

도립진자 시스템에 적용한 강건한 2-자유도 제어기 설계

안수중, 이상철, 조도현, 이종용, 박종우, 이상호
 광운대학교 제어계측공학과(Tel: +82-2-940-5153; E-mail: AHNPROF@shinbiro.com)

Design of A Robust two-degree-of-freedom Controller for An Inverted Pendulum System

Ahn, Soo-Joong, Lee, Sang-Chuel, Cho, Do-Hyeoun, Lee, Jong-Yong, Park, Jong-Woo, Lee, Sang-Hyo
 Dept. of Control and Instrumentation Eng., Kwangwoon University

Abstract- 본 논문에서는 도립 진자 시스템에 대하여 모델의 불확실성에도 불구하고 수레의 위치가 기준 입력을 추종하는 강건한 2-자유도(two degree of freedom) 제어기를 설계한다. 도립 진자 시스템의 모델 불확실성은 기약 분해 불확실성으로 고려하고, 기준 입력 추종 성능은 도립 진자 시스템의 수레 위치가 원하는 기준 위치로 추종하는 문제를 고려한다. 이러한 강건 안정화와 기준 입력 추종사이의 절충 문제를 해결하기 위해서 2-자유도 제어기를 설계한다. 2-자유도 제어기는 프리필터와 피드백 제어기로 구성된다. 설계 절차에 따라 얻어진 제어기는 모의 실험을 통해 그 성능을 확인한다.

1. 서 론

불확실성을 가지는 다변수 시스템에 대하여, 피드백 시스템의 강건성 증대 및 감도 최소화에 대한 접근법으로 전달 함수의 H_∞ 노름을 사용할 것이 제안된 후[1], 불확실성과 모델링 오차를 포함하는 피드백 시스템의 강건 안정화와 외란 제거에 대한 성능 개선을 고려한 H_∞ 제어기 설계 방법이 꾸준히 연구되어 왔다[2]. 그리고, 강건 최적화에 중점을 둔 정규화된 기약 분해(normalized coprime factorization) 설계 방법은 이미 여러 응용 문제에 성공적으로 적용되어 왔고[3], 최근에는, 강건 안정성과 시간 영역 명세를 동시에 만족하는 2-자유도 제어기가 많은 설계 문제에 적용되고 있다[4][5]. 특히, 고전 루프 정형과 결합한 H_∞ 강건 안정화를 기반으로 한 루프 정형 설계 절차의 다변수 제어기 설계 방법은 McFarlane과 Glover에 의해 제안된다. 이를 확장한 2-자유도 H_∞ 접근법은 Hoyle 등(1991)[4]에 의해 그 기본적인 개념이 소개되었고, Limebeer 등(1993)[5]는 강건 안정성과 성능을 만족하는 H_∞ 2-자유도 제어기를 Q 매개변수화하여 설계하는 방법을 제시하였다. 이러한 설계 방법들을 Walker(1996)[6]가 그 제어기의 구조를 관측기와 상태 피드백 부분으로 분리된 명확한 구조를 갖는 제어기로 재정의하였다. 이는, 제어기 설계시, 비구조적 모델 불확실성을 갖는 시스템의 덧셈 섭동 요소를 기약 분해 표현법을 이용하여 설계에 반영함으로써, 제어 시스템의 강건성을 보장한다. 이와 동시에 모델 정합(model matching)을 사용하여 기준 입력과 외란에 대한 성능을 고려함으로써, 강건 안정화와 기준 입력 추종을 만족하는 2-자유도 제어기를 얻는다. 본 논문은 도립 진자 시스템에 대하여 페루프 전달함수를 주어진 기준 모델의 응답을 갖도록 하는 데 초점을 맞추면서, 명시된 수준의 강건 안정도를 보장하는 제어기 설계 절차를 전개한다. 프리필터 부분과 피드백 제어기 부분을 동시에 설계하는 문제를 Walker[6]가 제안한 2-자유도 H_∞ 루프 정형 제어기 구조를 토대로, 강건한 2-자유도 제어기를 설계한다.

2. 도립 진자 시스템의 강건한 2 자유도 제어기 설계 절차

2.1 도립 진자 시스템 모델

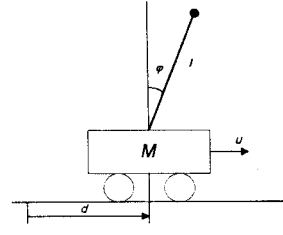


그림 1 도립 진자 시스템
 Fig. 1 Inverted pendulum system

그림 1과 같은 수레 위의 도립 진자를 고려하면, 이 시스템에 대한 $\varphi = 0$ 근방에서의 선형 방정식 모델은 식(2.1)과 같다.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mg}{M} & \frac{-K_m^2 K_g^2}{MR^2} & 0 \\ 0 & \frac{g(m+M)}{lM} & \frac{K_m^2 K_g^2}{lMR^2} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{-1}{lM} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (2.1)$$

표현된 매개변수들은 표 1과 같다. 여기서, 입력 u 는 수레를 구동시키는 전동기의 단자 전압(v)이고, $x = \{d, \varphi, \dot{d}, \dot{\varphi}\}$, 출력 $y = \{x, \varphi\}$ 이다.

표 1 도립 진자 시스템의 매개변수 정의
 Table 1 Parameter definition for Inverted Pendulum

매개변수	기호	단위	실제값
기준축에서 이동한 진자의 각도	φ	rad	
기준축에서 이동한 진자의 각속도	$\dot{\varphi}$	rad/sec	
수레의 질량	M	kg	0.455
진자의 질량	m	kg	0.210
진자의 길이	l	m	0.305
중력가속도	g	kg m/sec ²	9.8
전동기 회전력 상수	K_m	Nm/amp	0.00767
역기전력 상수	K_g	V/(rad/sec)	3.7:1
내부 치차 비	K_g		3.7:1
전동기의 치차 반지름	r	m	0.00635
진기자 저항	R	Ω	2.6
마찰 계수	F	kg/sec	0

식(2.1)을 도립 진자 시스템의 공칭 제어 대상으로 고려하여, 식(2.2)과 같이 표현한다.

$$G_{nom} = \begin{bmatrix} A_{nom} & B_{nom} \\ C_{nom} & D_{nom} \end{bmatrix} = C_{nom}(sI - A_{nom})^{-1}B_{nom} + D_{nom} \quad (2.2)$$

표 1의 매개변수를 사용하여 식(2.1)의 상태 공간 모델에

대입하면 다음과 같다.

$$A_{nom} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4.5 & -16.8 & 0 \\ 0 & 46.9 & 55.3 & 0 \end{bmatrix}, B_{nom} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.8 \\ -12.4 \end{bmatrix}$$

또한, 시스템에서 측정되는 출력은 φ 와 d 이므로,

$$C_{nom} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{nom} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2 특이치 루프 정형화 하중 함수 W_1, W_2 설정

설계 절차에 있어서 첫 번째 단계는 그림 2와 같이 각각의 하중 함수 W_1, W_2 를 공칭 제어 대상 G_{nom} 의 앞과 뒤에 붙이는 개루프 확대(open loop augmentation)이다. W_2 은 제어된 출력 또는 제어기로 피드백되는 측정치의 상대적 중요성을 반영하는 하중이고, W_1 은 저주파에서의 적분 작용(integral action), 교차 주파수에서 roll off rate를 줄이는 진상 보상, 고주파에서 roll off rate를 증가시키는 지상 보상과 같은 동적 정형 특성을 갖는다. 본 논문에서는 도립 진자 공칭 모델에 이미 적분기가 포함되어 있으므로, 상수 하중함수를 사용한다. 우리가 설정한 루프 정형 하중 값은 다음과 같다.

$$W_1 = [-5.8258, 5.1706], W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

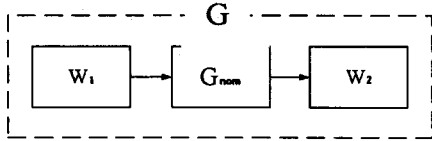


그림 3 정형화된 제어대상
Fig. 1 The Shaped Plant

2.3 정형화된 제어 대상의 기약 분해 표현과 불확실성을 포함한 강건 안정성 측정

2.2절에서의 개루프 확대 시스템 $W_2 G_{nom} W_1$ 을 G 로 고려하여 엄밀하게 프로퍼(strictly proper)라고 가정한다. 이 시스템 G 는 식(2.3)과 같이 표현한다.

$$G(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1} B \quad (2.3)$$

$G(s)$ 의 정규화된 좌 기약분해(normalized left coprime factorization) $[N \ M]$ 는 식(2.4)과 같이 상태 공간 실현을 갖는 것으로 잘 알려져 있다[3]

$$[N \ M] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A+HC}{C} & \frac{B \ H}{I} \end{array} \right] \quad (2.4)$$

(단, $M, N \in H_\infty$ 는 서로 소이고, $MM^+ + NN^+ = I$ 이다.)

여기서, $H = -YC^+$ 이고, $Y = Y^+ \geq 0$ 는 다음 식(2.5)의 대수 리카티 방정식의 안정화 해이다.

$$AY + YA^+ - YC^+CY + BB^+ = 0 \quad (2.5)$$

그림 2에서 섭동된 제어대상 $G_d = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)$ 의 최적 안정 여유 ϵ_{max} 는 식(2.5)에 대한 안정화 해와 쌍대(dual) 방정식 (2.6)을 통해 최적 안정 여유 $\epsilon_{max} = (1 + \lambda(XY))^{-1/2}$ 를 계산할 수 있다.

$$A^+X + XA - XBB^+X + C^+C = 0 \quad (2.6)$$

$\gamma = 1/\epsilon_{max}$ 로 가정하면, 페루프 시스템의 강건 안정도를 최대화하는 제어기는 식(2.7)을 최소화하는 피드백 제어기가 된다.

$$\gamma = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \quad (2.7)$$

그러면, 소이득 정리(small gain theorem)로부터 식(2.8)에 의해 섭동된 페루프 시스템은 안정을 유지한다.

$$\| \Delta_M \ \Delta_N \|_\infty < \gamma^{-1} \quad (2.8)$$

식(2.3)-(2.8)을 도립 진자 시스템에 적용하여, 실제 설계에서는 $\gamma = 5.2$ 로 설정하였다.

2.4 2-자유도 제어 시스템의 구성과 일반화 제어 대상

2-자유도 설계 문제는 그림 3과 같이 정규화된 기약분해, $G = M^{-1}N$ 로 구성된 정형화된 제어대상(shaped plant)에 대하여 신호 $[r^+ \ \phi^+]$ '와 $[u^+ \ y^+ e^+]$ '사이 전달함수의 H_∞ 노름을 최소화하고 안정화 제어기를 찾는 것이다.

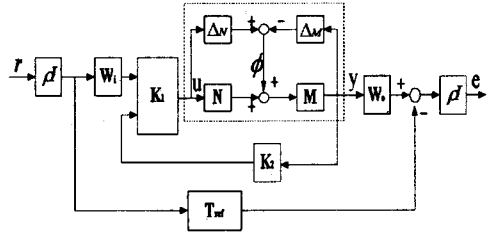


그림 6 2-자유도 루프 정형 설계 구성

Fig. 3 Two-degree-of-freedom loop-shaping design configuration

일반화된 제어대상 $P(s)$ 를 다음 식(2.9)과 같이 표현한다.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \bar{A} & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

정형화된 제어대상 G 와 원하는 기준 모델 T_{ref} 가 각각 식(2.10)과 같은 상태 공간 실현을 갖는다.

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, T_{ref} = \begin{bmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2-자유도 문제를 H_∞ 표준 제어 구성에 적용하면, 일반화된 제어대상 P 는 식(2.11)과 같은 상태 공간 모델을 갖는다.

$$P = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -H & B \\ 0 & A_o & B_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ C & 0 & 0 & I & 0 \\ \rho C & -\rho^2 C_o & 0 & \rho I & 0 \\ 0 & 0 & \rho I & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

여기서, x_o 는 T_{ref} 의 상태이고, ρ 는 모델 정합을 강조시키기 위한 스칼라 매개변수이다.

수레 위치 추종에 대한 기준 모델 $T_{ref}(s)$ 를 다음과 같은 2차 형태를 갖는다고 설정한다.

$$T_{ref}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.12)$$

진자를 안정화하기 위해 약간의 오버슈트(10%)를 갖는 응답을 선택한다. 이에 알맞은 $\zeta = 0.59$, $\omega_n = 2.3 \text{ rad/s}$ 를 설정한다. 또한, 그림 3에 표현되어 있는 W_o 는 수레 위치의 추종문제에 초점을 둠으로, $W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 로, W_i 는 최적화로 인하여 정상상태에서 보장받지 못하는 기준 모델

$T_{ref}(s)$ 와 r 에서 W_2 까지의 경로로 기준 입력 r 의 크기를 조정(scaling)한다. 여기서는 $W_1 = 4.1850$ 로 사용된다.

2.5 제어기 구조와 설계

식 (2.11)의 주어진 제어 대상 P 에 대하여 식(2.13)으로 표현된 리카티 방정식의 안정해 X_∞ 를 구할 수 있으면, 그림 4와 같이 그 구조가 명백한 제어기 K_∞ 를 얻을 수 있다(Walker[6]).

$$0 = X_\infty \bar{A} + \bar{A}' X_\infty + \bar{C}' J \bar{C} - (X_\infty \bar{B} + \bar{C}' J \bar{D})(\bar{D}' J \bar{D})^{-1}(\bar{D}' J \bar{C} + \bar{B}' X_\infty) \quad (2.13)$$

여기서, $\bar{B} = [B_1 \ B_2]$, $\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix}$

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_o \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & -H & B \\ B_o & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_\infty = \begin{bmatrix} X_{\infty 11} & X_{\infty 12} \\ X_{\infty 21} & X_{\infty 22} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

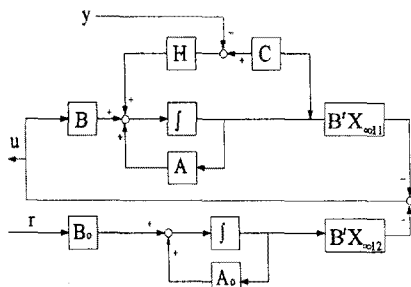


그림 11 2-자유도 H_∞ 루프 정형 제어기의 구조

Fig.4 Structure of the two-degree-of-freedom H_∞ loop-shaping controller

이 제어기는 상태 추정기, 기준 모델, 그리고 기준 모델의 상태 벡터와 함께 정형화된 제어대상 상태의 추정을 사용하는 선형 피드백 법칙으로 구성되어 있고, 식(2.13)과 같이 표현된다(Walker [6]).

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + HC - BB'X_{\infty 11} & -BB'X_{\infty 12} \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -H \\ B_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

위에서 얻어진 제어기는 정형화한 제어 대상을 대상으로 한 제어기이나, 실제 제어할 대상은 G_{nom} 이므로, 그림 5와 같이 위에서 구해진 제어기에 W_1 과 W_2 를 포함 시켜 주어야 한다.

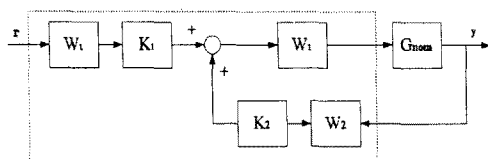


그림 12 2-자유도 H_∞ 루프 정형 제어기

Fig. 5 Two-degree-of-freedom H_∞ loop-shaping controller

3. 모의 실험 결과 및 결론

2-자유도 제어기 설계 절차를 통하여 얻어진 제어기를 MATLAB을 사용하여 도립 진자 시스템의 모의 실험을 수행하였다. 그림 6은 2-자유도 제어기를 설계하여 0.4m의 기준 입력을 가했을 때의 응답을 보인 것으로, 기준 모델 응답에 따르는 결과를 확인할 수 있다. 그림 7에서는 수레 위치에 대하여 기준 입력은 진자의 입장에서 하나의 외란으로 작용하는 것으로 볼 수 있으며, 이러한 진자의 각도가 이러한 외란에도 불구하고 안정함을 볼 수 있다.

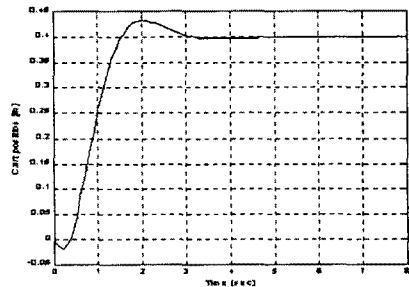


그림 13 기준 입력에 대한 수레 위치의 추종 성능
Fig. 6 Tracking performance of cart position for reference input

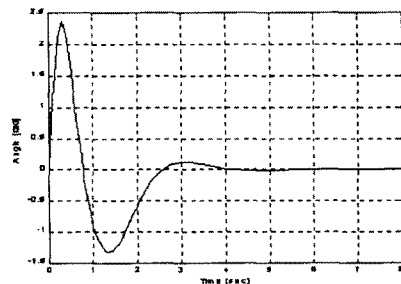


그림 14 기준 입력에 대한 진자 각의 응답

Fig. 7 Response of pendulum angular for reference input

[참고 문헌]

- [1] G. Zames. "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformation, multiplicative seminorms and approximate inverse", IEEE Transaction Automatic Control, vol. 26 pp.301-320, 1981
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonkar and B. S. Francis "State Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problem" IEEE Transaction Automatic Control vol. AC-34, pp. 831-847, 1989
- [3] D. McFarlane and K. Glover "Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions" Lecture Note in Control and Information Science Series, Springer-Verlag 1990
- [4] Hoyle, D., Hyde, R., and Limebeer, D., "An H_∞ approach to two degree of freedom design" Proc. of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, U.K. pp. 1581-1585 1991
- [5] Limebeer, D., Kasenally, E., and Perkins, J. "On the design of robust two degree of freedom controllers" Automatica, 29, pp.157-168 1993
- [6] D.J.Walker "On the structure of a two-degree-of-freedom H_∞ loop shaping controller" INT. J. CONTROL, VOL 63, NO. 6 1105-1127 1996
- [7] Sigurd Skogested and Ian Postlethwaite "Multivariable Feedback Control" John Wiley & Sons, Ltd 1996