

새로운 슬라이딩 모드를 이용한 H_∞ 제어기의 설계 - 상태공간 접근방법

김민찬*, 박승규, 곽군평
 창원대학교 전기공학과

A Study on the H_∞ Controller of the Novel Sliding Mode - State Space Approach

Min-Chan Kim*, Seung-Kyu Park, Gun-Pyong Kwak
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

Abstract - In this paper, a novel sliding surface is proposed by introducing a virtual state. This sliding surface has nominal dynamics of an original system and makes it possible that the Sliding Mode Control(SMC) technique is combined with the H_∞ controller. Its design is based on the augmented system whose dynamics have one higher order than that of the original system. The reaching phase is removed by setting an initial virtual state which makes the initial switching function equal to zero.

1. 서론

제어계통의 강인성 특성향상에 적합한 H_∞ 제어이론은 일반적으로 계통의 파라미터가 정확하다는 가정하에서 전개되어 왔으며 상태공간 접근방식 H_∞ 제어에서는 외란과 그것의 출력에 대한 영향이 상태공간 행렬에 의해서 명확하게 표현되어 있으며 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 외란의 입출력 전달함수의 H_∞ -norm을 최소화하는 제어 이득을 결정하기 위한 리카치 방정식을 만족시키는 조건을 찾아내는 것이며 많은 결과들이 이 방법을 이용하여 발전해왔다.[1][2]

SMC(Sliding Mode Control)는 강인 제어 방법으로써 많은 좋은 결과들과 응용분야가 있지만 reaching phase 와 input chattering이 존재하며 SMC 시스템의 상태 궤적은 실제 시스템 보다 입력수 만큼 낮은 차수의 슬라이딩 모드 동특성에 의해서 결정되기 때문에 다른 제어기 설계방법들을 사용함에 있어서 연계성이 없다. 이러한 단점과 reaching phase를 극복하기 위해서 본 논문에서는 상태공간 H_∞ 제어기를 구성함에 있어서 파라미터의 불확실성이 존재하는 경우에 대해서도 그 특성을 유지할 수 있도록 하기 위하여 가상상태를 도입하여 슬라이딩 평면을 구성함으로써 슬라이딩 모드가 공칭 시스템의 동특성을 가지며 SMC와 결합이 가능한 제어기를 구성할 수 있다. 결과적으로 H_∞ 제어기는 SMC의 강인한 특성을 갖게 된다. 또한 초기의 가상 상태를 초기 스위칭 함수를 0으로 만들 수 있도록 선택하면 reaching phase도 제거된다.

2. 문제 설정

본 논문에서는 그림 1과 같은 불확실한 파라미터를 갖는 일반적인 two-port 블록도를 갖는 시스템을 고려한다.

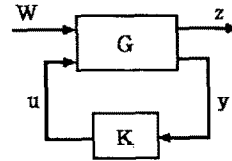


그림 1. two-port 블록도

상태공간 행렬 $\{A \ B \ C \ D\}$ 로 표현되는 시스템의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D \quad (1)$$

식(1)을 packed-matrix기호를 사용하면 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

만약 G를 다음과 같이 놓으면

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

z 와 w 사이의 페루프 전달함수의 linear fractional transformation(LFT) 표현인 $F(G, K)$ 는 다음식과 같다.

$$F(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (4)$$

또한 안정한 전달함수 행렬 $G(s)$ 의 H_∞ -norm을 다음과 같이 정의된다.

$$\|G\|_\infty = \sup_w \sigma |G(jw)| \quad (5)$$

다음과 같은 상태공간형태로 표현된 플랜트를 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + B_1w + (B_2 + \Delta B)u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 실제 플랜트가 packed-matrix 기호를 사용하면 다음식과 같이 표현된다고 가정한다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} (A + \Delta A) & B_1 & (B_2 + \Delta B) \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

본 논문에서는 시스템의 파라미터가 불확실하기 때문에 제어기 설계의 목적은 w와 z사이의 전달함수 $\|G\|_\infty$ 를 최소화하는 제어 입력의 이득 K를 찾는 것이다.

3. 공칭 시스템의 H_∞ 제어기의 설계

공칭 시스템 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

본 논문에서는 $\|G\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 K를 찾아내는 H_∞ sub-optimal 제어 문제를 다루며 이 문제를 풀기 위해서는 다음과 같은 두 리카치 방정식을 풀어야 한다.

$$A^*X + XA + X(r^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)X + C_1^*C_1 = 0 \quad (9)$$

$$AY + YA^* + Y(r^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2)Y + B_1B_1^* = 0 \quad (10)$$

결국 제어기의 이득 K는 다음과 같이 구해진다.

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_k & -ZL \\ F & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서,

$$A_k = A + r^{-2}B_1B_1^*X + B_2F + ZLC_2$$

$$Z = (I - r^{-2}XY)^{-1}$$

$$L = -YC_2^*$$

$$F = -B_2^*X$$

4. 새로운 슬라이딩 평면을 사용한 H_∞ 제어

식(6)에서 외란항을 제외한 시스템을 고려하면 다음과 같은 controllable canonical form으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= A_c p(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c p(t) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 - \Delta a_1 & -a_2 - \Delta a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_1 + \Delta \beta_1 \quad \beta_2 + \Delta \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n + \Delta \beta_n]$$

새로운 슬라이딩 평면을 구성하기 위해서 다음과 같은 실제 시스템에 대한 공칭 시스템을 고려한다.

$$\dot{p}_0(t) = \overline{A}_c p_0(t) + \overline{B}_c u_0(t) \quad (13)$$

여기서,

$$\overline{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

이고, $u_0(t)$ 는 H_∞ 제어 입력이다.

앞장에서 설명했듯이 공칭 시스템에 대한 H_∞ 제어기는 다음과 같이 표현된다.

$$u = K_0 y \quad (14)$$

위의 식에서 K는 다음과 같은 전달함수이다.

$$K_0 = F(SI - A_k)^{-1} B_k \quad (15)$$

여기서 $B_k = -ZL$ 이다.

식(15)를 controllable canonical form으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\dot{q}_0(t) = \overline{A}_0 q_0(t) + \overline{B}_0 u_0(t)$$

$$u_0(t) = \overline{C}_0 q_0(t) \quad (15)$$

여기서,

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_1 & -\overline{a}_2 & -\overline{a}_3 & \dots & -\overline{a}_n \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_0 = [\overline{\beta}_1 \quad \overline{\beta}_2 \quad \overline{\beta}_3 \quad \dots \quad \overline{\beta}_n]$$

그러므로 $u_0(t)$ 는 다음과 같다.

$$u_0(t) = \overline{\beta}_1 q_{01}(t) + \overline{\beta}_2 q_{02}(t) + \dots + \overline{\beta}_n q_{0n}(t) \quad (16)$$

또한 $\dot{u}_0(t)$ 는 다음식을 만족한다.

$$\dot{u}_0(t) = \overline{\beta}_1 \dot{q}_{02}(t) + \overline{\beta}_2 \dot{q}_{03}(t) + \dots + \overline{\beta}_n \dot{q}_{0n}(t) \quad (17)$$

여기서,

$$\dot{q}_{0n}(t) = -\overline{a}_1 q_{01}(t) - \overline{a}_2 q_{02}(t) - \dots - \overline{a}_n q_{0n}(t)$$

이므로 식(17)은 다음식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(t) &= -\overline{\beta}_n \overline{a}_1 q_{01}(t) + (\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_n \overline{a}_2) \dot{q}_{02}(t) + \dots \\ &+ (\overline{\beta}_n - \overline{\beta}_n \overline{a}_n) \dot{q}_{0n}(t) \end{aligned}$$

새로운 가상상태 p_{0n} 는 p_{0n} 의 미분이며 다음식과 같이 정의된다.

$$\dot{p}_{0n}(t) = -\overline{a}_n p_{0n}(t) - \dots - \overline{a}_2 p_{0n}(t) - \overline{a}_1 p_{0n}(t) + \dot{u}_0(t) \quad (18)$$

또한 가상상태 p_v 는 공칭상태 p_0 를 실제상태 p 로 대체함으로써 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\dot{p}_v(t) = -\overline{a}_n p_v(t) - \dots - \overline{a}_2 p_v(t) - \overline{a}_1 p_v(t) + \dot{u}_0(t) \quad (19)$$

따라서 가상상태를 포함하는 augmented system은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= A_c p(t) + B_c u(t) \\ \dot{p}_v(t) &= -\overline{a}_n p_v(t) - \dots - \overline{a}_2 p_v(t) - \overline{a}_1 p_v(t) + \dot{u}_0(t) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $u(t)$ 는 슬라이딩 모드를 보장하는 가변입력이다.

식(20)에서 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같이 정의된다.

$$s(p, p_v) = p_v(t) + \alpha_1 p_n(t) + \dots + \alpha_1 p_1(t) - u_0(t) = 0 \quad (21)$$

또한 reaching phase는 위의 식에서 $s=0$ 를 만족하는 가상상태의 초기값을 결정함으로써 쉽게 얻을 수가 있다.

$$p_v(t_0) = -\overline{a}_n p_n(t_0) - \dots - \overline{a}_1 p_1(t_0) + u_0(t_0) \quad (22)$$

지금까지의 내용으로 다음과 같은 정리들을 얻을 수 있다.

정리 1

새로운 슬라이딩 모드 평면 $s(p, p_v)$ 는 공칭 제어 입력에 의해서 제어되는 식(13)의 공칭 시스템과 같은 동특성을 갖는다.

정리 2

만약 SMC 입력 $u(t)$ 가 슬라이딩 평면 $s(p, p_v)$ 위에 시스템의 상태들이 가해지게 설계되면 상태들 $x(t)$ 는 $u_0(x, t)$ 에 의해서 제어되는 공칭 시스템의 궤적을 따라가게 된다.

4. 시뮬레이션

본 논문에서는 다음과 같은 2차의 동특성을 가지는 시스템을 고려한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 1],$$

$$C_2 = [1 \quad 0], \quad D_{11} = 0, \quad D_{12} = 1, \quad D_{21} = 1, \quad D_{22} = 0$$

$$\Delta A < 3, \quad \Delta B < 1 \quad (\text{시뮬레이션시 } \Delta A = 3, \Delta B = 1)$$

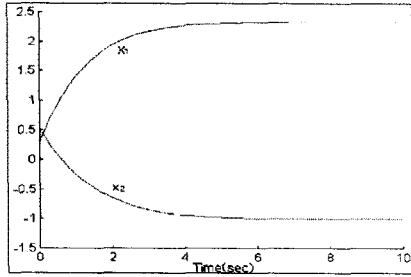


그림 2. 외란만 존재시의 H_∞ 제어기의 상태궤적 ($w=1$)

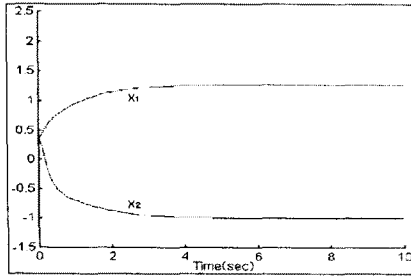


그림 3. 외란과 불확실성이 동시에 존재할 때 H_∞ 제어기의 상태궤적

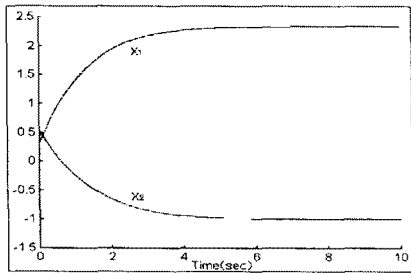


그림 4. 외란과 불확실성이 존재할 때 새로운 SMC에 의해 제어된 H_∞ 제어기의 상태궤적

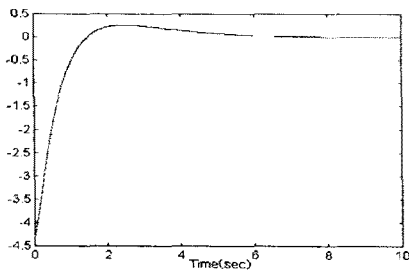


그림 5. 가상 상태 (p_v)의 궤적

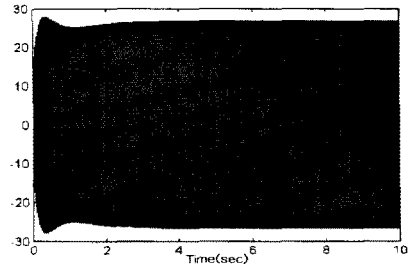


그림 6. SMC 입력

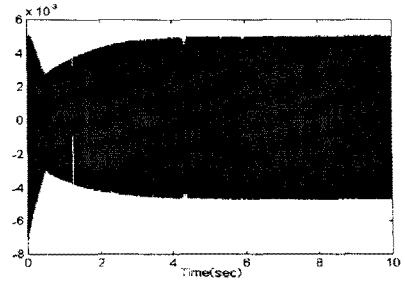


그림 7. SMC의 슬라이딩 평면

5. 결론

본 논문에서는 새로운 SMC를 제안함으로써 슬라이딩 평면이 H_∞ 제어기에 의해서 제어되므로 공칭 시스템의 동특성을 가질 수 있으며 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에도 강인하다는 것을 보였다. 또한 제시된 공칭 제어 입력은 어떠한 제어형태든지 사용할 수가 있으므로 SMC가 다른형태의 제어기와 결합하여 사용할 수 있다.

(참고 문헌)

- [1] D. S. Bernstein, W.M. Haddad, "LQG Control with an H_∞ Performance Bound : A Riccati Equation Approach," IEEE AC-34, pp.293-305, 1989
- [2] D. Mustafa, "Relation Between Maximum - entropy/ H_∞ Control and Combined H_∞ /LQG Control," Systems and Control Lett., 12, pp.193 - 203, 1989
- [3] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J.C. : 'Variable structure control : A survey,' IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1, pp.2-22, 1993
- [4] UTKIN, V. I. 'Sliding modes and their application in variable structure systems' (Moscow, Mir Publishers, 1978)
- [5] ITKIS, U.. 'Control systems of variable structure' (JOHNWILLY & SONS, New York, 1976)
- [6] ROY, R. G., OLGAC, N. 'Robust nonlinear control via moving sliding surfaces - n-th order Case', 1997 CDC, December 1997