

다중입력 이산치계통에 대한 새로운 슬라이딩 모드 제어기의 설계

박승규, 진미정\*, 안호균  
 창원대학교 전기공학과

The Novel Sliding Mode Controller for Discrete-time System with Multi-Input

SEUNG KYU PARK, MI JUNG JIN\*, HO KYUN AHN  
 Department of Electrical Engineering, Changwon National University

**Abstract** - In this paper, new sliding mode surfaces are proposed by defining novel virtual states. These sliding surfaces have nominal dynamics of an original system and makes it possible that the Sliding Mode Control(SMC) technique is used with the various types of controllers. Its design is based on the augmented system whose dynamics have m-th higher order than those of the original system where m is the number of inputs. The reaching phase is removed by setting the initial virtual states which makes the initial switching functions equal to zero.

1. 서 론

슬라이딩모드제어(Sliding mode control:SMC)는 파라미터 변동이나 모델링의 오차에 둔감한 강인제어기법으로서 이제까지 많은 연구결과와 실제 적용 예를 가지고 있지만 근본적으로 도달기간(Reaching Phase)문제와 입력떨림(Input Chattering)현상을 가지고 있다. 이러한 문제점 외에도 SMC계통의 상태제어 제어되는 계통보다 낮은 (n-m)차 슬라이딩 평면의 동특성에 의해서 결정되기 때문에 SMC 외의 다른 제어기법과 함께 결합되어 사용되어질 수 없는 특성을 가지고 있다. 이러한 특성을 개선하고 도달기간 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 새로운 가상상태를 정의한다. 이 가상상태는 다른 제어기법에 의해 제어되는 공칭계통의 제어표준형을 기초로 구성된다. 얻어진 가상상태를 비공칭계통에 포함시켜 차수가 증가된 계통을 구성하고 이 확장된 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면을 제안한다. 이렇게 해서 구성된 새로운 슬라이딩 평면은 공칭제어기에 의해서 제어되는 공칭계통의 동특성과 같은 동특성을 가짐을 증명할 수 있다. 따라서 다양한 형태의 제어기와 SMC가 결합된 제어기의 구성이 가능해지도록 한다. 그리고 가상상태의 초기치를 슬라이딩 평면의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 줌으로써 도달기간도 제거할 수 있다. 본 논문에서는 다중입력의 이산치계통에 대하여 최적제어기와 SMC가 결합된 형태의 제어기를 구성함으로써 강인한 최적제어기를 설계하고자 한다.

2. 문제 설정

다음과 같은 불확실성을 포함하는 다중입력의 n차 이산치계통을 고려한다.

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + Df(k) \quad (1)$$

여기서  $x \in R^n$ 는 상태,  $u \in R^m$ 는 입력,  $f \in R^r$ 은 외란이고 노름유계(Norm Bounded)를 가지는 불확실한 행렬  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ 와 외란행렬  $D$ 는 다음의 정합조건을 만족한다.

$$rank([B : \Delta A : \Delta B : D]) = rank B \quad (2)$$

위의 조건에 의하여 불확실성과 외란행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta A x(k) &= B \Delta A_1 x(k) \\ \Delta B u(k) &= B \Delta B_1 u(k) \\ D f(k) &= B D_1 f(k) \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 식(1)의 이산치계통은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(k+1) = Ax(k) + B(u(k) + h(x, k)) \quad (4)$$

여기서  $h(x, k) = \Delta A_1 x(k) + \Delta B_1 u(k) + D_1 f(k)$ 이다. 식(4)의 이산치계통에 대한 m개의 슬라이딩 평면은 일반적으로 다음과 같이 정의 된다

$$S_i(k) = \{ x \mid S_i(k) = \Sigma_i^T x(k) = 0 \} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

여기서  $\Sigma_i = [c_{i1} \dots c_{im}]$ 의  $c_{i1} \dots c_{im}$ 은 슬라이딩모드의 동특성이 안정하도록 선택되어진다.

모든 슬라이딩 평면  $S_i(k)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )의 교선은 아래와 같은 (n-m)차원의 한 개의 슬라이딩 평면  $S_e$ 로 된다.  $S_e$ 는 모든 슬라이딩 평면이 최종적으로 도달하지 않으면 안되는 최종슬라이딩평면이라 불린다.

$$S_e = \{ x \mid S = \Sigma x = 0 \} = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m \quad (6)$$

슬라이딩 모드가 일어나는 조건은 이산시간 Lyapunov 안정도 이론에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v(k) &= S^2(k) > 0 \\ S^2(k+1) - S^2(k) &< 0 \end{aligned} \quad (7)$$

공칭계통에서 식(7)의 조건을 만족시키는 등가제어입력  $u_{eq}(k)$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u_{eq}(k) = -(\Sigma B)^{-1} \Sigma (A - I)x(k) \quad (8)$$

여기서 행렬  $\Sigma B$ 는 정칙행렬이다. 그리고 비선형제어입력은 다음과 같이 구성된다.

$$u_n(k) = (\alpha(k) + \beta(k)) \operatorname{sgn}(\Sigma x(k)) \quad (9)$$

위의  $\beta(k)$ 와 양의 스칼라값함수인  $\alpha(k)$ 는 다음과 같이 결정되어진다.

$$\alpha(k) \leq \eta \frac{\|\Sigma x(k)\|}{\|\Sigma B\|}, \quad \beta(k) \geq H_{\max} \quad (10)$$

여기서  $H_{\max} \geq |h(k)|, 0 < \eta < 2$ .

따라서 SMC입력  $u(k)$ 는 다음과 같이 구성된다.

$$u(k) = u_{eq}(k) + u_n(k) \quad (11)$$

앞에서 언급했듯이 식(6)과 같은 형태의 슬라이딩 평면은 제어계통의 차수보다 낮은 차수인  $(n-m)$ 차의 동특성을 가지기 때문에 여러 가지 형태의 제어기에 의해 제어되는 계통의 동특성을 가질 수 없으며 이것은 SMC가 다른 제어기법과 결합하여 사용될 수 없다는 것을 의미한다. 그리고 도달기간은  $S_i(k)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )의 초기치가 영이 아닌 경우에 발생한다.

본 논문에서 해결하고자 하는 문제는 다음과 같다.

- 가상상태를 도입하여 이산치계통에 포함시켜 차수가 증가된 비공칭계통을 기초로 해서 구성되며, 가상상태는 공칭계통의 가제어표준형으로부터 정의된다.
- 가상상태의 초기치를 슬라이딩 함수의 초기값이 영이 되도록 설정해 줌으로써 도달기간을 제거하고자 한다.

### 3. 새로운 슬라이딩 평면 설계

새로운 슬라이딩 평면은 가상상태를 포함하는 차수가 증가된 비공칭계통을 기초로 해서 구성되며, 가상상태는 공칭계통의 가제어표준형으로부터 정의된다.

식(1)의 이산치계통에 상태변환  $z = Px$  하면 다음의 가제어표준형으로 바꿀 수 있다.

$$z(k+1) = A_c z(k) + B_c u(k) + B_c h(k) \quad (12)$$

여기서

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{1(n-1)} & -\alpha_{1n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{2(n-1)} & -\alpha_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{m(n-1)} & -\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

식(12)의 공칭계통은 다음과 같다.

$$z_o(k+1) = A_c z_o(k) + B_c u_o(z_o, k) \quad (13)$$

본 논문에서 제시하고 있는 가상상태  $z_{ov}(k) = \begin{bmatrix} z_{ov1}(k) \\ z_{ov2}(k) \\ \vdots \\ z_{ovm}(k) \end{bmatrix}$

를  $\begin{bmatrix} z_{ov1}(k+1) \\ z_{ov2}(k+1) \\ \vdots \\ z_{ovm}(k+1) \end{bmatrix}$  라고 정의하면 이 공칭가상상태의 동특성은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z_{ov}(k+1) = [A_3 P \quad A_4] \begin{bmatrix} x_o(k) \\ z_{ov}(k) \end{bmatrix} + u_o(x_o, k+1) \quad (14)$$

여기서

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{11} & \dots & -\alpha_{1(\mu_1-1)} & 0 & -\alpha_{1(\mu_1+1)} & \dots & -\alpha_{1(n-1)} \\ 0 & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{2(\mu_2-1)} & 0 & -\alpha_{2(\mu_2+1)} & \dots & -\alpha_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{i1} & \dots & -\alpha_{i(\mu_i-1)} & 0 & -\alpha_{i(\mu_i+1)} & \dots & -\alpha_{i(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_{m1} & \dots & -\alpha_{m(\mu_m-1)} & 0 & -\alpha_{m(\mu_m+1)} & \dots & -\alpha_{m(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\alpha_{1\mu_1} & -\alpha_{1\mu_2} & \dots & -\alpha_{1\mu_{m-1}} & -\alpha_{1\mu_m} \\ -\alpha_{2\mu_1} & -\alpha_{2\mu_2} & \dots & -\alpha_{2\mu_{m-1}} & -\alpha_{2\mu_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{i\mu_1} & -\alpha_{i\mu_2} & \dots & -\alpha_{i\mu_{m-1}} & -\alpha_{i\mu_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{m\mu_1} & -\alpha_{m\mu_2} & \dots & -\alpha_{m\mu_{m-1}} & -\alpha_{m\mu_m} \end{bmatrix}$$

위의 식(14)에서 공칭상태  $z_o(k)$ 를 실제상태인  $z(k)$ 로 대치함으로써 다음과 같은 새로운 비공칭가상상태  $z_v(k)$ 의 동특성을 정의한다.

$$z_v(k+1) = [A_3 P \quad A_4] \begin{bmatrix} x(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix} + u_o(x, k+1) \quad (15)$$

이렇게 해서 얻어진 새로운 가상상태를 포함하는 확장된 이산치계통은 다음과 같이 구성된다.

$$x_e(k+1) = (A_e + \Delta A_e) x_e(k) + (B_e + \Delta B_e) u(k) + B_d u_o(x, k+1) + D_e f(k) \quad (16)$$

여기서

$$x_e(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_e = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_e = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_e = \begin{bmatrix} \Delta B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

위의 확장된 이산치계통에 대한  $m$ 개의 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같이 결정된다.

$$S(k) = [\Sigma_1 P \quad I] \begin{bmatrix} x(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix} - u_o(x, k) = \Sigma x_e - u_o(x, k) \quad (17)$$

$$\text{여기서 } \Sigma_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2(n-1)} & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m(n-1)} & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

가상상태의 초기치를 다음과 같이 선택하면  $S$ 의 초기치가 영이 되어 도달기간을 완전히 제거할 수 있다.

$$z_v(k_0) = -\Sigma_1^{-1} x(k_0) + u_o(x(k_0), k_0) \quad (18)$$

여기서 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 1. 식(17)의 새로운 슬라이딩 평면에 식(16)의 상태들이 놓여있다면 식(1)의 상태들은 식(1)에 대한 공칭계통의 동특성을 갖는다.

증명) 슬라이딩 평면의 동특성이 공칭계통의 동특성으로 바뀌어질 수 있음을 보여 증명하고자 한다.

먼저 상태  $z, z_v$ 들이 슬라이딩 평면 위에 존재한다고 가정하면 다음의 방정식은 만족한다.

$$z_{vi}(k) + \alpha_{in} z_n(k) + \alpha_{i(n-1)} z_{(n-1)}(k) + \dots + \alpha_{i1} z_1(k) - u_{oi}(x, k) = 0 \quad (i=1, \dots, m \text{ 에 대하여}) \quad (19)$$

식(19)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$z_{vi}(k+1) + \alpha_{in} z_n(k+1) + \alpha_{i(n-1)} z_{(n-1)}(k+1) + \dots + \alpha_{i1} z_1(k+1) - u_{oi}(x, k+1) = 0 \quad (20)$$

상태들을 다음과 같이 정의한다.

$$z_2(k) = z_1(k+1), \dots, z_{\mu_i}(k) = z_{(\mu_i-1)}(k+1)$$

$$z_{(\mu_i+2)}(k) = z_{(\mu_i+1)}(k+1), \dots, z_{\mu_i}(k) = z_{(\mu_i-1)}(k+1) \quad (21)$$

$$\vdots$$

$$z_{(\mu_{m-1}+2)}(k) = z_{(\mu_{m-1}+1)}(k+1), \dots, z_n(k) = z_{(n-1)}(k+1)$$

그러면 식(20)로부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$z_{in}(k+1) + \alpha_{in} z_n(k+1) + \alpha_{i(n-1)} z_n(k) + \dots \quad (22)$$

$$+ \alpha_{in} z_2(k) - u_{oi}(x, k+1) = 0$$

식(15)에 의해서  $z_v$ 는 다음과 같은 동특성을 가진다.

$$z_{in}(k+1) = -\alpha_{in} z_2(k) - \dots - \alpha_{i(\mu_i-1)} z_{\mu_i}(k) - \alpha_{i\mu_i} z_{oi}(k) \quad (23)$$

$$\dots - \alpha_{i(\mu_i-1)} z_{\mu_i}(k) - \alpha_{i\mu_i} z_{oi}(k) - \dots - \alpha_{in} z_{om}(k)$$

$$- \dots - \alpha_{i(n-1)} z_n(k) + u_{oi}(x, k+1)$$

식(22)과 식(23)을 비교하면 다음 식이 성립됨을 알 수 있다.

$$z_{oi}(k) = z_{\mu_i}(k+1) \quad (24)$$

위 식을 이용하여 식(19)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$z_{\mu_i}(k+1) = -\alpha_{in} z_n(k) - \alpha_{i(n-1)} z_{(n-1)}(k) - \dots - \alpha_{in} z_1(k) \quad (25)$$

$$+ u_{oi}(x, k)$$

식(21)과 식(25)은 공칭제통의 가제어표준형이며 이것은 변환  $x(k) = P^{-1} z(k)$ 을 이용하여 식(15)의 이산치 제통으로 변환할 수 있다. 그러므로 새로운 슬라이딩평면  $S(k)$ 는 공칭제통과 같은 동특성을 갖는다.

정리1과 SMC이론으로부터 SMC입력  $u(k)$ 가 슬라이딩 평면  $S(k)$ 상에 상태들이 놓여있도록 한다면 상태  $x(k)$ 는  $u_o(x, k)$ 에 의해서 제어되는 공칭제통의 궤적을 따른다는 것을 알 수 있다. 그리고 공칭제어입력  $u_o(x, k)$ 는 어떠한 제어입력의 형태라도 가능하기 때문에 SMC가 다양한 형태의 제어기와 같이 사용되어질 수 있도록 한다.

#### 4. 새로운 슬라이딩 평면을 이용한 강인한 최적제어기 설계

본 논문에서 제안된 새로운 슬라이딩 평면에서 공칭제어입력  $u_o(x, k)$ 를 최적제어입력으로 설계하면 파라미터 불확실성이 존재하더라도 상태들이 최적궤적을 따르도록 하는 강인한 최적제어기를 설계할 수 있다.

식(1)의 이산치제통을 고려하자. 공칭제통에 대한 평가함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x_o(k)^T Q x_o(k) + u_o(k)^T R u_o(k)) \quad (26)$$

공칭제통에 대한 최적제어입력은 다음과 같다.

$$u_o(x, k) = -Kx(k) = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P A x(k) \quad (27)$$

여기서  $P$ 는 다음의 Riccati Equation을 만족하는 해이다.

$$A^T P A - P + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0 \quad (28)$$

최적제어입력  $u_o(x, k)$ 를 차분한 결과는 다음과 같고, 이 계산과정에서는 불확실성이 고려되지 않는다.

$$u_o(x, k+1) = -K(Ax(k) + Bu_o(x, k)) \quad (29)$$

$$= -K(Ax(k) - BKx(k)) = Lx(k)$$

여기서  $L = -K(A - BK)$ .

식(15)에 의해서 가상상태  $z_v$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$z_v(k+1) = [A_3 P A_d] \begin{bmatrix} x(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix} + Lx(k) \quad (30)$$

확장된 제통은 다음과 같이 구성된다.

$$x_e(k+1) = (A_e + \Delta A_e) x_e(k) + (B_e + \Delta B_e) u(k) \quad (31)$$

$$+ B_d Lx(k) + D_e f(k)$$

식(31)의 이산치제통에 대한 본 논문에서 제안하는 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같이 구성된다.

$$S(k) = \Sigma x_e(k) - Kx(k) = (\Sigma - K_e) x_e(k) \quad (32)$$

여기서  $K_e = [K \ 0]$ 이다.

SMC입력  $u(k)$ 는 다음과 같다.

$$u(k) = u_{eq}(k) + u_n(k) \quad (33)$$

위의 식(33)에서 등가제어입력  $u_{eq}(k)$ 와 비선형제어입력  $u_{nl}(k)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$u_{eq}(k) = -[(\Sigma - K_e) B_e]^{-1} (\Sigma - K_e)(A_e - I) x_e(k)$$

$$u_{nl}(k) = [\alpha(k) + \beta(k)] \operatorname{sgn}[S(k)]$$

여기서  $\beta(k) \geq H_{\max}$ ,  $H_{\max} \geq |h(k)|$ ,

$$\alpha(k) \leq \eta \frac{\|S(k)\|}{\|(\Sigma - K_e) B_e\|}, \quad 0 < \eta < 2.$$

#### 5. 결 론

본 논문에서는 불확실성을 포함하는 이산치제통에 대한 슬라이딩 평면의 새로운 설계방법이 제시되었다. 이 슬라이딩 평면에 의해 설계되는 새로운 SMC제통의 상태는 공칭제어기에 의해 제어되는 공칭제통의 동특성을 가지게 된다. 어떤 형태의 제어기라도 공칭제어기가 될 수 있으며 이 사실은 SMC가 여러 가지 형태의 제어기와 결합되어 강인한 특성을 갖도록 할 수 있다는 것을 의미한다. 본 논문에서는 다중입력을 갖는 이산치제통에 대해서 최적제어기를 공칭제어기로 사용함으로써 파라미터 불확실성이 존재하는 계통에 대해서도 상태들이 공칭제통의 최적궤적을 따라갈 수 있도록 하는 강인한 최적제어기를 설계하였으며, 가상상태의 초기치를 슬라이딩 평면의 초기값이 영이 되도록 선택함으로써 도달시간을 쉽게 제거할 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

- [1] HUNG, J.Y., GAO, W., HUNG, J.C.: 'Variable structure control: A survey,' IEEE Trans. on Industrial Electronics, 1993, 40(1), pp. 2-22
- [2] UTKIN, V.I.: 'Sliding modes and their application in variable structure systems'(Mir Publishers, Moscow, 1978)
- [3] ITKIS, U.: 'Control systems of variable structure'(JOHNWILLY & SONS, New York, 1976)
- [4] ROY, R.G., OLGAC, N.: 'Robust nonlinear control via moving sliding surfaces - n-th order Case', CDC'97, December 1997
- [4] Tsang-Li Tai: 'A Chattering-Alleviated Approach for Discrete Sliding Mode Controller Design', ICARCV'98, December 1997, pp.1440-1445
- [5] R.A. Decarlo, S.H. Zak, G.P. Matthews, : 'Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems:A Tutorial': Proc. IEEE, vol.76, no.3, pp.212-232, 1988.