

고속윌쉬변환을 이용한 비선형 대규모 시스템의 3계층 최적제어

신승권* · 조영호* · 임윤식** · 심재선*** · 안두수*
 *성균관대학교 전전컴 자동제어 연구실 **여주대학 ***삼척대학교

Three Level Optimal Control of Nonlinear Large-scale Systems via Fast Walsh Transform

Seung-kwon Shin* · Young-Ho Cho* · Yun-Sic Lim** · Jae-Sun Sim*** · Doo-Soo Ahn*

*Dept. of Electrical & Computer Eng. Sungkyunkwan Univ. **Yeoju Institute of Technology. ***Samchok Univ.

Abstract - This paper presents a new algorithm of three-level optimal control for non-linear large scale systems using fast walsh transform. Since the solution is obtained through the information exchange of coefficient vectors induced walsh transform of all levels, this algorithm is quick and convenient. The validity of the proposed method is checked in the simulation.

단 $r=0,1,2,\dots,p-1$, $p=\log_2 m$
 $j=0,1,2,\dots,2^{r+1}-1$
 $k=1,2,3,\dots,\frac{N}{2^{r+1}}$
 여기서 [·]는 소수점 이하를 절삭한 정수를 나타낸다. 윌쉬함수 m 항 전개를 이용하는 경우 고속윌쉬변환은 p 단계를 필요하고 총 $m \log_2 m$ 번의 가·감산을 통하여 이루어진다. 고속윌쉬변환 경우는 최종 결과값에 $1/m$ 을 곱하면 된다.

1. 서 론

비선형계의 최적제어 기법은 2점 경계치 문제를 해결하기 위해 급경사법(steepest descent), 준선형화법(quasilinearization)과 같은 수치해법들이 있는데, 이러한 방법은 어느 한 경계조건으로부터 궤적을 추측해서 해를 구하기 때문에 시스템의 차수가 높은 대규모 시스템의 경우는 높은 차수의 비선형 미분방정식을 동시에 적분해야 하므로 많은 계산량과 기억용량이 필요하게 되어 해를 구하기 매우 어려워진다. 1970년대 이후 대규모 시스템을 제어하기 위해서 최적제어 이론을 기반으로 한 계층별 최적제어 기법이 많이 제시되었다. 계층별 최적화 기법에는 목표조정(goal coordination) 방법, Tamura의 3계층 방법, 상호예측 방법이 주를 이루고 있는데 이중 상위단의 조정법칙이 비교적 간단하고 수렴속도가 빠르다는 점에서 Takahara에 의해 제시된 상호 예측방법이 많이 이용되고 있다. 1980년대 Singh과 Hassan은 상호 예측의 원리를 이용한 계층별 제어 이론을 비선형 대규모 시스템에 확장시킨 2계층 상호상태(two-level costate coordination)기법을 제시하였지만 이 방법에서도 낮은 차수이긴 하지만 각각의 부시스템에서 2점 경계치 문제를 해결해야 하는 문제점을 갖는다.

본 논문에서는 2계층 상호상태 기법의 상위단을 다시 두 개로 분리하여 각각의 계층에서 고속윌쉬변환하여 윌쉬함수 계수벡터만으로 정보를 상호 전달하여 비선형 대규모 시스템의 3계층 제어를 빠르고 간단하게 구할 수 있는 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 본 론

2.1 고속윌쉬변환

고속윌쉬변환 알고리즘은 cooley-tukey형태의 신호흐름 선도를 기초로 하여 개발되었고 brown에 의해 유도된 시퀀스배열 윌쉬함수의 고속윌쉬변환 알고리즘은 다음과 같다.

$$F_0(i,0) = x_i \quad (i=0,1,2,\dots,m-1) \quad (1)$$

$$F_{r+1}(k,j) = F_r(2k-1, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + (-1)^{\lfloor \frac{u+1}{2} \rfloor} F_r(2k, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor) \quad (2)$$

2.2 비선형계의 3계층 최적제어

다음과 같은 비선형계의 최적제어 문제를 고려한다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\text{Min } J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ \|x(t)\|_{Q_1}^2 + \|u(t)\|_{R_1}^2 \} dt \quad (4)$$

단, $x(t) \in R^n$ 상태벡터, $u(t) \in R^m$ 제어벡터
 여기서 $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 인 벡터함수이고 $Q_1 \geq 0$, $R_1 > 0$ 인 가중행렬이다.

Hassan과 Singh[7,8]은 위의 최적제어 문제가 다음과 동가(equivalent)임을 밝혔다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D(x^*, u^*, t) \quad (5)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\text{Min } J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ \|x(t)\|_{Q_2}^2 + \|x^*(t)\|_{Q_3}^2 + \|u(t)\|_{R_2}^2 + \|u^*(t)\|_{R_3}^2 \} dt \quad (6)$$

$$\text{단, } D = f(x^*, u^*, t) - Ax^*(t) - Bu^*(t)$$

여기서, 시스템 행렬 A, B 는 식(3)을 동작점 근방에서 테일러 급수(Taylor series)로 전개한후 2차항 이상을 무시하고 얻어진 선형화 행렬이다. A, B, Q, R 행렬은 N 개의 부시스템에 상응하는 N 개의 블록을 갖는 블록 대각행렬이고, $R_1 = R + R_2$, $Q_1 = Q + Q_3$ 이다.

식(3) ~ 식(4)의 최적제어 문제를 해결하기위해서 해밀토니안을 정의하고 최적화의 필요조건으로부터 상호예측 형태의 3계층 조정원칙을 얻을 수 있고, 각 계층의 조정법칙은 다음과 같다.

◎ 상위계층의 조정법칙

$$\dot{x}^*(t) = x(t) \quad (7)$$

$$u^*(t) = u(t) \quad (8)$$

◎ 중간계층의 조정법칙

$$\dot{\lambda}(t) = -Qx(t) - A^T \lambda(t) - \Pi(t) \quad (9)$$

$$\lambda(t_f) = 0$$

$$\Pi(t) = Q_2 \mathbf{x}^*(t) + \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} - \mathbf{A}^T \right\} \lambda(t) \quad (10)$$

$$\beta(t) = R_2 \mathbf{u}^*(t) + \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} - \mathbf{B}^T \right\} \lambda(t) \quad (11)$$

여기서, $\lambda(t) \in R^n$ 상호상태벡터, $\Pi(t) \in R^n$, $\beta(t) \in R^m$ 라그랑제 승수이다.

◎ 하위계층의 조정법칙

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{D}_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) \quad (12)$$

$$\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_i^{-1} \{ \mathbf{B}_i^T \lambda_i(t) + \beta_i(t) \} \quad (13)$$

2.3 고속월쉬변환을 이용한 3계층 최적제어

상위계층에서는 상위계층의 반복지표 $K=1$ 인 경우에는 $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ 의 초기제어를 추측해서 중간계층과 하위계층으로 보내고 K 번째 반복구간에서 비선형항을 고정시키는데 이용된다. $K>1$ 인 경우에는 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ 는 각각의 부시스템에서 얻어진 $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{u}_i(t)$ 값들을 취합해서 얻을 수 있고 이 값들은 상호예측의 형태를 취하고 $K+1$ 번째 반복구간에서 새로운 $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ 로 이용된다.

중간계층에서는 $\lambda(t)$ 와 $\beta(t)$ 를 계산해야 하는데, 중간계층의 반복 지표 $L=1$ 인 경우는 초기제어를 임의로 설정하면 되고, $L>1$ 인 경우는 식(9)~(11)를 이용하여 계산한다. 식(2)의 $\beta(t)$ 는 식(1)의 $\lambda(t)$ 만 구하면 간단히 구할 수 있다. $\lambda(t)$ 는 초기값을 알지 못하고 최종값만을 알기 때문에 식(2)을 후향적분을 취하면 다음과 같다.

$$\lambda(t) = \lambda_{t_1} + \int_{t_1}^t \mathbf{H}(\tau) \lambda(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (14)$$

식(14)의 해를 최초 $\lambda^0(t) = \lambda_{t_1}$ 으로 가정하고 해를 구하고 반복적용할 때 k 번째 결과는 다음과 같다.

$$\lambda^k(t) = \lambda_{t_1} + \int_{t_1}^t \mathbf{q}^{k-1}(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (15)$$

단, $\mathbf{q}^{k-1}(\tau) = \mathbf{H}(\tau) \lambda^{k-1}(\tau)$ $k=1, 2, 3, \dots$

주어진 식(14)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(15)의 반복 연산에 의해 식(16)을 만족하는 식(14)의 미분방정식의 해가 존재한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda^k(t) - \lambda^{k-1}(t)\| = 0 \quad (16)$$

$\lambda^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때, 월쉬함수를 적용하여 식(15)의 해를 구하기 위하여 $\mathbf{q}^{k-1}(\tau) = \mathbf{H}(\tau) \lambda^{k-1}(\tau)$ 와 $\lambda^k(t)$, $\mathbf{w}(\tau)$, λ_{t_1} 를 각각 고속월쉬변환하여 월쉬함수 계수벡터로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^k \mathbf{Wal}(t) = \mathbf{A}_{t_1} \mathbf{Wal}(t) + \mathbf{Q}^{k-1} \int_{t_1}^t \mathbf{Wal}(\tau) d\tau + \mathbf{W} \int_{t_1}^t \mathbf{Wal}(\tau) d\tau \quad (17)$$

여기서 $\mathbf{Wal}(t)$ 는 m 차 월쉬벡터를 나타내며 \mathbf{Q}^{k-1} 은 $\mathbf{q}^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬계수행렬로 $\mathbf{H}(\tau)$ 와 바로 전 단계에서 결정된 $\lambda^{k-1}(\tau)$ 의 곱으로부터 고속월쉬변환을 이용하여 결정할 수 있다. 식(17)에 월쉬함수의 후향적분 연산행렬을 도입하고 월쉬함수를 소거하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}_{t_1} + \mathbf{G}^{k-1} \mathbf{P}_r + \mathbf{H} \mathbf{P}_r \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{r,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r,m/2} & -\frac{1}{2m} \mathbf{R}_{m/2} \\ \frac{1}{2m} \mathbf{R}_{m/2} & \mathbf{0}_{m/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{r,1} = -\frac{1}{2} \quad (19)$$

여기서 m 은 전개항수를 나타내며, 첨자는 해당 정방행렬의 크기를 나타낸다. 그리고 \mathbf{R} 은 역대각 단위행렬을 나타

내고 이후 $\mathbf{P}_{r,m}$ 을 \mathbf{P}_r 로 표기한다.

식(18)의 대수방정식으로부터 $\lambda^k(t)$ 의 월쉬계수행렬인 \mathbf{A}^k 를 구할 수 있다. 그러나 월쉬함수의 후향적분 연산행렬 \mathbf{P}_r 은 m 항 전개시 m^2 개의 요소 중 $2m-1$ 개의 요소만이 $\pm 2^{-(n+1)}$ ($n=0, 1, 2, \dots, p$)의 값을 취하므로 \mathbf{A}^k 를 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

1) $i=0$ 인 경우

$$\mathbf{A}_i^k = \mathbf{A}_{t_0} - \frac{1}{2} [\mathbf{Q}_0^{k-1} + \mathbf{W}_0] + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j+1}} [\mathbf{Q}_{2^j-1}^{k-1} + \mathbf{W}_{2^j-1}] \quad (20)$$

2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ 인 경우

$$\mathbf{A}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\mathbf{Q}_{2^{n-1}-1}^{k-1} + \mathbf{W}_{2^{n-1}-1}] + \sum_{j=n+1}^p \frac{1}{2^{j+1}} [\mathbf{Q}_{2^j-1}^{k-1} + \mathbf{W}_{2^j-1}] \quad (21)$$

(단, $n=1, 2, \dots, p-1$)

3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ 인 경우

$$\mathbf{A}_i^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [\mathbf{Q}_{2^{n-1}-1}^{k-1} + \mathbf{W}_{2^{n-1}-1}] \quad (22)$$

(단, $n=p$)

식(20)~(22)에서 구한 \mathbf{A}^k 를 고속월쉬역변환하면 $\lambda^k(t)$ 를 구할 수 있으며 식(16)을 만족하는 $\lambda^k(t)$ 가 식(14)의 해가 된다. 여기서 구한 $\lambda^k(t)$ 를 $\lambda^{(L+1)}(t)$ 로 놓고 전 단계에서 구한 $\lambda^L(t)$ 과 비교하여 식(23)의 중간계층의 조정법칙을 만족시키기만 즉, E_λ 가 미리 설정된 값보다 작아지면 이때 각각의 부시스템에서 계산된 $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{u}_i(t)$ 를 상위계층으로 전달하여 새로운 $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$ 값을 예측하는데 이용된다.

$$\left\{ \int_{t_1}^t (\lambda^{L+1}(t) - \lambda^L(t))^2 dt \right\} \leq E_\lambda \quad (23)$$

상위계층과 중간계층에서 잠정적인 $\mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{u}^*(t)$, $\lambda(t)$, $\beta(t)$ 가 얻어졌으면 N 개의 독립적인 부시스템들은 식(12)과 식(13)을 통해 얻을 수 있다. 여기서 부시스템을 의미하는 첨자 i 는 생략한다. 식(12)을 적분을 취하면

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A} \mathbf{x}(\tau) d\tau + \int_0^t [-\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \{ \mathbf{B}^T \lambda(\tau) + \beta(\tau) \} + \mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \tau)] d\tau \quad (24)$$

식(24)의 해를 최초 $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ 으로 가정하여 해를 구하고 반복적용할 때 k 번째의 결과는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{g}^{k-1}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{h}(\tau) d\tau \quad (25)$$

단, $\mathbf{g}^{k-1}(\tau) = \mathbf{A} \mathbf{x}^{k-1}(\tau)$, $k=1, 2, 3, \dots$

$\mathbf{h}(\tau) = -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \{ \mathbf{B}^T \lambda(\tau) + \beta(\tau) \} + \mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \tau)$
주어진 식(24)의 상태방정식이 Lipschitz 조건을 만족한다면 Picard에 의한 식(25)의 반복 연산에 의해 식(26)을 만족하는 식(24)의 미분방정식의 해가 존재한다.

$$e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t)\| = 0 \quad (26)$$

$\mathbf{x}^{k-1}(t)$ 를 알고 있다고 할 때, 월쉬함수를 적용하여 식(25)의 해를 구하기 위해서 $\mathbf{g}^{k-1}(\tau)$ 와 $\mathbf{x}^k(t)$ $\mathbf{h}(\tau)$, \mathbf{x}_0 를 각각 고속월쉬함수변환하여 월쉬함수계수벡터로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^k \mathbf{Wal}(t) = \mathbf{X}_0 \mathbf{Wal}(t) + \mathbf{G}^{k-1} \int_0^t \mathbf{Wal}(\tau) d\tau + \mathbf{H} \int_0^t \mathbf{Wal}(\tau) d\tau \quad (27)$$

여기서 $\mathbf{Wal}(t)$ 는 m 개의 시퀀스배열 월쉬함수로 이루어지는 m 차 월쉬벡터를 나타내며 \mathbf{G}^{k-1} 은 $\mathbf{g}^{k-1}(\tau)$ 의 월쉬

계수행렬로 A 와 바로 전 단계에서 결정된 $x^{k-1}(t)$ 의 값으로부터 고속월쉬변환을 이용하여 결정할 수 있다. 식(27)에 월쉬함수의 적분 연산행렬을 도입하고 월쉬함수를 소거하면 다음과 같다.

$$X^k = X_0 + G^{k-1} P + H P \quad (28)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} P_m & -\frac{1}{2m} R_m \\ \frac{1}{2m} R_m & 0_m \end{bmatrix} \quad P_1 = \frac{1}{2} \quad (29)$$

여기서, m 은 전개항수를 나타내며 첨자는 해당 정방행렬의 크기를 나타낸다. 그리고 R 은 역대각 단위행렬을 나타내며 이후 편의상 첨자를 생략하고 P_m 을 P 로 표기한다.

식(28)의 대수방정식으로부터 $x^k(t)$ 의 월쉬계수행렬 X^k 를 구할 수 있고 식(28)의 계산은 다음과 같이 구할 수 있다.

1) $i=0$ 인 경우

$$X^k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^{j+1}} [G_{2^{j-1}} + H_{2^{j-1}}] \quad (30)$$

2) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ 인 경우

$$X^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [G_{2^{n-i-1}} + H_{2^{n-i-1}}] + \sum_{j=n+1}^k \frac{1}{2^{j+1}} [G_{2^{j-i-1}} + H_{2^{j-i-1}}] \quad (31)$$

(단, $n=1, 2, \dots, p-1$)

3) $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \dots, 2^n-1$ 인 경우

$$X^k = -\frac{1}{2^{n+1}} [G_{2^{n-i-1}} + H_{2^{n-i-1}}] \quad (32)$$

(단, $n=p$)

식(30)~(32)에서 구한 X^k 를 고속월쉬역변환하면 $x^k(t)$ 를 구할 수 있으며 식(26)을 만족하는 $x^k(t)$ 가 식(12)의 해가 된다. 여기서 구한 $x^k(t)$ 를 $x^{(k+1)}(t)$ 로 놓고 전 단계에서 구한 $x^k(t)$ 과 비교하여 식(33)과 식(34)의 하위계층의 조정법칙을 만족시키면 즉, E_x 와 E_u 가 미리 설정된 값보다 작아지면 최적상태벡터와 최적 제어입력을 얻을 수 있다.

$$\left\{ \int_0^{t_i} (x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq E_x \quad (33)$$

$$\left\{ \int_0^{t_i} (u^{(k+1)}(t) - u^{(k)}(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq E_u \quad (34)$$

2.4 적용예

Mukhopad에 의해 제한된 무한 모션에 연결된 동기기의 비선형 시스템을 고려한다.

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$

$$\dot{y}_2(t) = B_1 - A_1 y_2(t) + A_2 y_3(t) \sin y_1(t) - \frac{B_2}{2} \sin 2y_1(t)$$

$$\dot{y}_3(t) = u_1(t) - C_1 y_3(t) + C_2 \cos y_1(t)$$

파라미터 값 :

$$A_1 = 0.2703, \quad A_2 = 12.012, \quad B_1 = 39.1892$$

$$B_2 = -48.048, \quad C_1 = 0.3222, \quad C_2 = 1.9$$

$$\text{초기치 : } y_0 = [0.6461 \quad 0.0 \quad 7.7438]^T$$

$$\text{동작점 : } y_e = [0.7461 \quad 0.0 \quad 7.7438]^T, \quad u_e = 1.1$$

평가함수 :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_i} \{ (y_1 - 0.7461)^2 + y_2^2 + (y_3 - 7.7438)^2 + 100(u_1 - 1.1)^2 \} dt$$

◎ 1번째 부시스템 :

$$\dot{x}_{s1}(t) = A_{s1} x_{s1}(t) + B_{s1} u_{s1}(t) + D_{s1}(x^0, u^0, t)$$

$$\text{단, } A_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64.5348 & -0.2703 \end{bmatrix}, \quad B_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

◎ 2번째 부시스템 :

$$\dot{x}_{s2}(t) = A_{s2} x_{s2}(t) + B_{s2} u_{s2}(t) + D_{s2}(x^0, u^0, t)$$

그림 1~ 그림 4는 시스템을 2개로 분할하고 월쉬함수의 전개항수가 62항일 경우 제안한 방법을 이용하여 얻어진 최적상태계좌와 제어입력을 표현했는데 주어진 명령값에 추종됨을 알 수 있다.

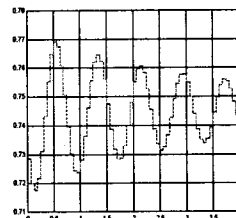


fig 1. optimal state y1

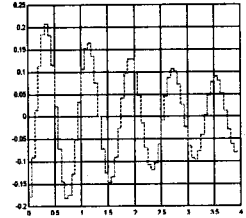


fig 2. optimal state y2

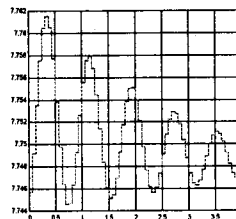


fig 3. optimal state y3

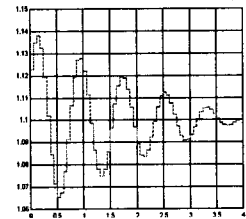


fig 4. optimal control u

3. 결 론

본 연구에서는 비선형계의 3계층 최적제어를 위해서 상위 계층, 중간계층, 하위계층에 고속월쉬변환을 취해서 반복연산만으로 3계층 최적제어를 수행하는 간편한 알고리즘을 제안했는데 월쉬변환을 이용하면 미분, 적분방정식을 그에 상응하는 대수방정식으로 변환할 수 있으므로 디지털 컴퓨터를 이용할 경우 매우 편리하다. 또한 비선형계를 선형화시켜 계층별 최적제어를 수행할 경우에 선형화 오차의 누적과 시스템 행렬의 분할 방법에 따라 수렴 여부가 결정되는 문제점을 갖지만 제안한 알고리즘은 항상 블록대각 행렬만을 분할하게 되므로 이러한 문제점을 해결할 수 있다. 또한 일반적인 적교함수방법은 수많은 역행렬계산을 필요로 하나 본 연구방법에는 역행렬계산이 필요없기 때문에 비선형계의 제어 문제를 보다 정확하게 계산할 수 있다.

(참 고 문 헌)

- [1] D. D. Siljak, "A Multilevel Optimization of Large-scale Dynamic Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 21, No. 4, pp. 79-84, 1975.
- [2] M. G. Singh and M. F. Hassan, "Multilevel Feedback Control for Interconnected Dynamic System using the Prediction Principle," IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Vol. 6, No. 4, pp. 233-239, 1976.
- [3] M. G. Singh, "Hierarchical Feedback Control System for Large Dynamic Systems," INT. J. SYSTEMS SCI, Vol. 8, No. 1, pp. 31-47, 1977.
- [4] M. D. Mesarovic, D. Macko and Takahara, "Theory of Hierarchical Multilevel Systems," Academy Press, New York, 1970.
- [5] Hassan M. F. Singh M. G., "A Two-level Costate Prediction Algorithm for Nonlinear Systems," Automatica, Vol. 13, pp. 629-634, 1977.