1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

비선형 계통에 대한 새로운 이산치 슬라이딩 모드제어

박승규, 이재동*, 곽군평
창원대학교 전기공학과

Noble Discrete Sliding Mode Control for Discrete Nonlinear System

Seung Kyu Park, Jae Dong Lee, Gun Pyung Kwak
Dept. of Electrical Engineering, Changwon National University

Abstract - In this paper, the feedback linearization technique is used with the sliding *mode control for discrete nonlinear systems*.. This combination of the two control techniques is achieved by proposing a novel sliding surface which has the nominal dynamics of the original system controlled by feedback linearization technique. Its design is based on the augmented system whose dynamics have a higher order than that of the original system.. The reaching phase is removed by using an initial virtual state which makes the initial sliding function equal to zero.

1. 서 론

궤환 선형화 이론은 비선형 계통을 비선형 좌표변환과 비선형 피이드백을 이용하여 정확한 선형화를 가능케함으로써 이미 많은 연구가 되어 있는 선형제어이론을 그대로 도입하여 사용할 수 있다는 커다란 장점을 가지고 있다[1]. 그러나 대부분의 계통은 사실상 정확한 모델링이 불가능한 불확실성이 존재하는 비선형 계통이기 때문에 비선형 계통의 정확한 동특성을 알아야만 적용가능한 궤환선형화 기법을 실제 응용에 적용하는 데에는 많은 제약이 따른다. 슬라이딩 모드 제어 이론은 파라메터 불확실성이나 외란이 존재하는 경우에 강인한 특성을 가지는 제어이론으로 많은 연구가 이미 이루어져 있는 상태이며 실제로 많은 응용결과를 가지고 있는 이론이다[3]. 그러나 근본적으로 입력 떨림현상과 슬라이딩 평면으로의 도달기간이 존재한다는 단점을 가지고 있으며 슬라이딩 평면이 제어대상 계통보다 차수가 하나 작은 동특성을 가지기 때문에 다른 제어기법과 같이 결합하여 사용하기가 매우 어렵다는 특성을 가지고 있다. 이에 본 연구에서는 매개변수 불확실성이나 외란이 존재하는 이산치 비선형 계통에 대해서 궤환 선형화 기법과 슬라이딩 모드 제어이론을 함께 이용하여 새롭게 구성된 슬라이딩 평면이 제어대상계통의 동특성을 가질 수 있게 되었고 궤환 선형화 이론에 의해 제어된 계통의 동특성을 가질 수 있게되었다. 또한 가상의 상태를 도입하는 과정에서 초기의 가상의 상태값을 초기 슬라이딩 함수의 값이 영이 되도록 함으로써 도달기간을 제거할 수 있게 되었다.

2. 문제 설정

이산치 계통의 비선형 계통에서 다음과 같은 n차 이산 비선형시스템에 대해서 선형화 이론이 전개되어 있다.

$$\boldsymbol{x}(k+1)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

여기서 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$, $u\in \boldsymbol{R}$, $f\in \boldsymbol{R}^r$

그러나 SMC이론은 다음과 같은 형태로 표현되는 계통에 적용될 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1)=f(x(k))+\Delta f(x)+[g(x) \\ +\Delta g(x)]u+v(x) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\Delta f, \Delta g, v$ 는 다음과 같은 정합조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= g(x)\,\hat{f}(x) \\ \Delta g(x) &= g(x)\,\hat{g}(x) \\ v(x) &= g(x)\,\hat{v}(x) \end{aligned} \tag{3}$$

이 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{x}(k+1)=f(x(k))+g(x)(u(k)+h(k)) \tag{4}$$

여기서

$$h(k)=\Delta\hat{f}(x(k))+\Delta\,\hat{g}u(k)+D\,\hat{v}(k) \tag{5}$$

2.1 궤환 선형화 이론

궤환 선형화 이론은 불확실성이 존재하지 않는 공칭계통에 대해서만 적용시킬 수 있다.
계통 (1)이 비선형 상태변환에 의해서 선형화될 필요충분조건은 다음과 같다[5].

(i) $(\Psi_0)_*|_{u=0}$ is an isomorphism

(ii) $[\frac{\partial}{\partial u_i}, \ker(F_0)_*] \subset Ker(F_o)_* + span\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\right\}$

for $1 \le i \le N-1$

위의 조건을 만족시킬 때 다음과 같이 선형화될 수 있다.

$$z_0(k+1)=Az_0(k)+bv_0(k) \tag{6}$$

여기서 $A=\begin{bmatrix} a_N & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{N-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

v는 새로운 좌표계에서의 제어입력이다.

새로운 좌표계에서 전체계통을 안정화시키기 위해서는 식(7)와 같은 상태궤환입력을 인가한다.

$$v = Kz \tag{7}$$

여기서 K는 상태궤환 이득이다.

2.2 SMC 이론과 문제점 고찰

식(4)의 이산치 계통에 대한 슬라이딩 평면은 일반적으로 다음과 같다.

$$\sigma(k) = \{x|\sigma(k) = Sx(k) = 0\} \tag{8}$$

여기서 $S = [c_n\ c_{n-1}\ \cdots\ c_2\ c_1]$이며 슬라이딩 평면이 안정하도록 선택한다.

슬라이딩 모드가 일어나는 조건은 이산시간 Lyapunov 안정도 이론에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &V(k) = \sigma^2(k) > 0 \\ &V(k+1) - V(k) = \sigma^2(k+1) - \sigma^2(k) < 0 \end{aligned} \tag{9}$$

식(8)을 만족하는 슬라이딩 평면에 상태들이 머물도록 하는 등가제어입력은 다음과 같다

$$u_{eq}(k) = -(SB)^{-1}S(A-I)x(k) \tag{10}$$

여기서, $(SB)^{-1}$은 정칙행렬이다.

그리고 비선형 제어입력은 아래와 같다.

$$u_n(k) = [\alpha(k) + \beta(k)]sgn(\sigma(k)) \tag{11}$$

위 식의 $\beta(k)$와 $\alpha(k)$는 다음과 같이 정의되어 진다.

$$\beta(k) \ge H_{\max},\quad \alpha(k) \le \eta \frac{\|\sigma(k)\|}{\|SB\|} \tag{12}$$

여기서, $H_{\max} \ge |h(x,k)|$, $0 < \eta < 2$

따라서 DSMC 입력은 다음과 같이 구성된다.

$$u_{dsmc}(k) = u_{eq}(k) + u_n(k) \tag{13}$$

식(8)과 같은 형태의 슬라이딩 평면은 (n-1)차의 동특성을 가지며 제어계통의 차수보다 낮은 차수를 가지기 때문에 여러 가지 형태의 제어기에 의해 제어되는 계통의 동특성을 가질 수 없으며 이것은 DSMC이 다른 제어기법과 결합되어 사용될 수 없다는 것을 의미한다.

본논문에서의 해결해야할 문제는 다음과 같다.

불확실한 이산치 비선형계통을 DSMC를 이용하여 궤환 선형화 이론을 적용한 공칭계통의 제어특성과 같도록 한다. 즉 불확실한 이산치 비선형계통(2)에 대하여 DSMC를 이용하여 나타난 제어성능과 궤환선형화를 이용하여 나타난 제어성능과 같도록 한다.

3. 새로운 슬라이딩 평면의 구성과 SMC

2절에서 지적한 문제를 해결하기 위해서 본논문에서는 새로운 슬라이딩 평면을 정의하기로 한다.

우선 불확실성이 존재하지 않는 공칭계통에 대해서 생각해 본다.

$$x_o(k+1) = f(x_o(k)) + g(x_o)u \tag{14}$$

시스템의 모든 상태를 포함하는 새로운 가상의 상태를 정의하기 위하여 식(14)과 같은 공칭계통을 다음과 같이 가제어 표준형으로 변환한다.

$$z_o(k+1) = A_c z_o(k) + B_c u_o(x_o, k) \tag{15}$$

여기서

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

위의 모델로부터 가상상태는 $z_{0v}(k) = z_{0n}(k+1)$로 정의하며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} z_{ov}(k+1) &= -\alpha_n z_{02}(k) - \alpha_{(n-1)} z_{03}(k) - \cdots \\ &\quad - \alpha_1[-\alpha_n z_{01}(k) - \alpha_{(n-1)} z_{02}(k) - \cdots \\ &\quad - \alpha_1 z_{0n}(k) + u_0(x_0, k)] + u_0(x_0, k+1) \\ &= -\alpha_n z_{02}(k) - \alpha_{(n-1)} z_{03}(k) - \cdots \\ &\quad - \alpha_1 z_{ov}(k) + u_z(x_0, k+1) \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 $u_z(x_0(k), k) = u_0(x_0(k+1), k+1)$

새로운 가상상태 $z_v(k)$는 식(17)에서 공칭상태들을 비공칭 상태들로 대치함으로써 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} z_v(k+1) &= -\alpha_1 z_v(k) - \cdots \\ &\quad - \alpha_{(n-1)} z_3(k) - \alpha_n z_2(k) + u_z(x(k), k) \end{aligned} \tag{17}$$

가상상태를 포함하는 차수가 증가된 이산 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) + \Delta f(x) + [g(x) \\ &\quad + \Delta g(x)]u + v(x) \\ z_v(k+1) &= -\alpha_1 z_v(k) - \cdots - \alpha_{(n-1)} z_3(k) \\ &\quad - \alpha_n z_2(k) + u_0(x, k+1) \end{aligned} \tag{18}$$

차수가 증가된 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면을 다음과 같이 결정한다

$$\begin{aligned} \sigma_n(k) = \{z, z_v, u_0 | z_v(k) + \alpha_n z_1(k) + \alpha_{(n-1)} z_2(k) \\ + \cdots + \alpha_1 z_n(k) - u_0(x, k) = 0\} \end{aligned} \tag{19}$$

가상 상태의 초기치를 다음과 같이 선택하면 $\sigma_n(k)$의 초기치가 영이 되므로 도달기간이 제거된다.

$$\begin{aligned} z_v(k_0) &= -\alpha_n z_1(k) - \alpha_{(n-1)} z_2(k) \\ &\quad - \cdots - \alpha_1 z_n(k) + u_0(x(k_0), k_0) \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리1. 계통(18)의 상태가 제안된 슬라이딩 평면 식(19) 위에 존재할 때 계통(2)의 상태는 공칭제어입력에 의해서 제어되는 공칭계통(14)과 같은 동특성을 갖는다.

증명) 참고문헌[6]의 과정과 같다.

정리1과 DSMC이론으로부터 DSMC 입력 $u_{dsmc}(k)$가 새로운 슬라이딩 모드 평면 $\sigma_n(k)$상에 상태들이 있도록 하면 상태 $x(k)$는 $u_0(x,k)$에 의해서 제어되는 공칭 시스템의 궤적을 따른다는 것을 알 수 있다. 공칭 제어입력 $u_0(x,k)$는 어떠한 제어 입력의 형태라도 가능하기 때문에 DSMC이 다양한 제어기와 같이 사용되어질 수 있도록 한다.

4. 수치예

공칭 제어입력을 상태피이드백 $u(x,k)$로 선정하고 제안된 제어기를 설계하면 파라메터 불확실성이 존재하더라도 공칭계통의 상태들과 같은 궤적을 따르도록 하는 강인한 상태궤환제어기를 설계할 수 있다.

다음과 같은 2차 이산치계통을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ (1+x_1(k))(u(k)+h(k)) \end{bmatrix}$$

위의 계통은 선형화 가능조건을 만족시키며 선형화 입력 $u(k)=\frac{1}{1+x_2(k)}v(k)$에 의해서 선형화된 공칭계통은 다음과 같다.

$$z(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(k)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k)$$

공칭제어기로 상태피이드백제어를 선택하면

$$v(k)=Kz(k)$$

가상의 상태는 다음과 같다.

$$z_v(k+1)=[0K]z_p$$

여기서 $z_p=[z\ z_v]'$

슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$s(k)=z_v(k)-Kz(k)=0$$

$s(k+1)$은 다음과 같이 계산된다.

$$s(k+1)=[0\ K]z_p-K(f(x)+g(x)(u(k)+h(k))$$

그러므로 조건 (9)를 만족시키기 위한 슬라이딩모드 제어입력은 다음과 같다.

$$u_{smc}=u_{eq}+u_n$$

여기서

$$u_{eq}=[Kg(x)]^{-1}(-Kf(x)+[0\ k_1]z+k_2 z_v)$$

$$u_n(k)=\left[\eta\frac{\|\sigma(k)\|}{\|(\Sigma a+K_p)B_p\|}+\beta(k)\right]sgn(\sigma(k))$$

여기서, $\alpha(k)\le\eta\frac{\|\sigma(k)\|}{\|(\Sigma a+K_p)B_p\|}$, $0<\eta<2$, $\beta(k)\ge H_{\max}$, $H_{\max}\ge|h(x,k)|$이다.

5. 결 론

본 논문에서는 불확실성을 갖는 이산치 비선형 계통에 대해서 궤환 선형화 이론을 적용시키기 위해서 슬라이딩 모드 제어기법을 도입하였다. 본논문의 결과는 비선형 계통의 슬라이딩 모드제어에 궤환선형화 이론을 접목시켰다는 의미로도 생각할 수 있으며 불확실성이 존재하는 이산치 비선형 계통이 본논문에서 제안된 이론을 적용하면 궤환 선형화 이론이 적용된 공칭계통과 같은 동특성을 갖게된다

[참 고 문 헌]

[1] J.E. Slotine, W Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall,New Jersey, 1991

[2] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control : A survey," IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1 pp.2-22, 1993

[3] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHNWILLY & SONS, New York, 1976

[4] R.G. Roy, N. Olgac, "Robust nonlinear control via moving sliding surfaces- n-th order case," CDC'97, December 1997

[5]H.G.Lee, A.Arapostathis,S.I.Marcus,"Linearization of discrete-time systems",Int. J. of Control, vol.45, No.5,pp1803-1822,1987

[6] 박승규,안호균,이재동,"새로운 이산치 최적슬라이딩 모드제어기의 설계",1999 대한전기학회 하계학술회의