

하다마드변환을 이용한 2차원 영상복원법

\* 서익수\*, 박영재\*, 이태훈\*, 윤태성\*\*, 박진배\*  
 \*연세대 전기·컴퓨터공학과, \*\*창원대 전기공학과

2-Dimensional Image Recovery Method Using Hadamard Transform

\*Ik-Su Seo \*Young-Jae Park \*Tae-Hoon Lee \*\*Tae-Sung Yoon \*Jin-Bae Park  
 \*Dept. of Electrical & Computer Engineering, Yonsei Univ.  
 \*\*Dept. of Electrical Engineering, Changwon Univ.

**Abstract** - In this paper we present 2-dimensional image recovery method using Hadamard transform. Generally, the methods of Hadamard transform are more useful tools and much simpler than those of Fourier transform. The Hadamard transform can improve estimates when the detector is the source of noise. We take into account nonidealities in the system for the further improved image. We also present the average mean square error(AMSE) associated with estimates with the results from computer simulations.

1. 서 론

하다마드 변환은 광원의 스펙트럼을 측정하는 분광계 분야에서 주로 이용된다. 광신호는 고주파수 영역에 해당하므로 신호를 샘플링하여 스펙트럼을 알아내는 DFT(discrete fourier transform)방법은 무의미하다. 영상복원에서 하다마드 변환을 이용한 방법은 이러한 이유에서 고주파수 영역에 유용하며 기존의 Fourier 변환에 비해 시스템 구현이 간단하다. 본 논문에서는 하다마드 행렬로부터 구한 S 행렬(simplex matrix)을 마스크 제어용 행렬로 이용하여 입력부에서 부호화를 수행한다[2]. 기계식 마스크는 재밍(Jamming), 조정불량(misalignment)과 같은 기계적 문제점을 지니고 있으므로 이를 보완한 고정형 전자광학마스크(stationary electro-optic mask)가 소개되었다. 전자광학마스크는 기계식 마스크에 비해 신호제어가 편리하지만 비이상적인 투과율 특성을 나타낸다. 이를 고려한 복원법으로  $D^{-1}$ ,  $T^{-1}$  같은 방법을 제안되었다[1].

일반적으로 2차원 영상의 공간영역에서의 강도측정은 분포된 영상을 주사하여 이루어진다. 이러한 방법은 측정기에서의 잡음이 상당히 증가하게 된다는 단점을 지니고 있다. 다중화기법을 마스크제어용 행렬에 적용하고 입력부에서 부호화를 수행하여 시스템의 오차를 줄여준다. 다중화기법은 측정잡음을 감소시켜 신호대 잡음비(signal to noise ratio:SNR)를 증가시킨다. 모의 실험 통하여 마스크가 이상적인 경우에 영상을 복원하고 비이상적인 경우에는  $S^{-1}$ ,  $D^{-1}$ ,  $T^{-1}$  방법을 이용하여 영상을 복원한다. 또한 이 복원결과들의 평균자승오차(Average Mean Square Error)를 알아본다.

2. 본 론

2.1 하다마드 행렬

하다마드 변환을 이용한 영상 복원법에서 시스템 제어용 행렬, 마스크 특성, 측정잡음과 같은 통계적 특성이 있다. 영상복원기술과 관련한 통계적 오차의 특성은 다음과 같다.

$$E[e_{ij} e_{kl}] = \begin{cases} \sigma^2, & i=k, j=l \\ 0, & i \neq k, j \neq l \end{cases} \quad (1)$$

여기서  $\sigma^2$  은 오차의 분산이다. 제안된 시스템에서는 마스크 제어용 S 행렬로 식(2)와 같은 Sylvester 형태의 하다마드 행렬을 변형한 행렬을 사용한다.

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 정수 N은 2의 배수에서만 성립한다. 하다마드행렬은 최적의 자기상관관계를 지닌 행렬로 S행렬은 식(3)과 같이 첫 행과 첫 열을 없애고 '-1'은 '1'로 '1'은 '0'으로 바꾼다.

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 - 는 -1을 의미한다.

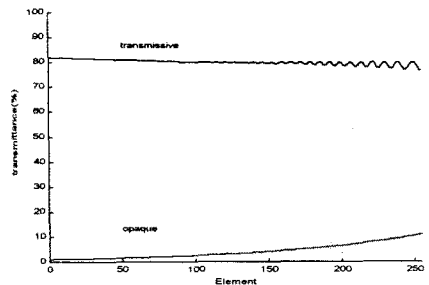


그림 1. 전형적인 PDLC 마스크의 투과율 특성곡선

이 시스템에서 사용하는 전자공학 마스크는 전기적으로 신호를 제어할 수 있다는 이점을 지니고 있는 데 일반적으로 비이상적인 투과율을 나타내므로 투명, 불투명 상태에서 각각 100%, 0%의 투과율을 갖지 못한다. 바로 그림 1에서 처럼 전형적인 PDLC 마스크의 투과율은 대략 0.8 정도이고 비투과율은 0에서 0.1 사이의 값을 갖는다.

2.2 하다마드 변환을 이용한 영상기

그림 2는 하다마드 변환을 이용한 영상기의 부호화 과정을 나타내며 비이상적인 마스크제어용 행렬  $\tilde{W}$ 는 N정방행렬로 나타내며 영상의 각 단위 셀의 실제치는 N

정방행렬  $\psi$ 로 나타낸다. 측정잡음을 고려한 각 단위 셀의 측정치  $\eta$ 를 행렬벡터형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = \tilde{W} \psi + e \quad (4)$$

$$\tilde{W} = SD + 1\tau_o^T$$

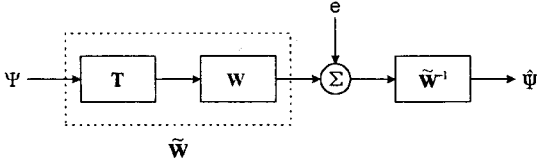


그림 2. 하다마드 변환을 이용한 영상기의 블록선도

식 (4)로부터 추정치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\psi} = \tilde{W}^{-1} \eta \quad (5)$$

추정치  $\hat{\psi}$ 의 평균자승오차와 마스크제어 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N E [(\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij})^2] \quad (6) \\ &= \frac{\sigma^2}{N^2} \text{tr} \{ (\tilde{W}^T \tilde{W})^{-1} \} \end{aligned}$$

$$\tilde{W} = WT \quad (7)$$

마스크가 이상적인 경우의 전달행렬 T는 I이며 W=S이다.

비이상적경우의 마스크 제어용 행렬과 수식들은 다음과 같다.

$$\tilde{W} = WD + 1\tau_o^T = W(D + W^{-1}1\tau_o^T) \quad (8)$$

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{NN})$$

$$\text{diag}(\tau_{11} - \tau_{o1}, \tau_{22} - \tau_{o2}, \dots, \tau_{NN} - \tau_{oN})$$

$$1 = [1 \ 1 \ 1]$$

$$\tau_o = [\tau_{o1}, \tau_{o2}, \dots, \tau_{oN}]$$

위의 정의된 행렬들을 이용하여 비이상적인 마스크 제어용 행렬  $\tilde{W}$ 는 다음의 수식과 같이 정의된다.

$$\tilde{W} = WD + 1\tau_o^T = W(D + W^{-1}1\tau_o^T) \quad (9)$$

$$T = D + W^{-1}1\tau_o^T$$

## 2.3 영상 복원법

영상을 복원하는 데 마스크가 이상적인 경우일 때의 복원과 이상적이지 않은 경우의  $S^{-1}$ ,  $D^{-1}$ ,  $T^{-1}$  복원 방법은 다음과 같다.

### 2.3.1 $S^{-1}$ Method

이상적인 마스크의 경우는 W=S, T=I 이므로 추정치는 다음과 같다.

$$\eta = S \psi + e \quad (10)$$

마스크가 이상적이므로 추정치는 다음의 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= S^{-1} \psi + e \\ &= S^{-1}(S\psi + e) \\ &= \psi + S^{-1}e \end{aligned} \quad (11)$$

이 추정치의 평균과 실제치는  $E[\hat{\psi}] = \psi$ 이므로 편향되지 않으며 고속 하다마드 변환(Fast Hadamard transform : FFT)을 이용하여 연산수를 줄여줄 수 있다. 이 편향되지 않은 평균자승오차는 다음 수식과 같다.

$$\epsilon = \frac{4\sigma^2}{(N+1)^2} \quad (12)$$

마스크가 이상적이지 않은 경우에서  $S^{-1}$  복원방법의 단점은 마스크의 비이상적인 특징이 무시된다는 것이다. 이 경우의 추정치는 W=S, T=I 이므로 다음과 같다.

$$\eta = \tilde{W} \psi + e \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= S^{-1} \eta \\ &= S^{-1}[ST\psi + e] \\ &= T\psi + S^{-1}e \end{aligned} \quad (14)$$

마스크가 비이상적인 경우의  $S^{-1}$  방법에서의 평균자승오차는 다음의 식과 같다.

$$\epsilon = \frac{4\sigma^2}{(N+1)^2} + \frac{1}{N^2} \text{tr} \{ (T-D)\psi(T-D)\psi^T \} \quad (15)$$

### 2.3.3 $D^{-1}$ Method

비이상적인 마스크를 가진 경우의 복원방법중에서  $D^{-1}$  방법의 제어행렬  $\tilde{W}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{W} = SD + 1\tau_o^T \quad (16)$$

추정치는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= D^{-1}S^{-1} \eta \\ &= D^{-1}S^{-1}(\eta - b) \\ &= \psi + D^{-1}S^{-1}e \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 부측정 벡터 b는 다음과 같이 정의 된다.

$$b_i = b = \sum_{j=1}^N \tau_{oj} \psi_j, \text{ for all } i. \quad (18)$$

평균자승오차는 식 (6)에 의해서 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \frac{\sigma^2}{N^2} \text{tr} \{ D^{-1}S^{-1}(S^{-1})^T(D^{-1})^T \} \quad (19)$$

### 2.3.4 $T^{-1}$ Method

$T^{-1}$  방법은 편향되고 선형인 스펙트럼의 추정치를 효율적으로 계산할 수 있는 방법이다. 이 방법의  $T^{-1}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T^{-1} = D^{-1} - qD^{-1}1\tau_o^TD^{-1} \quad (20)$$

$$q = \frac{2}{(N+1)+2} \sum_{j=0}^N \frac{\tau_{oj}}{d_{jj}}$$

N이 커짐에 따라 q는 0으로 수렴하므로 결국,

$T^{-1} \cong D^{-1}$ , for large  $N$   
따라서 이 방법의 추정치는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= T^{-1}S^{-1}\eta \\ &= T^{-1}S^{-1}(ST\psi + e) \\ &= \psi + T^{-1}S^{-1}e \end{aligned} \quad (25)$$

평균자승오차는 식 (6)에 의해서 다음 식과 같다.

$$\epsilon = \frac{\sigma^2}{N^2} \text{tr} \{ T^{-1}S^{-1}(S^{-1})^T(T^{-1})^T \} \quad (26)$$

$T^{-1}$ 방법은  $D^{-1}$ 방법에 비해서 부가적인 측정이 필요하지 않고 작은  $N$ 값에도 최적의 결과를 얻을 수 있다는 것이 장점이다.

다음은 위의 방법들에 의해서 시뮬레이션한 결과들이다.



그림 3. 이상적인 마스크를 사용한 경우



그림 4.  $S^{-1}$  복원 방법에 의한 결과



그림 5.  $D^{-1}$  복원 방법에 의한 결과



그림 6.  $T^{-1}$  복원 방법에 의한 결과



그림 7. Original Image

### 3. 결 론

하다마드 변환을 이용한 2차원 영상복원에서 마스크의 특성은 중요한 문제이다. 일반적으로 이상적인 마스크가 존재하지 않으므로 마스크 제어행렬을  $\hat{H}$ 를 이용한  $S^{-1}$ ,  $D^{-1}$ ,  $T^{-1}$  복원 방법을 이용해서 영상을 복원하였다.  $S^{-1}$ 복원 방법에 의한 MSE가 가장 크고  $D^{-1}$ ,  $T^{-1}$  순서로 MSE가 줄어들었다.  $N$  값이 클수록  $D^{-1}$ 와  $T^{-1}$ 가 같아지므로 이 두 가지 방법에 의한 MSE가 거의 비슷하며 영상의 복원 결과들도 큰 차이를 보이지 않았다.

이 하다마드 변환을 이용한 영상복원은 제어 행렬에서 0과 1만을 사용한다는 점에서 연산량이 적으며 작은  $N$  값에도 최적의 복원이 가능하다는 장점이 있다. 결과적으로 위의 시뮬레이션 결과들과처럼 좋은 영상복원의 결과들을 가져온다.

표 1. 제안된 복원 방법들에 의한 평균자승오차

	$S^{-1}$ 방법	$D^{-1}$ 방법	$T^{-1}$ 방법
MSE	$6.597137 \times 10^2$	$5.355233 \times 10^{-4}$	$5.355012 \times 10^{-4}$

본 논문은 1997년도 학술진흥재단 공모과제 연구비 지원에 의한 결과임.

### [참 고 문 헌]

- [1] J. B. Park, T. W. Johnson, S.A. Dyer, B. K. Harms and R. A. Dyer, "On the Mean Square Error of Various Spectrometry", Applied Spectroscopy, Vol. 44, No. 2, pp. 219-228, 1990.
- [2] M. Harwit and N. J. A. Sloane, Hadamard Transform Optics, New York, 1979.
- [3] B. K. Harms, R. A. Dyer, T. W. Johnson and J. B. Park "An introduction to Hadamard Spectroscopy and the Multiplex Advantage", IEEE IMTC/89 Conference Record, pp. 434-438, 1989.
- [4] Ruth A. Dyer, Stephen A. dyer, Brian K. Harms, Timothy W. Johnson and Jin Bae Park, "Implementation Problems in Hadamard Transform Spectrometry", IEEE Transactions on Instrumentation and measurement, Vol 39, No1, pp. 163-167, February 1990.
- [5] A. E. Macgregor and R. I. Young, "Hadamard transforms of images by use of inexpensive liquid-crystal spatial light modulators", Applied Optics, Vol. 36, No 8, pp. 1726-1729, 10 March 1997.