was applied to the helicopter tail boom considering column buckling and local wall buckling constraints. It is concluded that MMA can be a very efficient approximation scheme from simple problems to complex problems.

1. 서론

최적설계 분야의 연구는 Schmit⁽¹⁾가 구조물 최적설계에 수치 최적화 기법(numerical optimization techniques)을 도입한 이래, 새로운 알고리즘의 개발, 컴퓨터 계산 성능의 향상 및 유한 요소법의 발전으로 놀라운 발전을 거듭하여 왔다.

구조물의 수치 최적화는 구조물의 재료, 단면

적 등을 설계 변수로 하여 응력, 변위 등의 구속조건을 만족하면서 구조물의 무게를 최소화한다. 일반적으로, 구속조건은 음함수(implicit function)이므로 유한 요소 프로그램으로 얻은 정보를 사용하여 연속적인 양함수(explicit function) 형태로 표현한다.⁽²⁾ 이 과정에서 설계자는 계산 비용 및 시간을 절약하기 위해 테일러 전개 (Taylor series expansion)의 1차 또는 2차 식을 사용하여 근사 (approximation) 한다.

이러한 원리로 개발된 1차 근사 기법에는 연속 선형 근사 계획법(SLP)⁽³⁾, 불록 선형 근사법(CONLIN)⁽⁴⁾ 및 이동점근법(MMA)⁽⁵⁾ 등이 있다.

연속 선형 근사 계획법은 테일러 전개의 1차 식을 사용하여 비선형의 목적 함수와 구속조건 함수를 근사시키는 일련의 선형 문제를 생성한다. 불록 선형 근사법은 1차 미분 값이 양수인 경우에는 변수를 그대로, 음수인 경우에는 변수의 역수를 사용하는 기법으로 단면적이 설계 변수인 구조물에 효과적으로 사용될 수 있다. 이동점근법은 이동점근선의 개념을 도입하여 원 함수(primal function) 변수와 라그랑지 · 변수(Lagrange multiplier)와의 관계를 양함수로 명확히 표현하여 이원 함수(dual function)를 적용하여 최적화 한다.

2차 근사 기법으로는 테일러 전개의 2차식을 이용하여 2차 미분까지의 정보를 사용하여 근사하는 연속 이차 근사 계획법(SQP)⁽⁶⁾이 있다.

본 연구에서는 이러한 1, 2차 근사 기법을 기어 감속기와 용접보의 설계에 적용하여 각 기법간의 효율성을 비교하였으며, 가장 효율성이 있는 것으로 조사된 기법을 설계변수가 많고 다수 하중을 받는 프레임 구조물인 헬리콥터 꼬리날개⁽⁷⁾에 적용하여 그 기법의 효율성을 검증하였다.

2. 1차 및 2차 근사기법

2.1 연속 선형 근사 계획법(SLP)

1차 근사 기법 중 가장 먼저 제안된 연속 선형 근사 계획법은 비선형인 원 함수를 각 반복 과정마다 테일러 1차 전개를 사용하여 선형화 한다.

$$f^{(k)} = f_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x - x_i^{(k)}) \quad (1)$$

비선형 목적 함수와 구속조건 함수는, 식 (1)과 같은 근사 식을 사용하여 각각의 선형화 문제(LP)를 생성한다. 근사된 선형화 문제는 심플렉스 방법(simplex method)을 적용, 최적화 한 뒤 수렴 여부를 결정한다. 즉, 수렴조건이 만족되지 않으면 새로 찾은 설계점을 사용하여 위의 식을 이용하여 다시 연속적인 선형 근사를 수행한다.

연속 선형 근사 계획법을 볼록 함수인 문제에 적용하면, 선형화 된 구속조건은 항상 유용 영역(feasible region)의 바깥쪽에 위치하는 특징을 갖는다.

2.2 볼록 선형 근사법(CONLIN)

연속 선형 근사 계획법과 함께 1차 근사 기법의 하나인 볼록 선형 근사법은 설계변수의 역수가 사용되는 최적화 문제에 적용이 용이하며, 근사에 필요한 정보로 연속 선형 근사 계획법과 동일하게 현 설계점에서의 원 함수 값 및 1차 도함수 값을 요구한다.

볼록 선형 근사법은 1차 도함수 값의 부호에 따라 혼합된 변수(direct, reciprocal variable)들의 조합으로 볼록이고, 변수 분리된 식 (2)와 같은 함수를 도출해 낸다.

$$f^{(k)} = f_0^{(k)} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(k)}) - \sum_i (x_i^{(k)})^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^{(k)}} \right) \quad (2)$$

여기서, 기호 \sum , Σ 의 의미는 1차 도함수의 값이 각각 양수 또는 음수인 설계변수 부분의 합을 의미한다. 식 (2)와 같이 근사된 목적 함수와

구속조건 함수는 2.3절에서 설명할 이원 함수를 적용하여 최적화 과정을 수행한다.

2.3 이동점근법(MMA)

이동점근법은 각 단계에서 엄격한 볼록 함수를 생성하며 수렴 속도를 높이기 위해 이동점근선(moving asymptotes)을 도입한다. 이동점근선 $L_j^{(k)}$, $U_j^{(k)}$ 에 대한 규정은 아직 정립되지 않았지만 일반적으로 다음과 같다.

(a) 반복 횟수가 $k=0$ 또는 1인 경우

$$\begin{cases} L_i^{(k)} = x_i^{(k)} - (\overline{x_i} - \underline{x_i}) \\ U_i^{(k)} = x_i^{(k)} + (\overline{x_i} - \underline{x_i}) \end{cases} \quad (3)$$

(b) $k \geq 2$ 인 경우

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^{k-1} - x_i^{k-2}} < 0 \text{ 인 경우} \\ & \begin{cases} L_j^k = x_j^k - s(x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) \\ U_j^k = x_j^k + s(U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^{k-1} - x_i^{k-2}} \geq 0 \text{ 인 경우} \\ & \begin{cases} L_j^k = x_j^k - (x_j^{k-1} - L_j^{k-1})/s \\ U_j^k = x_j^k + (U_j^{k-1} - x_j^{k-1})/s \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

이동점근법에 의해 근사하면 다음과 같다.

$$f^{(k)} = f_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0j}}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{q_{0j}}{x_i - L_i^{(k)}} \right) \quad (6)$$

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_i^{(k)} - x_i^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ 0, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \geq 0 \\ -(x_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & \text{if } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$r_i^{(k)} = f(x_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_i^{(k)} - x_i^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_i^{(k)} - L_i^{(k)}} \right) \quad (9)$$

이동점근선이 $L_j^{(k)} = -\infty$, $U_j^{(k)} = +\infty$ 이면 연속 선형 근사 계획법이 되고, $L_j^{(k)} = 0$, $U_j^{(k)} = +\infty$ 이면 볼록 선형 근사법이 되므로, 앞의 두 방법은 이동

점근법의 특별한 경우가 된다.

이동점근법으로 근사한 식은 볼록 함수이므로 최적화를 위해 이원 함수를 적용한다.

$$\begin{aligned}
 L &= (\tilde{f}_0 + \sum_i \tilde{f}_i) + \sum_j \lambda_j (\tilde{g}_0 + \sum_i \tilde{g}_{ij}) \\
 &= r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i - L_i} \right) \\
 &= r_0 - \lambda^T b + \sum_{i=1}^n l_i(x_i, \lambda) \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서, λ_j 는 라그랑지 변수이며, 이동점근법에 이원 함수를 적용할 경우 x_i 를 λ_j 의 양함수로 표현할 수 있다.

$$x_i(\lambda_j) = \frac{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{1/2} L_i + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{1/2} U_i}{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{1/2} + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{1/2}} \quad (11)$$

따라서, L_i 는 λ_j 만의 함수가 된다.

$$\begin{aligned}
 L_i(\lambda) &= r_0 - \lambda^T b \\
 &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i(\lambda_j)} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i(\lambda_j) - L_i} \right) \quad (12)
 \end{aligned}$$

식 (13)을 λ_j 로 미분하여, $\partial L_i / \partial \lambda_j = 0$ 의 해를 구하면, 식 (12)를 통해 x_i 를 계산할 수 있다.

2.4 연속 이차 근사 계획법(SQP)

1차 근사 방법과는 달리 테일러 2차 전개까지 사용하여 근사하는 방법으로, 연속 선형 근사의 확장 형태로 볼 수 있다. SQP를 행렬의 형태로 정의하면 다음과 같다.

$$f(x) = C^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \quad (13)$$

여기서, C 는 계수 벡터이고, Q 는 대칭 행렬이다. SQP를 적용한 최적화 문제의 경우 Kuhn-Tucker 조건은 최적해를 구하는 필요조건이 된다. 더욱이 행렬 Q 가 양수로 정의(positive definite) 되면 Kuhn-Tucker 조건은 최적해의 충분조건이 되며 광역 최적해를 얻을 수 있다. Q 가 양으로 정의

되지 않으면, 국부 최적해를 갖는다.

3. 비선형 구조물의 최적설계 예

3.1 8-바 트러스 구조물

Fig. 1의 8-바 문제⁽⁵⁾는, 전체의 무게를 경량화하는 문제로 오직 하나의 하중이 절점 5에 작용하며, 각 방향으로의 크기는 다음과 같다.

$$F_x = 40 \text{ kN}, \quad F_y = 20 \text{ kN}, \quad F_z = 200 \text{ kN}$$

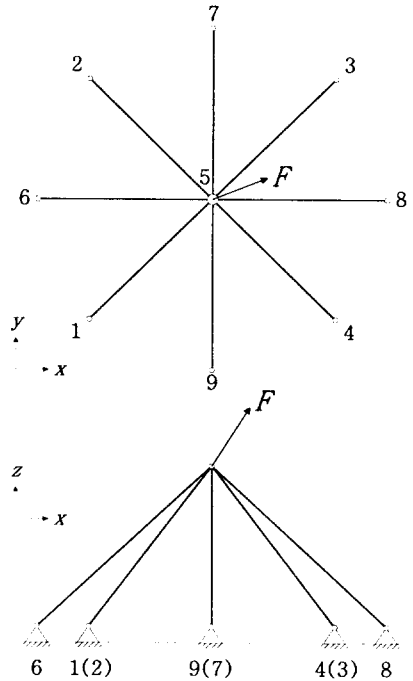


Fig. 1 8-bar truss

각 부재에 걸리는 응력은 100 N/mm^2 을 초과해서는 안 된다. 설계변수는 각 부재의 단면적이며, 하한값 x_i 는 100 mm^2 으로 설정한다. 그리고, 초기 설계값은 $x_i = 400 \text{ mm}^2$ 으로 한다.

문제의 형식이 음함수이므로 1차 도함수에 대한 정보는 유한 요소 프로그램을 사용하여 해석적인 방법으로 얻는다. 이 문제의 경우 1차 근사 기법만을 적용하였는데, 이동점근법의 경우 점근선의 값은 다음과 같이 정의한다.

(a) $k = 0, 1$ 의 경우, $L_j^{(k)} = 0$, $U_j^{(k)} = 5x_j^{(k)}$

(b) $k \geq 2$ 인 경우, 식 (4), (5)를 사용한다.

연속 선형 근사 계획법의 경우는 섭동 (oscillation)하여 발산하였으며, 볼록 선형 근사법은 느린 수렴속도로도 반복 횟수 40번만에 해를 계산하였다. 그러나, 이동점근법의 경우는 다른 1차 근사 기법과는 달리 8번만에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이 결과를 Fig. 2, 3에 나타내었다.

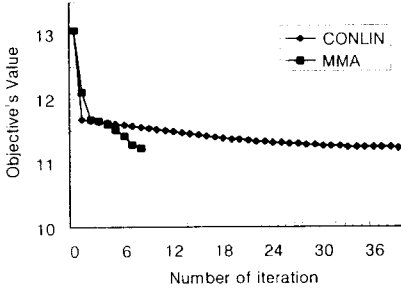


Fig. 2 Objective's value vs. number of iteration in 8-bar truss

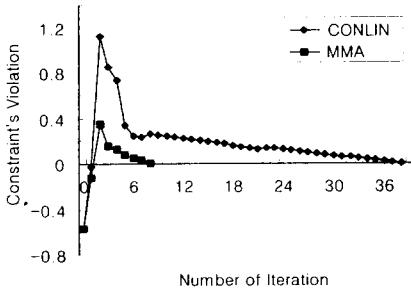


Fig. 3 Constraint's violation vs. number of iteration in 8-bar truss

3.2 용접보

Fig. 4에 도시된 용접보 설계 문제⁽⁶⁾의 정의는 다음과 같다.

구속조건으로는 용접 부분의 전단응력(g_1), 굽힘응력(g_2), 보에 대한 좌굴 하중(g_3), 보 끝 부분에 대한 변형량(g_4), 용접 부분의 높이와 용접보의 폭의 제한(g_5) 등을 고려하였으며, 목적 함수는 설치비용, 인건비 및 재료비용을 합한 총비용으로 하여 총비용을 최소화하는 문제이다.

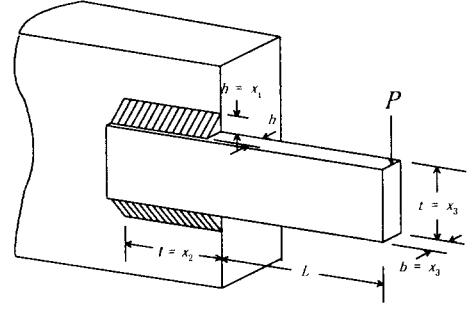


Fig. 4 Welded beam

설계 변수로는 용접 부분의 폭과 높이(x_1), 길이(x_2), 용접보의 높이(x_3), 용접보의 폭(x_4)을 고려하였으며, 다음과 같이 정식화된다.

목적 함수:

$$f(\vec{x}) = 1.10471x_1^2x_2 + 0.0481x_3x_4(14 + x_2)$$

구속조건:

$$g_1 = \left\{ \frac{1}{2b_1b_2^2} + \frac{3(28 + x_2)}{x_1^2x_2[x_3^2 + 3(x_1 + x_3)^2]} + \frac{4.5(28 + x_2)^2[x_2^2 + (x_1 + x_3)^2]}{x_1^2x_2^2[x - 2^2 + 3(x_1 + x_3)^2]^2} \right\}^{1/2} - \frac{13/6}{6} \leq 0$$

$$g_2 = \frac{1}{x_4x_3^2} - 0.05952 \leq 0,$$

$$g_3 = 0.09267 - x_3x_4^3(1 - 0.02823x_3) \leq 0,$$

$$g_4 = 8.7808 - x_3^2x_4 \leq 0, \quad g_5 = x_1 - x_4 \leq 0,$$

$$0.125 \leq x_1 \leq 10, \quad 0.1 \leq x_2 \leq 10,$$

$$0.1 \leq x_3 \leq 10, \quad 0.1 \leq x_4 \leq 10$$

이 문제는 1차 및 2차 근사 기법을 적용하여 최적화를 수행한 결과, Fig. 5, 6과 같은 결과를 얻었다. Fig. 5는 반복 횟수에 따른 목적 함수 값의 변화를 보이며, Fig. 6은 구속조건의 위반 정도를 나타낸다.

연속 이차 근사 기법이 가장 효율적으로 5번만에 수렴하였으며, 다음으로 이동점근법이 6번만에 수렴하였고, 볼록 선형 근사는 13번, 연속 선형 근사가 16번만에 수렴하였다. 따라서, 1차 근사 기법 중에서는 이동점근법이 가장 효율적이었으나 2차 근사법인 연속 이차 근사보다는 비효율

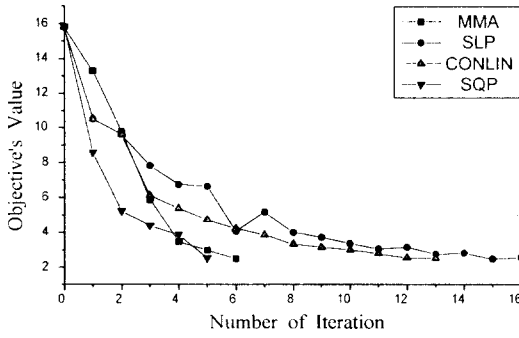


Fig. 5 Objective's value vs. number of iteration in welded beam

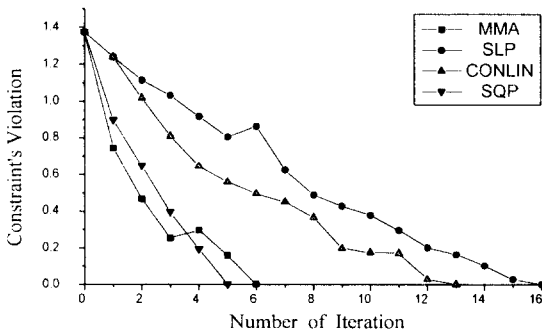


Fig. 6 Constraint's violation vs. number of iteration in welded beam

적이라는 결과를 얻었다. 그러나 최적화 수행 중 함수 값을 이용한 횟수는 이동점근법이 적었다.

3.3 헬리콥터 꼬리날개(helicopter tail boom)

헬리콥터 꼬리날개에 대한 이상화된 프레임 구조물을 Fig. 7, 8에 나타내었다. 재료에 관한 계수 값은 Table 1에 표시하였다.

구조물은 절점 5~28에 y , z 방향으로의 변위 구속조건(displacement constraints)과 각 요소의 경계 구속조건(side constraints)을 만족하면서 경량화 하는 것으로 설계되어진다.

구속조건은 장주 좌굴과 국부적인 좌굴을 따라 각 부재 양단에서의 응력으로 설정된다. 변위 (u) 구속조건 허용량과 모든 부재에 대해 경계 구속조건은 $-0.5 \leq u \leq 0.5$, $0.25 \leq R \leq 25.0$, $0.001 \leq t \leq 5.0$ in.이다.

모든 부재의 초기 값을 $R^0=2.0$ in., $t^0=0.051$ in.로 설정한 뒤 최적화 과정을 수행한다.

기술된 두 예제로부터 이동점근법이 가장 효율

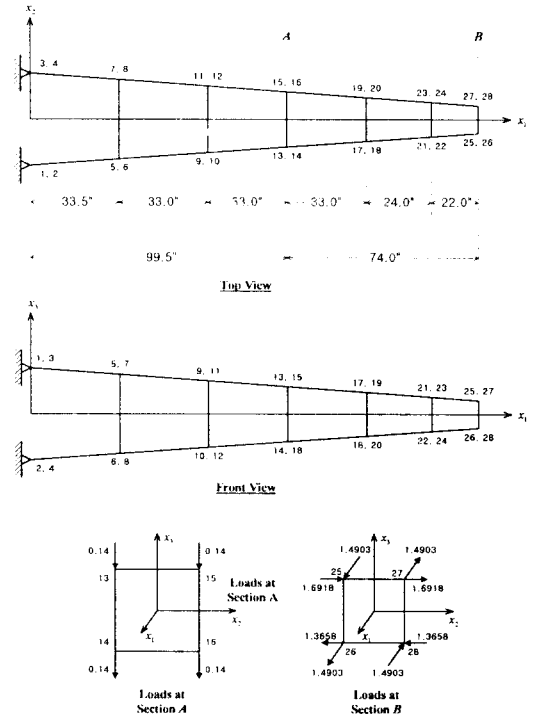


Fig. 7 Helicopter tail boom

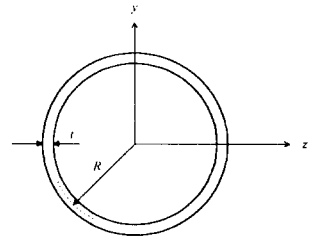


Fig. 8 Element cross-sectional type

Table 1 Design data for helicopter tail boom

Young's Modulus	$E = 10.5 \times 10^9$ psi
Shear Modulus	$G = 4.04 \times 10^9$ psi
Poisson's Ratio	$\nu = 0.3$
Material Density	$\rho = 0.1$ lb/in. ³
Allowable Stress	$\sigma_a = 4.2 \times 10^4$ psi

적인 기법이라는 것을 확인하였으므로, 이 문제에서는 이동점근법만을 적용하여 최적화를 수행하였다. 수행한 후 참고문헌 (7)에 있는 복합 1차 근사 기법(hybrid linear approximation)과 비교하여 그 결과를 Table 2에 나타내었다.

Table 2 Iteration history data for helicopter tail boom⁽⁷⁾

Analysis No.	Weight, lb					
	1	2	3	4	5	MMA
0	69.11	69.11	69.11	69.11	69.11	69.11
1	95.86	102.73	99.10	97.87	105.44	103.04
2	107.94	107.32	109.46	108.65	112.34	104.91
3	110.69	109.44	110.00	109.62	110.20	106.13
4	109.51	109.51	110.04	108.74	109.15	107.51
5	110.13	109.97	109.44	108.34	108.90	108.71
6	109.33	109.55	108.96	108.74	108.79	
7	109.25	109.60	108.79	108.66		
8	108.83	108.89	108.77	108.48		
9	108.71	108.89	108.73	108.52		
10	108.80	108.82		108.35		
Final	108.80	108.82	108.73	108.35	108.79	108.71

이동점근법을 적용한 결과, Table 2와 같이 참고문헌 (7)에서 제안한 다른 1차 근사 기법에 비해서도 좋은 결과와 빠른 수렴을 보여주고 있다.

4. 결론

1차 및 2차 근사 기법을 비선형 구조물인 기어 감속기와 용접보 설계의 최적화에 적용한 결과 연속 이차 근사가 가장 빠르게 수렴하였으며, 1차 근사 기법 중에서는 이동점근법이 가장 효율적임을 확인하였다. 그러나, 최적화 수행 시 함수 계산 횟수가 이동점근법이 훨씬 적으므로 계산 비용면에서 이동점근법이 더욱 효율적임이 확인되었다. 또, 보다 복잡한 헬리콥터 꼬리날개에 적용한 결과 매우 만족한 결과를 얻었다. 따라서, 이동점근법은 간단한 구조물에서 복잡한 구조물까지 적용될 수 있는 효율적인 1차 근사 기법임을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Schmit, L. A., "Structural Design by Systematic Synthesis", Proceedings of the 2nd Conference on Electric Computation, ASCE, New York, 105-122 (1960)
- (2) Bathelemy J. F., Haftka R. T., "Approximation Concepts for Optimum Structural Design - A Review", Structural Optimization, Vol. 5, pp. 129-144 (1993)
- (3) Kelly J. E., "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs", Journal of SIAM, Vol. VIII, No. 4, pp. 703-712, (1960)
- (4) Braibant V., Fleury C., "An Approximation Concept Approach to Shape Optimal Design", Com. Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 53, pp. 119-148 (1985)
- (5) Svanverg K., "The Method of Moving Asymptotes-A New Method for Structural Optimization", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, pp. 359-373 (1987)
- (6) Rao S. S., 1996, *Engineering Optimization*, 3rd Ed., Wiley-Interscience
- (7) Lust R. V., Schmit L. A., "Alternative Approximation Concepts for Space Frame Synthesis", AIAA, Vol. 24, No. 10, pp. 1676-1684 (1985)
- (8) Fleury C., "Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 14, pp. 1761-1783 (1979)
- (9) Fleury C., Braibant V., "Structral Optimization : A New Dual Method Using Mixed Variables", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 23, pp. 409-428 (1986)
- (10) Haftka R. T., Gurdal Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, 3rd Ed., Kluwer Academic Publishers
- (11) Belegundu A. D., Arora J. S., "A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part II : Numerical Results", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 21, pp. 1601-1623 (1985)