

구-막대 시스템에서 CDM을 이용한 강인한 제어기의 설계

°이호기\*, 윤만수\*\*, 정찬수\*  
\*송실대학교 전기공학과, \*\*성남기능대학교

Robust Controller Design of Ball and Beam System Using CDM

°Ho-Kee Lee\*, Man-Soo Yun\*\*, Chan-Soo Chung\*  
\*Dept. Electrical Eng. Soongsil Univ. \*\*Sungnam Polytechnic College

**Abstract** - This paper designs a ball and beam system using Coefficient Diagram Method (CDM). The ball and beam system is used in many undergraduate control classes to verify a control algorithm or for pure educational purposes. Recently CDM is known to be useful for designing a controller with relatively easy procedure and procedures a low order, no overshoot, and robust controller. In this paper, CDM is applied to design a controller for the ball and beam system, and the controller is compared to that of LQG method. The result show that CDM gives better controller than LQG method.

1. 서 론

현대 제어 이론의 연구 추세는 최적 상태 피드백 제어에서 모델 불확실성에 대한 강인성 문제로 이후  $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $l_1$  최적제어와 같은 결과를 얻게 되었으나, 이러한 제어 기법이 강인성과 함께 최적성을 주는 대신, 제어기가 고차 구조를 갖기 때문에 구해진 제어기를 신뢰성 있게 구현하는 것이 어려울 뿐만 아니라 튜닝하기 어려워지는 단점이 있다. 최근 Manabe에 의해 Lipatov 안정 조건과 Kessler의 표준형을 발전시켜 계수 공간에서의 제어기 설계법으로 체계화시킨 CDM (Coefficient Diagram Method)이 발표되었으며, 이러한 CDM은 설계자가 폐루프 시스템의 안정성, 시간응답 및 강인성을 함께 고려하면서 저차의 제어기를 쉽게 설계할 수 있게 한다.[9]

특성 다항식을 사용한 안정도 해석은 Routh criterion으로부터 비롯되었으나, 특성다항식에 의한 직접적인 설계를 할 수 있도록 발전시킨 못했다. 최근 독일이나 일본에서 여러 연구자들에 의해 특성 다항식 접근 방법이 발전되었고, 실제 제어 시스템 설계에 성공적으로 적용되고, CDM은 이러한 접근 방법중의 하나이다.[7] 특성 다항식의 적당한 선택은 안정성과 응답만 만족되어진다면 어렵지 않지만, 강인성의 문제가 있다면 복잡해진다. CDM은 이러한 문제에 대한 해답이 될 수 있다..

본 논문에서는 제어기 설계시 비용이 저렴하고, 어떠한 플랜트에 대해서도 가장 간단하고 강인한 제어기를 설계할 수 있는 CDM을 사용하여 제어기를 설계하고 다른 제어 기법과의 비교를 통해서 CDM의 강인성을 증명함을 목적으로 한다.

2. 본 론

2.1.1 CDM의 기초

만약 특성 다항식  $P(s)$ 가 다음과 같이 주어진다면

$$P(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.1)$$

그 때 stability index  $\gamma_i$ , equivalent time constant  $\tau$ 와 stability limit  $\gamma_i^*$ 는 다음과 같이 정의된다.[3]

$$\gamma_i = a_i^2 / a_{i+1} \cdot a_{i-1} \quad i=1 \sim n-1 \quad (2.2)$$

$$\tau = a_1 / a_0 \quad (2.3)$$

$$\gamma_i^* = 1 / \gamma_{i+1} + 1 / \gamma_{i-1} \quad \gamma_n = \gamma_0 = \infty \quad (2.4)$$

위 계수들을 이용하여 식(2.1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$P(s) = a_0 \left[ \sum_{i=2}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}^*} \right) (\tau s)^i \right] + (\tau s + 1) \quad (2.5)$$

이러한 식들은 CDM 설계 과정에서 사용된다.

2.1.2 CDM에서의 외란제거

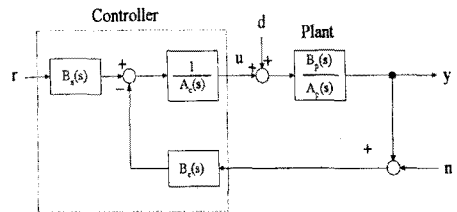


Fig. 2.1 Two-parameter feedback configuration

외란 제거 문제는 출력  $Y(s)$ 에 있는 외란  $D(s)$ 의 영향을  $t \rightarrow \infty$ 로 보냄으로써 줄일 수 있는 제어기를 설계하는 것에 있다. Fig 2.1에 있는 two-parameter configuration으로부터 외란과 출력의 관계는 다음 전달함수로 기술된다.

$$G_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{B_p(s)A_c(s)}{A_c(s)A_p(s) + B_c(s)B_p(s)} \quad (2.6)$$

$D(s) = B_d(s) / A_d(s)$ 로서 외란 신호의 모델링과  $A_c(s) = \Phi(s) \overline{A_c(s)}$ 로서  $A_c(s)$ 의 분해에 의해, 시스템 출력  $Y(s)$ 는 다음과 같다.

$$Y(s) = \frac{B_p(s) \overline{A_c(s)} \Phi(s)}{\Phi(s) A_c(s) A_p(s) + B_c(s) B_p(s)} = \frac{B_d(s)}{A_d(s)} \quad (2.7)$$

만약 모든  $A_d(s)$ 의 불안정한 근이  $\Phi(s)$ 에 의해 제거되고  $P(s) = \Phi(s) \overline{A_c(s)} A_p(s) + B_c(s) B_p(s)$ 의 모든 근이 안정하다면, 그 때 출력  $Y(s)$ 는 regulated된다.

## 2.2 시스템 모델링 (2)

논문에서 사용할 구-막대 평형기는 니크롬선을 따르는 구의 위치변화가 선의 유효길이를 변화시켜서 선의 저항과 전압을 변화시킴에 착안하여 제작하고, CDM을 사용하여 제어기를 설계한다. 구해진 제어기를 하드웨어로 구현하고 외란 억제 효과 및 강인성을 검증해 보기 위해서 외란이 입력되도록 막대에 임의의 충격을 가하고 구-막대 평행 실험을 행하여 그 결과를 통해서 CDM 기법으로 설계한 제어기를 실제 플랜트에 적용·구현될 경우 다른 제어기법에 비해서 더 효율적임을 보인다.

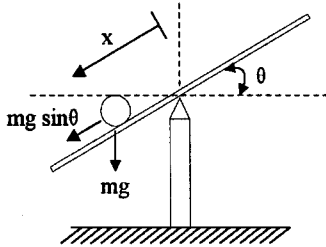


그림 2.2 구-막대 문제의 개략도

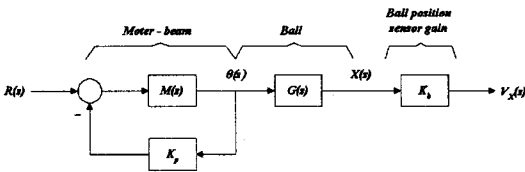


그림 2.3 구-막대 문제의 블록선도

### 2.2.1 구-막대 동특성 $G(s)$

참고문헌 [2]를 참조하여 모델링을 하면 다음과 같은 비선형 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(m + \frac{I_b}{r^2}\right) \ddot{x} + \left(\frac{I_b}{r^2}\right) \ddot{\theta} - mx \dot{\theta}^2 = mg \sin \theta \quad (2.8)$$

이 식을 선형화하기 위해서 작은 외란에 대해서 제어계는 구를 최소 축 움직임으로 멈추게 한다고 가정한다면 윗식은 다음과 같이 된다.

$$\left(m + \frac{I_b}{r^2}\right) \ddot{x} = mg \theta \quad (2.9)$$

결과적으로 플랜트 모델은 다음과 같다

$$G(s) = \frac{X(s)}{\Theta(s)} = \frac{g}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{r}\right)^2} \frac{1}{s^2} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 모터-막대 동특성 $M(s)$

전체 모터-막대 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{1 + K_p M(s)} \quad (2.11)$$

모터의 동특성이 전체계의 동특성보다 훨씬 빠르다고 가정하면 다음과 같이 모델링 할 수 있다.

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{M(0)}{1 + K_p M(0)} = \alpha \quad (2.12)$$

### 2.2.3 매개변수 결정

적절한 구 반경  $r$ 과  $R$ 이 직접 측정되며 다음과 같다.

$$r = 0.00639[m], \quad R = 0.0127[m]$$

니크롬선에 가해지는 전압은 1.193 V이고, 막대의 길이는 0.636 m이기 때문에 구의 위치 이득은 다음과 같다.

$$K_b = 1.193/0.636 = 1.875 V/m$$

구가 없다고 생각하고 함수 발생기로부터 사인파가 입력된다고 가정하여 모터-구계를 유도하여 포텐서미터의 출력을 측정한다. 이러한 실험으로 보드선도를 curve fitting하여 다음을 유도한다.

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{37}{s^2 + 21s + 448}$$

모터-막대 계 전달함수의 저주파수 이득은  $\alpha$  이고 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha = \frac{37}{448} = 0.083 \text{ rad/V}$$

개루프 전달함수의 최종 모델은 다음과 같다

$$\frac{V_x(s)}{R(s)} = \frac{0.591}{s^2}$$

## 2.3 제어기 설계

플랜트의 식은 다음과 같다.

$$A_p = 0.588$$

$$B_p = s^2$$

제어기의 차수는 2차로 가정한다.

$$A_c(s) = C_2 s^2 + C_1 s + C_0$$

$$B_c(s) = D_2 s^2 + D_1 s + D_0$$

만약 스텝 왜란을 고려한다면  $D(s) = 1/s$ 이고, 그렇다면 그때  $\Phi(s) = s$ 가 되고  $A_c(s) = \Phi(s) \overline{A_c(s)}$ 가 된다. 그럼 이때  $\overline{A_c(s)}$ 는  $\overline{A_c(s)} = \overline{C_1 s + C_0}$ 가 된다. 이때 Sylvester matrix를 구성하면 다음과 같다.

$$\left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.588 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.588 \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_0 \\ D_2 \\ D_1 \\ D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

본 논문에서는  $\gamma_i$ 는 manabe 표준형인 [2, 2, 2.5]를 사용하며, Settling time은 3초를 만족하도록 하기 위해서  $r = 1$ 로 한다. 왜냐하면 settling time은 대략  $2.5 \sim 3\tau$ 이기 때문이다. 이렇게 하여 설계한 제어기는 다음과 같다.

$$A_c(s) = s^2 + 10s$$

$$B_c(s) = 238.1s^2 + 595.24s + 595.24$$

이 때  $\gamma_i^*$ 를 구해보면 [0.5, 0.9, 0.5]이고 이것은 3차나 4차의 안정도 조건  $\gamma_i, \gamma_i^*$ 을 만족하므로 이 시스템은 안정하다고 말할 수 있다.

## 2.4 시뮬레이션

설계된 제어기의 성능을 평가하기 위해서 시뮬레이션을 한다. Settling time은 3초로 하고, 그 때의 LQR과 CDM으로 설계한 제어기의 성능을 비교한다. 외란이 입력되지 않은 경우의 LQR과 CDM으로 설계한 제어기의 시뮬레이션 결과를 비교해 보면 다음과 같다

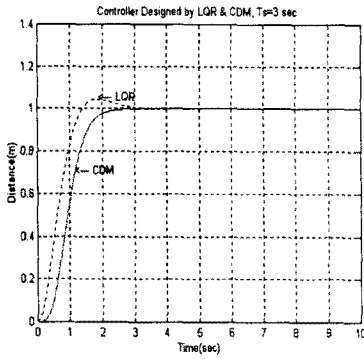
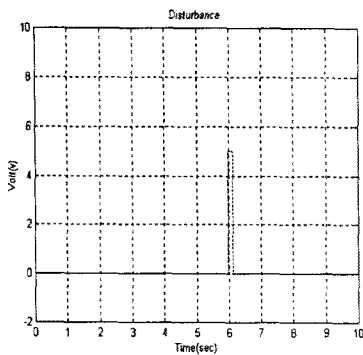


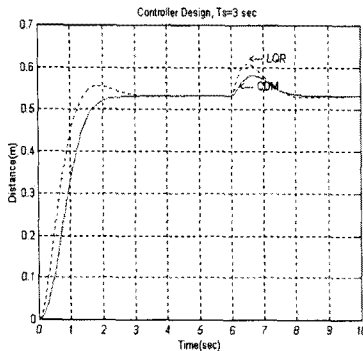
그림 2.4. 외란이 없을 경우 LQR와 CDM의 비교

그림 2.4에서 LQR의 경우는 오버슈트가 생겼으나 CDM으로 설계한 경우는 오버슈트가 생기지 않음을 볼 수 있는데 오버슈트가 생기지 않는 것도 CDM의 특징 중의 하나이다.

다음은 외란을 6초에서 6.1초까지 5[V]로 주고, 그때의 결과를 LQR과 비교한다.



(a) 외란의 형태



(b) LQR과 CDM으로 설계한 제어기의 비교

그림 2.5. 외란 입력시 LQR과 CDM으로 설계한 제어기의 비교

외란이 입력된 경우를 비교해 보면 외란에 대해서도 LQR보다는 CDM으로 설계한 제어기가 더 강인함을 알 수 있었다.

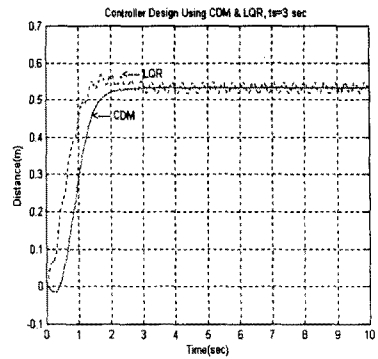


그림 2.6. Noise가 입력된 경우 LQR과 CDM의 비교

그림 2.6에서는 noise가 정현파의 형태로 입력되었을 경우의 결과를 보인 것이고, 이 경우도 CDM으로 설계한 제어기의 경우가 LQR의 경우보다 더 강인함을 확인할 수 있었다.

### 3. 결 론

본 논문에서는 제어 대상으로 비선형의 특성을 가지고 있는 구-막대 시스템으로 정하고, 최근 Manabe에 의해 소개된 CDM을 사용하여 제어기를 설계하고, LQR과의 비교를 통해 CDM의 우수성을 입증하였다. CDM의 응답 특성을 보면 LQR보다는 느린 응답을 보였지만 오버슈트가 발생하지 않음을 알 수 있었고, 외란과 noise에 대해 더 강인함을 확인할 수 있었다.

### (참 고 문 헌)

- [1] S. Manabe, Youngchol Kim and Hwanil Kang, Note on A New Polynomial Approach for controller Design: Coefficient Diagram Method, 충북대학교, Feb.4~Feb.5, 1999
- [2] Shahian, B., and Hassul, M., *Control System Design Using Matlab*, Prentice Hall, New Kersey, 1993.
- [3] S. Manabe, Lecture note on an Algebraic Approach to control system Design: Coefficient Diagram Method, 충북대학교, Workshop on Control Theory, Dec., 1997.
- [4] Chen, C. T., "Introduction to the linear algebraic method for control system design", IEEE Contr. Syst. Mag., 7.5, pp. 36-42, 1987
- [5] Topics in CDM: Reference papers selected by Shunji Manabe, 충북대학교, 1997, 12,
- [6] Chen, C. T., "Introduction to the linear algebraic method for control system design", IEEE Contr. Syst. Mag., 7. 5, pp. 36-42, 1987
- [7] S. Manabe, "The sufficient Condition for Stability by Lipatov as the Theoretical Basis of the Coefficient Diagram Method"
- [8] S. Manabe, "Coefficient Diagram Method", 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, pp. 199-210, Aug., 1998
- [9] 김영철, 강환일, 허명준, 김한실, 주성준, "계수도법:개설", Proceeding of the 13th, KACC, Vol 1., pp. 772-775, 1998