

불확실한 비선형 계통에 대한 강인한 적응 퍼지 제어기 설계

박장현*, 서호준*, 박귀태*
*고려대학교 전기·전자·전파공학부

Design of Robust Adaptive Fuzzy Controller for Uncertain Nonlinear System

Jang-Hyun Park*, Ho-Joon Seo*, Gwi-Tae Park*
*School of Electrical Engineering, Korea Univ.

Abstract - In adaptive fuzzy control, fuzzy systems are used to approximate the unknown plant nonlinearities. However, because of the approximating error introduced into the feedback loop, it is difficult to guarantee the stability of the adaptive control algorithm. This paper presents a robust control algorithm against the reconstruction error and uniform boundedness of the all signals is established in the Lyapunov sense.

1. 서 론

퍼지 시스템은 임의의 함수를 원하는 정도의 정밀도로 근사화할 수 있고[1] 전문가의 지식을 반영할 수 있다는 장점이 있다. 이러한 장점으로 인하여 퍼지 시스템을 이용한 제어기는 제어 대상에 대한 정확한 수학적 모델이 필요치 않으며, 최근 불확실한 비선형 계통에 대하여 리아프노프(Lyapunov)관점에서 안정한 퍼지 제어방식이 널리 연구되고 있다.[2,3,5] 그러나 제어기를 설계하는데 있어서 필연적으로 재구성 오차(reconstruction error)가 발생하므로 이 오차에 대해 강인한 제어기를 설계하는 것이 본 논문의 목적이다.

[2]에서는 감독제어입력(supervisory control input)을 이용하여 오차를 원하는 범위내에 유계시킬 수 있으나 이를 위해서 계통의 비선형함수의 상·하한값을 알아야 한다는 단점이 있다. 일반적으로 이는 매우 어려우므로 [3]과 [5]에서는 그러한 단점을 극복한 제어방식을 제시하였으나 오차에 대해 불연속인 sgn(·)함수를 사용함으로써 채터링(chattering)이 발생하게 된다.

본 논문에서는 [5]에서의 기법을 퍼지 제어기에 적용하여 재구성 오차의 유계함수가 미지의 유계 파라미터(bounding parameter)와 기지의 비선형함수의 곱의 꼴로 나타내어질 경우에 대해 강인한 적응 제어기를 설계한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 적응 유계 기법(adaptive bounding design)을 이용한 제어기를 설계하고 3장에서는 제시한 제어기를 이용한 모의실험을 수행한 결과를 보이며 마지막으로 4장에서는 결론을 내린다.

2. 적응 퍼지 제어기 설계

다음과 같은 n차원의 어파인(affine)계통을 고려한다

$$x^{(n)} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

여기서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 미지의 연속함수이고 $u \in R$ 과 $x \in R^n$ 은 각각 계통의 입력과 출력이다. 그리고 $x = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T \in R^n$ 은 측정 가능한 상태 변수 벡터이다. (1)이 제어가능하기 위해서는 다음이 성립하는 g_i 이 존재한다는 가정이 필요하다.

$$0 \leq g_i \leq g(x) \quad (2)$$

추종 오차를 $e = y_m - y$ 라고 정의 하면 계통 (1)의 제어 목적은 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

$\underline{e} = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T$, $\underline{k} = (k_n, \dots, k_1)^T \in R$ 이라고 정의한다. 여기서 \underline{k} 는 다항식 $h(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$ 의 모든 근이 s평면의 좌반면에 위치하도록 결정된다. (1)의 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 다음과 같이 분리 할 수 있다.

$$f(x) = f_n(x) + \phi_f(x) \\ g(x) = g_n(x) + \phi_g(x)$$

위의 식에서 $f_n(x)$ 와 $g_n(x)$ 는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대한 명목(nominal) 함수를 나타내며 $\phi_f(x)$ 와 $\phi_g(x)$ 는 미지의 함수로서 퍼지 시스템에 의해 추정되어질 함수이다. 추정되는 함수를 $\hat{\phi}_f(x, \underline{\theta}_f^*)$, $\hat{\phi}_g(x, \underline{\theta}_g^*)$ 라고 하면 (1)은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$x^{(n)} = f_n(x) + \hat{\phi}_f(x, \underline{\theta}_f^*) + \delta_f(x) \\ + (g_n(x) + \hat{\phi}_g(x, \underline{\theta}_g^*) + \delta_g(x))u \quad (3)$$

여기서

$$\hat{\phi}_f(x, \underline{\theta}_f^*) = \frac{\sum_{j=1}^M \theta_{fj} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)} \triangleq \underline{\theta}_f^{*T} \underline{\xi}_f \\ \hat{\phi}_g(x, \underline{\theta}_g^*) = \frac{\sum_{j=1}^M \theta_{gj} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}(x_i) \right)} \triangleq \underline{\theta}_g^{*T} \underline{\xi}_g$$

이다. μ_{F_i} 은 i 번째 상태변수에 대한 1번째 퍼지 소속 함수를 나타내고 $\underline{\theta}_f^*$, $\underline{\theta}_g^*$ 는 미지의 최적의 퍼지후건부 파라미터 벡터이고 $\delta_f(x)$, $\delta_g(x)$ 는 재구성 오차(reconstruction error)를 나타낸다. (3)에 존재하는 재구성 오차에 대하여 강인한 제어기를 설계하는 것이 이 장의 내용이다.

제어입력은 다음과 같이 결정한다.

$$u = \frac{1}{g_n + \hat{\phi}_g} (-f_n + \hat{\phi}_f + y_m^{(n)} + \underline{k}^T \underline{e} + \beta) \\ = u_c + \frac{\beta}{g_n + \hat{\phi}_g} \quad (4)$$

여기서 $\hat{\phi}_f$ 와 $\hat{\phi}_g$ 는 각각 $\hat{\phi}_f(x, \underline{\theta}_f)$ 와 $\hat{\phi}_g(x, \underline{\theta}_g)$ 를 나타내며, β 는 재구성 오차를 다루기 위한 강인제어함으로서 뒤에서 정의된다. (4)를 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda_c \mathbf{e} + \mathbf{b}_c ((\hat{\varphi}_f - \hat{\varphi}_f^* - \delta_f) + (\hat{\varphi}_g - \hat{\varphi}_g^* - \delta_g) \mathbf{u} - \beta) \quad (6)$$

여기서

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다. Λ_c 는 안정한 행렬이므로 임의의 $n \times n$ 양정치 (positive definite) 행렬 Q 에 대하여 다음과 같은 관계를 만족하는 양정치 대칭행렬 P 가 존재한다.

$$\Lambda_c^T P + P \Lambda_c = -Q \quad (8)$$

적용되어질 파라미터의 갱신 법칙을 다음과 같이 표기한다.

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_f &= \gamma_f \eta_f (\hat{\vartheta}_f, \mathbf{e}) \\ \dot{\vartheta}_g &= \gamma_g \eta_g (\hat{\vartheta}_g, \mathbf{e}) \\ \dot{\hat{\varphi}}_f &= \gamma_\psi \eta_\psi (\hat{\varphi}_f, \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\hat{\varphi}_f$ 은 $\delta_f(\mathbf{x})$ 의 유계상수에 대한 추정치를 나타낸다.

2.1 적응법칙 설계

재구성 오차에 대해 다음과 같은 가정이 성립한다.

가정 1: compact region Ω 에서 다음이 성립한다.

$$|\delta_f(\mathbf{x})| \leq \psi_f^* s_f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (10)$$

$$|\delta_g(\mathbf{x})| \leq \psi_g^* s_g(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (11)$$

여기서 ψ_f^* 와 ψ_g^* 는 미지의 유계 상수이고 $s_f(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow R^+$, $s_g(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow R^+$ 는 기지의 smooth한 유계함수이다.

적용법칙을 유도하기 위해서 다음과 같이 리아프노프 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \frac{1}{\gamma_f} \vartheta_f^T \vartheta_f + \frac{1}{\gamma_g} \vartheta_g^T \vartheta_g + \frac{1}{\gamma_\psi} \hat{\varphi}_f^2 \right) \quad (12)$$

여기서 P 는 양정치 행렬이고 $\vartheta_f = \hat{\vartheta}_f - \theta_f^*$, $\vartheta_g = \hat{\vartheta}_g - \theta_g^*$, $\hat{\varphi}_f = \hat{\varphi}_f - \varphi_f^*$ 이다. 위 함수를 시간에 대해 미분하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c (\vartheta_f^T \xi_f - \delta_f + \vartheta_g^T \xi_g \mathbf{u} - \delta_g \mathbf{u} - \beta) \\ &\quad + \vartheta_f^T \eta_f + \vartheta_g^T \eta_g + \hat{\varphi}_f \eta_\psi \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \vartheta_f^T (\eta_f + \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \xi_f) \\ &\quad + \vartheta_g^T (\eta_g + \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \xi_g \mathbf{u}) - \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \delta_f \\ &\quad - \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \delta_g \mathbf{u} - \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \beta + \vartheta_f^T \eta_f + \hat{\varphi}_f \eta_\psi \end{aligned} \quad (13)$$

만약 적응법칙을 다음과 같이 선정하면

$$\eta_f = -\mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \xi_f - \sigma(\theta_f - \theta_f^*) \quad (14)$$

$$\eta_g = -\mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \xi_g \mathbf{u} - \sigma(\theta_g - \theta_g^*) \quad (15)$$

여기서 θ_f^* , θ_g^* 는 각각 θ_f 와 θ_g 의 초기값이다. (13)으로부터 다음이 성립한다.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \sigma \vartheta_f^T (\theta_f - \theta_f^*) - \sigma \vartheta_g^T (\theta_g - \theta_g^*) + \Lambda \quad (16)$$

여기서 $\sigma > 0$, θ_f^* , θ_g^* 는 실제 상수이고

$$\Lambda = -\mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \delta_f - \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \delta_g \mathbf{u} - \mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c \beta + \hat{\varphi}_f \eta_\psi \quad (17)$$

이다.

다음절에서 전체 폐루프 계통이 Λ 에 대해서 강인성이 증가되도록 β 를 결정하고 $\hat{\varphi}_f$ 의 갱신법칙을 유도한다.

2.2 적응 유계 기법

$z = -\mathbf{e}^T P \mathbf{b}_c$ 로 정의하고 (5)를 이용하면 (17)로부터 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\begin{aligned} \Lambda &= \hat{\varphi}_f \eta_\psi + z \delta_f + z \delta_g \mathbf{u} + z \beta \left(1 + \frac{\delta_g}{g_n + \hat{\varphi}_g} \right) \\ &\leq \hat{\varphi}_f \eta_\psi + |z| |\psi_f^* s_f + \psi_g^* s_g \mathbf{u}| + z \beta \left(1 + \frac{\delta_g}{g_n + \hat{\varphi}_g} \right) \\ &\leq \hat{\varphi}_f \eta_\psi + |z| \max\{\psi_f^*, \psi_g^*\} |s_f + s_g \mathbf{u}| \\ &\quad + z \beta \left(1 + \frac{\delta_g}{g_n + \hat{\varphi}_g} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

가정 2. (2)로부터 다음이 성립한다.

$$\left| \frac{\delta_g}{g_n + \hat{\varphi}_g} \right| < \frac{|\delta_g|}{g_l} = \gamma < 1 \quad (19)$$

퍼지시스템은 범용 근사화기(universal approximator)이기 때문에 $g_n + \hat{\varphi}_g(\mathbf{x}, \theta_g^*)$ 는 $g(\mathbf{x})$ 를 원하는 정밀도로 근사화시킬 수 있다. 즉 $|\delta_g|$ 는 원하는 정도까지 작게 만들 수 있다. 따라서 가정 2는 타당하다고 간주된다. 또한 γ 는 설계상수로서 g_l 과 δ_g 모두 미지의 상수지만 그 비는 1보다 매우 작다는 가정이 타당하다면 0에 가까운 적당한 상수로 설정할 수 있다. 이제 β 를 다음과 같이 결정한다.

$$w = \text{stanh} \left(\frac{zs}{\epsilon} \right) \quad (20)$$

$$\beta = -\frac{\hat{\varphi}_f}{1-\gamma} w \quad (21)$$

여기서 $s = s_f + s_g |\mathbf{u}|$ 이다. $\text{sgn}(z\beta) = -\text{sgn}(\hat{\varphi}_f)$ 가 성립하므로 (18)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Lambda &= \hat{\varphi}_f \eta_\psi + |z| |\psi^* s + z \beta \left(1 + \frac{\delta_g}{g_n + \hat{\varphi}_g} \right)| \\ &\leq \hat{\varphi}_f \eta_\psi + |z| \psi^* s - \hat{\varphi}_f z w \\ &\leq \hat{\varphi}_f (\eta_\psi - zw) + \psi^* (|zs| - zw) \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $\psi^* = \max\{\psi_f^*, \psi_g^*\}$ 이다. $\hat{\varphi}_f$ 의 적응법칙을 다음과 같이 결정한다.

$$\eta_\psi = zw - \sigma(\hat{\varphi}_f - \varphi_f^*) \quad (23)$$

만약 $\varphi_f^* \geq 0$ 이라면 위의 적응법칙은 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $\hat{\varphi}_f(t) \geq 0$ 를 보장한다. 그 이유는 $zw \geq 0$ 이고 $\hat{\varphi}_f = 0$ 에서 $\dot{\hat{\varphi}}_f > 0$ 이기 때문이다.

(23)을 (22)에 대입하고 다음과 같은 부등식을 이용하면

$$0 \leq |\eta| - \eta \tanh \left(\frac{\eta}{\epsilon} \right) \leq \epsilon \quad (24)$$

다음이 얻어진다.

$$\Lambda \leq -\sigma \hat{\psi}_f(\psi_f - \psi_f^0) + x\varepsilon\psi^* \quad (25)$$

여기서 x 는 $x = \exp(-(x+1))$ 을 만족하는 상수이다. ($x=0.2785$) (25)를 (16)에 적용하여 완전제곱꼴로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon - \sigma \hat{\theta}_x^T (\theta_x - \theta_x^0) \\ &\quad - \sigma \hat{\theta}_f^T (\theta_f - \theta_f^0) - \sigma \hat{\psi}_f (\psi_f - \psi_f^0) + x\varepsilon\psi^* \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon - \frac{\sigma}{2} (|\hat{\theta}_f|^2 + |\hat{\theta}_x|^2 + |\hat{\psi}_f|^2) \\ &\quad + \frac{\sigma}{2} (|\theta_f^* - \theta_f^0|^2 + |\theta_x^* - \theta_x^0|^2 + |\psi_f^* - \psi_f^0|^2) + x\varepsilon\psi^* \end{aligned} \quad (26)$$

만약 $P=I$ 로 선택하면 다음이 성립한다.

$$\dot{V} \leq -cV + \lambda \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned} c &:= \min\{\lambda_{\min}(Q), \sigma \gamma_f, \sigma \gamma_x, \sigma \gamma_\psi\} \\ \lambda &:= \frac{\sigma}{2} (|\theta_f^* - \theta_f^0|^2 + |\theta_x^* - \theta_x^0|^2 + |\psi_f^* - \psi_f^0|^2) + x\varepsilon\psi^* \end{aligned} \quad (28)$$

$\rho = \frac{\lambda}{c} > 0$ 으로 정의하면 (27)에 의해서 다음이 만족되고

$$V \leq V(t) \leq \rho + (V(0) - \rho) \exp(-ct) \quad (29)$$

따라서 $x, \hat{\theta}_f, \hat{\psi}_f$ 는 uniformly bounded 된다. 또한 (12)와 (28)로부터 주어진 $\mu > \sqrt{2\rho}$ 에 대해서 모든 $t > T$ 에 대해 다음이 만족하는 T 가 존재함을 알 수 있다.

$$|y(t) - y_m(t)| \leq \mu \quad (30)$$

만약 설계상수인 $\varepsilon, \sigma, k_i, \gamma_f, \gamma_x$ 그리고 Q 를 적절히 선택하면 μ 를 원하는 정도까지 작게 만드는 것이 가능하며 따라서 추종오차를 0에 가깝게 보낼 수 있다.

3. 모의실험

본 논문에서 제시한 알고리즘의 유효성을 보이기 위해서 역진자 계통에 대한 제어를 설계하여 모의실험을 수행하였다. 계통의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{m l^2 x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} + \frac{\cos x_1}{m_c + m} \end{aligned}$$

여기서 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 은 중력가속도, m_c 는 수레의 질량, m 은 막대의 질량, l 은 막대의 길이, 그리고 u 는 수레에 가해지는 힘으로서 제어입력이다. 모의실험에서 사용된 값들은 $m_c=1 \text{ kg}$, $m=0.1 \text{ kg}$, $l=0.5 \text{ m}$, $r=0.1$, $s_f(x) = s_g(x) = 1$ 이고 기준 입력은

$y_m(t) = \frac{\pi}{30} \sin(t)$ 로 설정하였다. 모의실험 결과가 그림 1에 도시되어 있다.

그림 1에서 제시한 제어가 2초동안의 과도기 이후에 출력을 $y_m(t)$ 로 잘 추종시킴을 알 수 있다.

3. 결 론

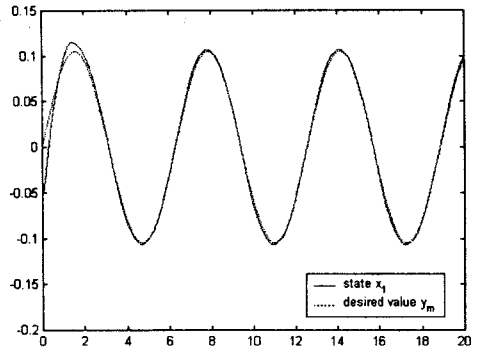


그림 1 상태변수 $x_1(t)$ 와 기준입력 $y_m(t)$

본 논문에서는 퍼지 시스템을 이용하여 제어를 설계하는데 있어서 발생하는 재구성 오차(reconstruction error)에 대해 강인한 제어를 설계하였다. 필요한 가정은 재구성 오차의 유계함수가 미지의 유계 파라미터(bounding parameter)와 기지의 비선형함수의 곱의 꼴로 나타내어진다는 것이며 이러한 가정하에서 제시한 방법은 상태변수에 대한 미지의 비선형 함수의 상하한값들에 대한 정보가 필요치 않다. 또한 제어 입력이 오차에 대해 smooth한 함수이므로 채터링 현상도 발생하지 않는다. 역진자 계통에 대한 모의실험으로 제시한 제어기의 성능을 보였다.

[참 고 문 헌]

- [1] L.-X. Wang, J. M. Mendel, "Fuzzy Basis Functions Universal Approximation, and Orthogonal Least-Squares Learning", IEEE Trans. Neural Network, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992.
- [2] Li-Xin Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Tracking," IEEE Trans. Systems, Man, Cybernetics-Part B, vol. 26, No. 5, pp. 677-691, October 1996.
- [3] C.-S. Chen, W.-L. Chen, "Robust model reference adaptive control of nonlinear systems using fuzzy systems," Int. J. Systems Science, vol. 27, no. 12, pp. 1435-1442, 1996
- [4] M. U. Polycarpou, M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators," Int. J. Control, vol. 70, no. 3, pp. 363-384, 1998
- [5] B. Yoo, W. Ham, "Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system," IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol. 6, no. 2, pp. 315-321, 1998