1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

이산치 계통에 대한 새로운 슬라이딩 모드 제어

박승규, 안호균, 김경식*
창원대학교 전기공학과

Novel Discrete-Time Sliding Mode Control

Park Seung-Kyu, An Ho-Gyun, Kim Kyung-Sik*
Dept. of Electrical Engineering, Chang-Won Nat'l Univ.

Abstract - In this paper, a novel sliding surface is proposed by defining a novel virtual state. This sliding surface has nominal dynamics of an original system and makes it possible that the Discrete-Time Sliding Mode Control(DSMC) technique is used with the various types of controllers. Its design is based on the augmented system whose dynamics have a higher order than that of the original system. The reaching phase is removed by using an initial virtual state which makes the initial sliding function equal to zero.

1. 서 론

연속치 계통에서의 슬라이딩 모드 제어(Sliding Mode Control) 이론으로부터 어떤 계통이 정합조건을 만족하는 경우 , 계통이 갖고 있는 파라미터 변동이나 외란에 대한 정확한 정보를 모른다 해도 그들의 한계치만 가지고 구성한 제어기를 사용하여, 파라미터 변동이나 외란에 둔감한 성질을 갖는 슬라이딩 모드를 얻을 수 있다. 하지만 근본적으로 도달기간(reaching phase)문제와 입력 떨림(chattering)현상을 가지고 있다[1][2][3]. 이러한 문제들 외에 DSMC(Discrete Sliding Mode Control)계통의 상태 궤적은 제어되는 계통보다 낮은 차수를 가지는 슬라이딩 평면의 동특성에 의해서 결정되기 때문에 DSMC외의 다른 제어기법과 함께 결합되어 사용되어질 수 없는 특성을 가지고 있다. 이에 도달기간문제를 없애고 슬라이딩 궤적이 최적제어 궤적을 따르도록 하는 방법이 제안되었으나[4] 슬라이딩평면을 비선형함수로 나타내야하기 때문에 수식전개가 복잡하며 3차이상의 계통에 대해서 그 결과를 확장하는 것이 어렵다. 이에 본 연구에서는 연속치 계통에서 얻을 수 있었던 특성인 슬라이딩 모드를 이산치 계통에서도 얻을 수 있는지 살펴 볼 것이며 상태궤적이 임의의 제어기로 제어되는 상태특성을 따르도록 함과 동시에 도달기간 문제를 해결하기 위하여 새로운 가상의 상태를 정의한다. 가상의 상태는 다른 제어기법에 의해 제어되는 공칭계통의 가제어 표준형을 기초로 구성되며 가상상태가 더해진 차수가 증가된 시스템을 구성하고 그 계통에 대해서 새로운 슬라이딩 평면을 제안한다. 이렇게 구성된 새로운 슬라이딩 평면은 공칭제어기에 의해서 제어되는 공칭계통의 동특성을 가질 수 있다는 것이 증명되며 다양한 형태의 제어기와 DSMC가 결합된 제어기의 구성이 가능해 지도록 한다. 또한 가상 상태의 초기치를 스위칭함수의 초기값이 영으로 되도록 결정하여 줌으로써 도달기간도 제거할 수 있다. 본 논문에서는 최적제어기와 DSMC가 결합된 형태의 제어기를 구성함으로써 강인한 이산치 최적제어기를 설계하기로 한다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

다음과 같은 n차 이산 시스템을 고려하기로 한다.

$$x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k)+Df(k) \quad (1)$$

여기서 $x\in R^n,\ u\in R,\ f\in R^r$ 이고 노옴 유계를 가지는 불확실한 행렬 $\Delta A, \Delta B$와 외란 행렬 D 는 다음의 정합조건을 만족한다

$$rank([B\colon \Delta A\colon \Delta B\colon D])=rank\ B \quad (2)$$

식(2)의 정합조건을 만족하면 외란과 파라미터 불확실성은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta Ax(k)&=B\Delta\tilde{A}(k)\\ \Delta Bu(k)&=B\Delta\tilde{B}(k)\\ Df(k)&=BD\tilde{f}(k)\end{aligned} \quad (3)$$

위 식을 이용하여 식(1)을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(x,k)+Bh(x,k) \quad (4)$$

여기서, $h(x,k)=\Delta\tilde{A}x(k)+\Delta\tilde{B}u(k)+D\tilde{f}(k)$

식(4)의 이산치 계통에 대한 슬라이딩 평면은 일반적으로 다음과 같다.

$$\sigma(k)=\{x|\sigma(k)=Sx(k)=0\} \quad (5)$$

여기서, $S=[c_n\ c_{n-1}\ \cdots\ c_2\ c_1]$이며 슬라이딩 평면이 안정하도록 선택한다.

슬라이딩 모드가 일어나는 조건은 이산시간 Lyapunov 안정도 이론에 의해 다음과 같다.[5]

$$\begin{aligned}&V(k)=\sigma^2(k)>0\\ &V(k+1)-V(k)=\sigma^2(k+1)-\sigma^2(k)<0\end{aligned} \quad (6)$$

식(6)을 만족하는 슬라이딩 평면에 상태들이 머물도록 하는 등가제어입력은 다음과 같다.

$$u_{eq}(k)=-(SB)^{-1}S(A-I)x(k) \quad (7)$$

여기서, $(SB)^{-1}$은 정칙행렬이다.

그리고 비선형 제어입력은 아래와 같다.

$$u_n(k)=[\alpha(k)+\beta(k)]sgn(\sigma(k)) \quad (8)$$

위 식의 $\beta(k)$와 $\alpha(k)$는 다음과 같이 정의되어 진다.

$$\beta(k)\geq H_{max},\quad \alpha(k)\leq\eta\frac{\|\sigma(k)\|}{\|SB\|}$$

여기서, $H_{max}\geq|h(x,k)|,\ 0<\eta<2$

따라서 DSMC 입력은 다음과 같이 구성된다.[6]

$$u_{dsmc}(k)=u_{eq}(k)+u_n(k) \quad (9)$$

식(5)과 같은 형태의 슬라이딩 평면은 (n-1)차이 동특성을 가지며 제어계통의 차수보다 낮은 차수를 가지기 때문에 여러 가지 형태의 제어기에 의해 제어되는 계통의 동특성을 가질 수 없으며 이것은 DSMC이 다른 제어기법과 결합되어 사용될 수 없다는 것을 의미한다.

2.2 새로운 슬라이딩 평면을 가지는 DSMC

식(1)과 같은 시스템에 대한 파라메터 불확실성과 외란을 고려하지 않는 공칭 시스템은 아래와 같다.

$$x_o(k+1) = Ax_o(k) + Bu_o(x_{ok}) \tag{10}$$

시스템의 모든 상태를 포함하는 새로운 가상의 상태를 정의하기 위하여 식(10)과 같은 공칭계통을 다음과 같은 가제어 표준형으로 변환한다.

$$z_o(k+1) = A_c z_o(k) + B_c u_o(x_{ok}) \tag{11}$$

여기서,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

위 식에서 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} z_{01}(k+1) &= z_{02}(k) \\ z_{02}(k+1) &= z_{03}(k) \\ &\vdots \\ z_{0(n-2)}(k+1) &= z_{0(n-1)}(k) \\ z_{0(n-1)}(k+1) &= z_{0n}(k) \\ z_{0n}(k+1) &= -\alpha_n z_{01}(k) - \alpha_{n-1} z_{02}(k) \\ &\quad - \cdots - \alpha_1 z_{0n}(k) + u_0(x_{0k}) \end{aligned} \tag{12}$$

가상상태는 $z_{0v}(k) = z_{0n}(k+1)$에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} z_{0v}(k) = z_{on}(k+1) = & -\alpha_n z_{01}(k) - \alpha_{n-1} z_{02}(k) \\ & - \cdots - \alpha_1 z_{0n}(k) + u_0(x_{0k}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} z_{ov}(k+1) &= z_{on}(k+2) \\ &= -\alpha_n z_{01}(k+1) - \alpha_{n-1} z_{02}(k+1) \\ &\quad - \cdots - \alpha_1 z_{0n}(k+1) + u_0(x_{0k+1}) \end{aligned} \tag{14}$$

따라서 식(12).(13).(14)에 의해서 가상상태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_{ov}(k+1) &= -\alpha_n z_{02}(k) - \alpha_{n-1} z_{03}(k) - \cdots \\ &\quad - \alpha_1[-\alpha_n z_{01}(k) - \alpha_{n-1} z_{02}(k) \\ &\quad - \cdots - \alpha_1 z_{0n}(k) + u_0(x_{0k})] \\ &\quad + u_0(x_{0k+1}) \\ &= -\alpha_n z_{02}(k) - \alpha_{n-1} z_{03}(k) \\ &\quad - \cdots - \alpha_1 z_{ov}(k) + u_0(x_{0k+1}) \end{aligned} \tag{15}$$

새로운 가상상태 $z_v(k)$는 식(15)에서 공칭상태 $z_{01}(k), z_{02}(k), z_{03}(k), \cdots, z_{0n}(k)$들을 비공칭 상태인 $z_1(k), z_2(k), z_3(k), \cdots, z_n(k)$들로 대치함으로써 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} z_v(k+1) = & -\alpha_1 z_v(k) - \cdots - \alpha_{n-1} z_3(k) - \alpha_n z_2(k) \\ & + u_0(x_{k+1}) \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 $u_0(x_{k+1})$은 $u_0(x_k)$로부터 얻으며 $x(k)$ 항에 불확실성이 개입되기 때문에 반드시 $u_0(x_{0k+1})$로 부터 공칭상태인 $x_0(k)$를 비공칭 상태인 $x(k)$로 대치함으로써 얻어야만 한다.

가상상태를 포함하는 차수가 증가된 이산 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+\Delta A)x(k) + (B+\Delta B)u_{dsmc}(k) + Df(k) \\ z_v(k+1) &= -\alpha_1 z_v(k) - \cdots - \alpha_{n-1} z_3(k) - \alpha_n z_2(k) \\ &\quad + u_0(x_{k+1}) \end{aligned} \tag{17}$$

여기서 $u_{dsmc}(k)$는 슬라이딩 평면 위에서 슬라이딩 모드를 보장하는 DSMC 입력이다.

식(13)로부터 위의 차수가 증가된 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면을 다음과 같이 결정한다.

$$\begin{aligned} z_n(k+1) = & -\alpha_n z_1(k) - \alpha_{n-1} z_2(k) - \cdots - \alpha_1 z_n(k) \\ & + u_0(x_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n(k) = \{z, z_v, u_0 \,|\, & z_v(k) + \alpha_n z_1(k) + \alpha_{n-1} z_2(k) \\ & + \cdots + \alpha_1 z_n(k) - u_0(x_k) = 0\} \end{aligned} \tag{18}$$

가상 상태의 초기치를 다음과 같이 선택하면 $\sigma_n(k)$의 초기치가 영이 되므로 도달기간이 제거된다.

$$\begin{aligned} z_v(k_0) = & -\alpha_n z_1(k) - \alpha_{n-1} z_2(k) - \cdots - \alpha_1 z_n(k) \\ & + u_0(x_{k_0}) \end{aligned} \tag{19}$$

여기서 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리1. 계통(17)의 상태가 제안된 슬라이딩 평면 식(18) 위에 존재할 때 계통(1)의 상태는 공칭제어입력에 의해서 제어되는 공칭계통(10)과 같은 동특성을 갖는다.

증명) $z_1(k), z_2(k), z_3(k), \cdots, z_n(k), z_v(k)$들이 슬라이딩 평면에 존재하면 다음 방정식이 만족된다.

$$\begin{aligned} & z_v(k) + \alpha_n z_1(k) + \alpha_{n-1} z_2(k) + \cdots \\ & + \alpha_1 z_n(k) - u_0(x_k) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

정합조건을 만족함으로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$z_2(k) = z_1(k+1), \cdots, z_n(k) = z_{n-1}(k+1) \tag{21}$$

식(20)을 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & z_v(k+1) + \alpha_n z_1(k+1) + \alpha_{n-1} z_2(k+1) + \cdots \\ & \quad + \alpha_1 z_n(k+1) - u_0(x_{k+1}) \\ & = z_v(k+1) + \alpha_1 z_n(k+1) + \cdots + \alpha_{n-1} z_3(k) \\ & \quad + \alpha_n z_2(k) - u_0(x_{k+1}) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

식(17)에 의해서 $z_v(k+1)$는 다음과 같은 동특성을 가진다.

$$\begin{aligned} z_v(k+1) = & -\alpha_1 z_v(k) - \cdots - \alpha_{n-1} z_3(k) \\ & - \alpha_n z_2(k) + u_0(x_{k+1}) \end{aligned} \tag{23}$$

식(22)와 식(23)을 비교하면 다음 식이 성립됨을 알 수 있다.

$$z_v = z_n(k+1) \tag{24}$$

위 식을 이용하여 식(20)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} z_n(k+1) = & -\alpha_1 z_n(k) - \cdots - \alpha_{n-1} z_2(k) \\ & - \alpha_n z_1(k) + u_0(x_k) \end{aligned} \tag{25}$$

식(25)와 식(21)은 공칭시스템의 가제어 표준형이며 이것은 변환 $x(k) = P^{-1}z(k)$를 이용하여 계통(10)으로 변환할 수 있다. 그러므로 새로운 슬라이딩 모드 평면 $\sigma_n(k)$는 공칭 계통과 같은 동특성을 갖는다.

증명 끝.

정리1과 DSMC이론으로부터 DSMC 입력 $u_{dsmc}(k)$가 새로운 슬라이딩 모드 평면 $\sigma_n(k)$상에 상태들이 있도록 하면 상태 $x(k)$는 $u_0(x_k)$에 의해서 제어되는 공칭 시

스템의 궤적을 따른다는 것을 알 수 있다. 공칭 제어입력 $u_0(x_k)$는 어떠한 제어 입력의 형태라도 가능하기 때문에 DSMC이 다양한 제어기와 같이 사용되어질 수 있도록 한다.

2.3 새로운 이산 슬라이딩 모드 평면을 이용한 강인한 최적 제어

본 논문에서 제안된 슬라이딩 평면에서 공칭 제어입력 $u_{optimal}(x_k)$를 최적제어입력으로 설계하면 파라메터 불확실성이 존재하더라도 상태들이 최적궤적을 따르도록 하는 강인한 최적제어기를 설계할 수 있다. 식(1)과 같은 n차 계통을 고려한다.

공칭계통(10)에 대한 평가함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x_0^T(k)\,Q\,x_0(k)+u_0^T(k)\,R\,u_0(k)) \qquad (26)$$

이 평가함수를 최소화시키는 최적의 제어입력은 다음과 같다.[7]

$$\begin{aligned} u_{optimal}(x_{0k}) &= -Kx(k) \\ &= -(R+B^TPB)^{-1}B^TPAx_0(k) \end{aligned} \qquad (27)$$

여기서 P는 아래의 대수 리카티 방정식을 만족하는 해이다.

$$A^TPA-P+Q-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPA=0 \qquad (28)$$

위의 최적제어입력을 가지는 공칭계통은 다음과 같이 표현된다.

$$x_0(k+1)=Ax_0(k)+B\,u_{optimal}(x_{0k}) \qquad (29)$$

$u_{optimal}(x_{0k+1})$의 값은 식(27).(29)에 의해서 아래와 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} u_{optimal}(x_{0k+1}) &= -Kx_0(k+1) \\ &= -K[Ax_0(k)-BK\,u_{optimal}(x_{0k})] \\ &= Lx_0(k) \end{aligned} \qquad (30)$$

여기서, $L=-K(A-BK)$이다.

식(16)에 의해서 가상상태 $z_v(k+1)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} z_v(k+1)= &-\alpha_1 z_v(k)-\cdots-\alpha_{n-1}z_3(k) \\ &-\alpha_n z_2(k)+Lx(k) \end{aligned} \qquad (31)$$

비공칭 가상상태를 포함한 차수가 증가된 계통은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u_{dsmc}(k)+Df(k) \\ z_v(k+1) &= -\alpha_1 z_v(k)-\cdots-\alpha_{n-1}z_3(k)-\alpha_n z_2(k) \\ &\quad +Lx(k) \end{aligned} \qquad (32)$$

위의 계통에 대한 새로운 슬라이딩 평면은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \sigma_n(k) &= \{z, z_v, u_{optimal}|z_v(k)+\alpha_n z_1(k)+\alpha_{n-1}z_2(k)+ \\ &\qquad \cdots+\alpha_1 z_n(k)+Kx(k)=0\} \\ &= (\Sigma\alpha+K_p)x_p(k) \end{aligned} \qquad (33)$$

여기서, $x_p(k)=\begin{bmatrix} x(k) \\ z_v(k) \end{bmatrix}, K_p=[K\ 0]$

$,\Sigma\alpha=[\alpha_n\ \cdots\ \alpha_1]\,x(k)+z_v(k)$

DSMC 입력은 아래와 같이 구해진다.

$$u_{novel\,dsmc}(k)=u_{eq}(k)+u_n(k) \qquad (34)$$

여기서, 등가제어입력 $u_{eq}(k)$ 아래와 같이 결정된다.

$$u_{eq}(k)=-[(\Sigma\alpha+K_p)B_p]^{-1}(\Sigma\alpha+K_p)(A_p-I)x_p(k) \qquad (35)$$

그리고 비선형 제어입력 $u_n(k)$는 다음과 같다.

$$u_n(k)=\left[\eta\frac{\|\sigma(k)\|}{\|(\Sigma\alpha+K_p)B_p\|}+\beta(k)\right]sgn(\sigma(k)) \qquad (36)$$

여기서, $\alpha(k)\le\eta\frac{\|\sigma(k)\|}{\|(\Sigma\alpha+K_p)B_p\|}, 0<\eta<2,\ \beta(k)\ge H_{max},$ $H_{max}\ge|h(x,k)|$이다.

3. 결 론

본 논문에서는 이산치 슬라이딩 모드 평면의 새로운 설계방법이 제시되었다. 이 슬라이딩평면에 의해 설계되는 새로운 DSMC계통의 상태는 공칭제어기에 의해 제어되는 공칭 계통의 동특성을 가지게 된다. 이 사실은 DSMC가 여러 가지 형태의 제어기와 결합되어 강인한 특성을 갖도록 할 수 있다는 것을 의미한다. 본 논문에서는 최적제어기를 공칭제어기로 사용함으로써 파라미터 불확실성이 존재하는 계통에 대해서도 공칭계통의 최적궤적을 따라갈 수 있는 강인한 최적 제어기를 설계하였으며, 가상상태의 초기치를 적절하게 선택함으로써 도달기간을 쉽게 제거할 수 있었다. 본 논문은 여러 형태의 제어기를 DSMC와 결합하여 사용함으로써 강인성을 향상시키는 것을 가능하도록 하였다는데 큰 의의가 있다.

표 1 기호

기 호	의 미
$z_v(k)$	새로운 가상 상태
$u_{dsmc}(k)$	기존의 DSMC 입력
$u_{novel\,dsmc}(k)$	새로운 DSMC 입력
$u_{optimal}(x_{0k})$	공칭 최적제어입력
$\sigma(k)$	기존의 슬라이딩 평면 함수
$\sigma_n(k)$	새로운 슬라이딩 평면 함수

[참 고 문 헌]

[1] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control : A survey", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 40, No.1, pp.2-22, 1993

[2] V.I Utkin, Sliding modes and their application in variable structure systems, Moscow, Mir Publishers, 1978

[3] U. Itkis, Control systems of variable structure, JOHNWILLY & SONS, New York, 1976

[4] 김성태,한종길,임규만,함운철, "비선형 스윗칭 평면을 이용한 슬라이딩모드 제어기 설계," 1997년도 대한전기학회 제어계측.자동화.로보틱스 연구회 합동 학술 발표회 논문집, pp.36-40, 3월, 1997

[5] E.A. Misawa, "Discrete-Time Sliding Mode Control for Nonlinear Systems With Unmatched Uncertainties and Uncertain Control Vector",Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, vol. 119 503-512, Sept. 1997

[6] E.A Misawa, "Discrete-Time Sliding Mode Control: The Linear case", Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, vol. 119 819-821, Dec. 1997

[7] D.E. Kirk, Optimal control theory, Prentice-Hall, 1970