1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

확장된 블럭펄스 연산 행렬을 이용한 쌍일차계의 시변 파라미터 추정

안두수[1], 김태훈[1], 인돈기[1], 이 승[2]
[1] 성균관 대학교, [2] 대림 대학

Identification of Time-varying Parameters of Bilinear Systems via Extended Block Pulse Operational Matrices

Du-su Ahn[1], Tai-hoon Kim[1], Don-ki In[1], Seung Lee[2]
[1] Sung kyun kwan Univ., [2] Dae Lim College

Abstract - This paper considers the problem of identifying the time-varying parameters of Bilinear systems. The Parameters, in this paper, are identified by using the EBPOMs (Extended Block Pulse Operational Matrices) which can reduce the burden of operation and the volume of error caused by matrices multiplication

1. 서 론

연속시간모델 식별을 위하여 다양한 직교함수들(월쉬함수, 블럭펄스함수등)과 직교 다항식들(Chebyshev 다항식, Legendre 다항식, Laguerre 다항식 등)이 제안되었다.[1-4]. 이러한 기법들의 공통적인 목적은 연속시간 시스템들의 미분방정식 모델에 나타나는 입출력 신호들의 시간 미분치에 대한 직접측정을 피하는 것이다. 연속시간 입출력 신호들의 시간 미분치에 대한 직접 측정을 피하는 것이다. 연속시간 입출력 신호들을 근사화된 급수로 전개하고 적분 연산행렬을 적용하면 선형 대수방정식 집합들을 얻을 수 있고 그 미분 방정식들의 파라미터들을 추정할 수 있다. 이러한 기법들을 사용하여 연속시간 모델식별에 관한 만족스런 결과들을 얻을 수 있다. 시스템 공학(System Science)에 대한 직교함수들의 적용은 Corrington에 의해 제안되었다[5]. Corrington은 상미분 방정식을 풀기위해 월쉬연산행렬들을 구성하였는데, 후에 Chen과 Hsiao[6-7]가 그중 하나를 월쉬연산행렬로 채택한 것이 일반화되어 사용되었다. 그 후 만일 적분연산행렬이 월쉬영역으로부터 블럭펄스영역으로 전환된다면 계산상의 복잡함이 현저히 줄어든다는 것이 밝혀졌다[8-9]. 또한 선형 시변인 경우에 편리한 확장된 블록펄스적분연산행렬(EBPOMs)[10]로 $P_{i,j}$ $(i, j = 0, 1, 2, \cdots)$가 유도되었고, 유도된 행렬 $P_{i,j}$를 사용함으로써 시변인 경우 연산이 간단해지고 정확성이 향상될 수 있다는 것이 밝혀졌다[11].

본 논문에서는 확장된 블럭펄스 적분연산행렬을 적용하여 비선형 시스템의 일종인 쌍일차계의 시변 파라미터들을 추정하였다.

2. 본 론

2.1 확장된 블럭 펄스 연산 행렬

다음과 같이 시변 요소를 갖는 형태로 주어진 적분을 고려해본다[11].

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i\text{번}} t^j f(t)\, dt \cdots dt$$

(단, $i,j=0,1,2,\cdots$) (1)

이러한 형태를 갖는 적분들의 블럭 펄스 급수 전개는 선형 시변 시스템들의 문제를 풀 때 유용하다. 사실 이런 형태의 적분은 $r(t)=t_j$로 하여 CBPOM P를 써서

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i\text{번}} t^j f(t)\, dt \cdots dt \doteq E^T D_f D_r P^i \Psi_{(m)}(t) \quad \text{(i)}$$

로 풀 수 있으며, 또는 GBPOMs를 써서

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i\text{번}} t^j f(t)\, dt \cdots dt \doteq E^T D_f D_r P_i \Psi_{(m)}(t) \quad \text{(ii)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{단,}\quad E=[1\ 1\ \cdots\ 1]^T,\quad f^T=[f_1\ f_2\ \cdots\ f_m], \\ r^T=[r_1\ r_2\ \cdots\ r_m],\quad D_f=diag(f_1\ f_2\ \cdots\ f_m), \\ D_r=diag(r_1\ r_2\ \cdots\ r_m) \end{array}\right)$$

로 풀 수 있다. 그러나 위 두 식에서는 함수들의 곱과 적분이 분리되어 블럭 펄스 급수로 근사화 된다. 이러한 불리 계산으로 인하여 계산량이 많아지고 더 많은 계산상의 오차가 발생하게 된다. 이런 단점을 피하기 위해서, 식(1)을 한 단계만에 블럭펄스 급수로 전개할 수 있다. 먼저 식(1)에서, $f(t)=\phi_k(t)$인 특별한 경우를 생각해 본다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \phi_k(t))\, dt \cdots dt \tag{2}$$

여기서, $k = 1, 2, 3, \cdots, m$이다. 블럭펄스함수는 지연을 갖는 단위 계단함수로 표현할 수 있으므로 다음처럼 나타낼 수 있다. (단, $h=\frac{T}{m}$)

$$\begin{aligned} t^j\phi_k(t) &= t^j u(t-(k-1)h) - t^j u(t-kh) \\ &= \{(t-(k-1)h)+(k-1)h\}^j u(t-(k-1)h) \\ &\qquad -((t-kh)+kh)^j u(t-kh) \end{aligned} \tag{3}$$

앞의 식(3)에 이항정리(binomial theorem)를 적용하면 식(4)에서

$$\begin{aligned} t^j\phi_k(t) = &\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}(t-(k-1)h)^q u(t-(k-1)h) \\ &-\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}(t-kh)^q u(t-kh) \end{aligned} \tag{4}$$

이 되고, 다시 이 식에 라플라스 변환을 행하면

$$\begin{aligned} L\{t^j\phi_k(t)\} = &\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}\frac{q!}{s^{q+1}}\exp\{-(k-1)hs\} \\ &-\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}\frac{q!}{s^{q+1}}\exp\{-khs\} \end{aligned} \tag{5}$$

과 같이 된다. 위식은 라플라스 변환의 적분 특성에 의하여

$$\begin{aligned} &L\left\{\int_0^t \cdots \int_0^t t^j\, \phi_k(t)\, dt \cdots dt\right\} \\ &= \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-q}\frac{!}{s^{i+q+1}}\exp\{-(k-1)hs\} \\ &\qquad -\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}\frac{!}{s^{i+q+1}}\exp\{-khs\} \end{aligned} \tag{6}$$

와 같이 표현될 수 있다. 식(6)에 다시 라플라스 역변환을 행하면

$$\begin{aligned} &\int_0^t \cdots \int_0^t t^j\, \phi_k(t)\, dt \cdots dt \\ &= \sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}((k-1)h)^{j-}\frac{q!}{(i+q)!}(t-(k-1)h)^{i+q}u(t-(k-1)h) \\ &\quad -\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}(kh)^{j-q}\frac{q!}{(i+q)!}(t-kh)^{i+q}u(t-kh) \\ &= [c_{i,j,k,1}\ c_{i,j,k,2}\ \cdots\ c_{i,j,k,m}]^T\Psi_{(m)}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

으로 나타낼 수 있다.

이때, 행렬이 원소 $c_{i,j,k,l}$$(l=1,2,\cdots,m)$은 다음 식으

로부터 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
c_{i,j,k,l} &= \frac{1}{h}\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \psi_k(t)\,dt\cdots dt \quad ((l-1)h \le t \le lh) \\
&= \begin{cases} 0, & l<k \\ h^{i+j}\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}\frac{q!}{(i+q+1)!}(k-1)^{j-q}, & l=k \\ h^{i+j}\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}\frac{q!}{(i+q+1)!}\{(k-1)^{j-q}[(l-k+1)^{i+q+1} \\ \quad -(l-k)^{i+q+1}]-k^{j-q}[(l-k)^{j+q+1}-(l-k-1)^{j+q+1}]\}, & l>k \end{cases}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

식 (7)을 이용하여, m개의 블럭펄스 함수적분의 블럭펄스 그 수를 다음처럼 하나의 행렬 $P_{j,k}$로 표현할 수 있다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^j \psi_k(t)\,dt\cdots dt \doteq P_{i,j}\Psi_{(m)}(t) \tag{9}$$

$$
P_{i,j} = \frac{j!\,h^{i+j}}{(i+j+1)!}\begin{pmatrix} p_{i,j,1,1} & p_{i,j,1,2} & p_{i,j,1,3} & \cdots & p_{i,j,1,m} \\ 0 & p_{i,j,2,2} & p_{i,j,2,3} & \cdots & p_{i,j,2,m} \\ 0 & 0 & p_{i,j,3,3} & \cdots & p_{i,j,3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{i,j,m,m} \end{pmatrix} \tag{10}
$$

$$
p_{i,j,k,l} = \begin{cases} 0, & l<k \\ \sum_{q=0}^{j}\frac{(i+j+1)!}{(j-q)!(i+q+1)!}(k-1)^{j-q}, & l=k \\ \sum_{q=0}^{j}\frac{(i+j+1)!}{(j-q)!(i+q+1)!}(k-1)^{j-q}[(l-k+1)^{i+q+1} \\ \quad -(l-k)^{i+q+1}]-k^{j-q}[(l-k)^{j+q+1} \\ \qquad -(l-k-1)^{j+q+1}]\}, & l>k \end{cases}
$$

식(10)의 행렬 $P_{i,j}$는 피적분항에 t^j항을 가진 함수의 i번 적분과 관련된 블럭펄스 적분 연산행렬, 즉 t^j와 관련된 i번째 확장된 적분연산행렬로 정의된다. 행렬 $P_{i,j}$로부터 GBPOMs[10]로 표현되는 P_i는 $P_i = P_{i,0}$ $(i=1,2,\cdots)$가 되어 $P_{i,j}$의 특수한 경우라는 것을 알 수 있다. 또한, CBPOM은 $P = P_{1,0}$가 됨을 알 수 있다.

지금까지의 결과로부터 식(1)의 블럭펄스 급수전개는 다음 식처럼 한단계로 얻어질 수 있음을 알 수 있다.

$$\int_0^t \cdots \int_0^t t^j f(t)\,dt\cdots dt \doteq f^T P_{i,j}\Psi_{(m)}(t) \tag{iii}$$

앞의 식 (i), (ii) 그리고 (iii)으로부터 EBPOMs을 썼을때의 장점을 다음처럼 요약할 수 있다.

[장점 1] 시변 요소인 t를 따로 계산하지 않아도 되므로 연산량이 감소하게 된다. (식 (i), (ii)와 식 (iii)의 비교로 알 수 있다.)

[장점 2] 다중 적분을 행할 때 연산 행렬의 곱을 피할 수 있게 되므로 오차의 누적을 줄일 수 있다.

2.2 쌍일차계(BLS : Bilinear System)

쌍일차계(BLS)는 가장 간단한 형태의 비선형계이다. 비선형계의 특성은 상태들만에 대해서, 또는 제어 입력만에 대해서는 선형성을 갖게되지만, 상태와 제어 입력에 대해 동시에 선형성을 갖지는 못한다는 것이다. 다시 말해서 상태와 제어 입력의 곱을 포함하고 있다는 것이고, 그럼으로 인하여 중첩의 원리가적용될 수 없게 된다는 것이다. 상태와 입력이 곱해진 구조로 되어 있는 비선형계에 속하는 쌍일차계는 선형계의 특성과 비선형계의 특성을 동시에 가지고 있다. 실제계는 거의가 비선형계인데, 이것은 취급이 어렵기 때문에 선형계에 가까운 쌍일차계를 이용하여 비선형계를 다룬다. BLS는 가장 간단한 형태의 비선형 시스템이고, 다음의 식 (11)과 같은 형식을 갖는다. 이 때, 주어진 시스템이 안정하고 모든 상태의 측정이 가능하다고 가정하고 시변 파라미터를 추정한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + \sum_{k=1}^{q} N_k u_k(t)\,x(t) \tag{11}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{단, } x \in R^n,\ u \in R^q,\ N_k(k=1,2,\ldots,q) \in R^{n\times n} \\ A \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times q} \end{array} \right)$$

행렬 $A(t)$, $B(t)$ 그리고 $N_k(t)$등은 시변 요소를 포함하고 있으며, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
A(t) &= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_\sigma t^\sigma \\
B(t) &= b_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots + B_s t^s \\
N_1(t) &= N_{10} + N_{11} t + N_{12} t^2 + \ldots + N_{1l_1} t^{l_1} \qquad \vdots \\
N_q(t) &= N_{q0} + N_{q1} t + N_{q2} t^2 + \ldots + N_{ql_q} t^{l_q}
\end{aligned}
$$

식 (11)의 i번째 행을 쓰면

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) = {} & a_i^0 x(t) + a_i^1 t x(t) + \ldots + a_i^\sigma t^\sigma x(t) \\
& + b_i^0 u(t) + b_i^1 t u(t) + \ldots + b_i^s t^s u(t) \\
& + n_{1i}^0 u_1(t)\,x(t) + n_{1i}^1 t u_1(t)\,x(t) + \ldots \\
& + n_{1i}^{l_1} t^{l_1} u_1(t)\,x(t) + \ldots \\
& + n_{qi}^0 u_q(t)\,x(t) + n_{qi}^1 t u_q(t)\,x(t) + \ldots \\
& + n_{qi}^{l_q} t^{l_q} u_q(t)\,x(t)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

과 같이 될 수 있고, a_i, b_i와 n_{qi}는 각각 행렬 A, B, 그리고 N_q 의 i 번째 행벡터와 같다. 위 식은 다시 다음의 식 (13)로 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) = {} & a_i^0 x(t) + a_i^1 t x(t) + \ldots + a_i^\sigma t^\sigma x(t) \\
& + b_i^0 u(t) + b_i^1 t u(t) + \ldots + b_i^s t^s u(t) \\
& + n_{1i}^0 \begin{bmatrix} u_1(t)\,x_1(t) \\ u_1(t)\,x_2(t) \\ \vdots \\ u_1(t)\,x_n(t) \end{bmatrix} + \ldots + n_{1i}^{l_1} t^{l_1} \begin{bmatrix} u_1(t)\,x_1(t) \\ u_1(t)\,x_2(t) \\ \vdots \\ u_1(t)\,x_n(t) \end{bmatrix} \\
& + \ldots \\
& + n_{qi}^0 \begin{bmatrix} u_q(t)\,x_1(t) \\ u_q(t)\,x_2(t) \\ \vdots \\ u_q(t)\,x_n(t) \end{bmatrix} + \ldots + n_{qi}^{l_q} t^{l_q} \begin{bmatrix} u_q(t)\,x_1(t) \\ u_q(t)\,x_2(t) \\ \vdots \\ u_q(t)\,x_n(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

식(13)을 t=0에서 t=T 까지 적분한 후 블록 펄스 급수로 전개한다. $x(t)$ 와 $u(t)$를 블록 펄스 급수 전개한 것을 각각

$$x(t) = \Gamma^T \Psi_{(m)}(t) \tag{14-1}$$

$$u(t) = \Delta^T \Psi_{(m)}(t) \tag{14-2}$$

로 놓으면 $u_i(t)\,x_j(t)$는

$$u_i(t)\,x_j(t) = \Delta_i^T D_{\gamma_i} \Psi_{(m)}(t) \tag{15}$$

(단, γ_j는 Γ의 j번째 행)

로 쓸수 있으므로 적분의 결과는 다음과 같게 된다.

$$
\begin{aligned}
& \Psi_{(m)}^T(t)[\gamma_i - X_{0,i}] \\
& = \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,0}^T \Gamma (a_i^0)^T + \ldots + \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,\sigma}^T \Gamma (a_i^\sigma)^T \\
& + \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,0}^T \Delta (b_i^0)^T + \ldots + \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,s}^T \Delta (b_i^s)^T \\
& + \Psi_{(m)}^T(t)[P_{1,0}^T D_{\gamma_1}^T \Delta_1 \vdots \ldots \vdots P_{1,0}^T D_{\gamma_n}^T \Delta_1](n_{li}^0)^T + \\
& \ldots + \Psi_{(m)}^T(t)[P_{1,l_1}^T D_{\gamma_1}^T \Delta_1 \vdots \ldots \vdots P_{1,l_1}^T D_{\gamma_n}^T \Delta_1](n_{li}^{l_1})^T \\
& + \ldots \\
& + \Psi_{(m)}^T(t)[P_{1,0}^T D_{\gamma_1}^T \Delta_q \vdots \ldots \vdots P_{1,0}^T D_{\gamma_n}^T \Delta_q](n_{qi}^0)^T + \\
& \ldots + \Psi_{(m)}^T(t)[P_{1,l_q}^T D_{\gamma_1}^T \Delta_q \vdots \ldots \vdots P_{1,l_q}^T D_{\gamma_n}^T \Delta_q](n_{qi}^{l_q})^T
\end{aligned}
$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{단, } X_{0,i}\text{는 } x_i(t)\text{의 초기치의 블럭 펄스 급수 벡터,} \\ \qquad \Delta_q\text{는 } \Delta \text{ 의 } q\text{번째 행} \end{array} \right.$$

간략하게 다시 쓰면

$$
\begin{aligned}
& \Psi_{(m)}^T(t)[\gamma_i - X_{0,i}] \\
& = \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,0}^T \Gamma (a_i^0)^T + \ldots + \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,\sigma}^T \Gamma (a_i^\sigma)^T \\
& + \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,0}^T \Delta (b_i^0)^T + \ldots + \Psi_{(m)}^T(t) P_{1,s}^T \Delta (b_i^s)^T \\
& + \Psi_{(m)}^T(t) F_{l_1,0,1}(n_{1i}^0)^T + \ldots + \Psi_{(m)}^T(t) F_{l_1,l_1,1}(n_{1i}^{l_1})^T \\
& + \ldots \\
& + \Psi_{(m)}^T(t) F_{l_q,0,q}(n_{qi}^0)^T + \ldots + \Psi_{(m)}^T(t) F_{l_q,l_q,q}(n_{qi}^{l_q})^T
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(단, $F_{l_q,l_q,q} = [P_{1,l_q}^T D_{\gamma_1}^T \Delta_q \vdots \ldots \vdots P_{1,l_q}^T D_{\gamma_n}^T \Delta_q]$)

과 같이 될 수 있다. 식 (16)를 행렬 형태로 표현하면 다음 식 (17)이 된다.

$$\Psi_{(m)}^T(t)[\gamma_i - X_{0,i}]$$
$$= \Psi_{(m)}^T(t)[P_{1,0}^T\Gamma \vdots \ldots \vdots P_{1,\sigma}^T\Gamma \vdots P_{1,0}^T\Delta \vdots \ldots \vdots P_{1,s}^T\Delta \vdots F_{l_1,0,1} \vdots \ldots \vdots F_{l_1,l_1,1} \vdots F_{l_q,0,q} \vdots \ldots \vdots F_{l_q,l_q,q}]$$
$$\times [a_i^0 \vdots \ldots \vdots a_i^\sigma \vdots b_i^0 \vdots \ldots \vdots b_i^s \vdots n_{1i}^0 \vdots \ldots \vdots n_{1i}^{l_1} \vdots n_{qi}^0 \vdots \ldots \vdots n_{qi}^{l_q}]^T \quad (17)$$

위 식은 다시 간단한 형태로 표현될 수 있다.

$$\Psi_{(m)}^T(t)[\gamma_i - X_{0,i}] = \Psi_{(m)}^T(t)\ H\ \theta_i$$

$$\left\{ \text{단, } H = [P_{1,0}^T\Gamma \vdots \ldots \vdots P_{1,\sigma}^T\Gamma \vdots P_{1,0}^T\Delta \vdots \ldots \vdots P_{1,s}^T\Delta \vdots F_{l_1,0,1} \vdots \ldots \vdots F_{l_1,l_1,1} \vdots F_{l_q,0,q} \vdots \ldots \vdots F_{l_q,l_q,q}], \right.$$

$$\left\{ \text{단, } \theta_i = [a_i^0 \vdots \ldots \vdots a_i^\sigma \vdots b_i^0 \vdots \ldots \vdots b_i^s \vdots n_{1i}^0 \vdots \ldots \vdots n_{1i}^{l_1} \vdots n_{qi}^0 \vdots \ldots \vdots n_{qi}^{l_q}]^T \right.$$

여기서 $H \in R^{m\times a}$, $\theta_i \in R^{a\times 1}$ 이 되므로 , $m \ge a$ 의 관계로 만족하도록 블럭펄스 함수의 전개 항수 m을 결정한다면 행렬 $P_{i,j}$의 모든 열은 상삼각행렬 특성을 유지하여 항상 선형 독립이 되기 때문에 θ_i는 최소자승법에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.[12]

$$\theta_i = (H^T H)^{-1} H^T [\gamma_i - X_{0,i}] \quad (18)$$

2.3 시뮬레이션

다음과 같은 식으로 주어지고 초기값을 '영'으로 하는 쌍일차계를 가정한 후, 확장된 블럭펄스적분연산행렬(EBPOMs)을 이용하여 파라미터를 구하였다.

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t) + N_1(t)u(t)\,x(t) \quad (19)$$

(단, $x \in R^{2\times 1}$, $u \in R^{-1}$, $B \in R^{2\times 1}$, $N_1 \in R^{2\times 2}$)

주어진 식의 계수 행렬들이 각각 다음과 같다고 하면

$$B(t) = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{12}t + b_{13}t^2 \\ b_2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_{12} \\ 0 \end{bmatrix} t^2 \quad (20)$$
$$= B_0 + B_1 t + B_2 t^2$$

$$N_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & n_{112}t^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_{112} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^2 = N_{12}t^2 \quad (21)$$

앞서 전개하였던 식에 따라

$$\dot{x}_1 = b_{11}u(t) + b_{12}tu(t) + b_{13}t^2u(t) + n_{11}{}^2 t^2 \begin{bmatrix} u(t)x_1(t) \\ u(t)x_2(t) \end{bmatrix} \quad (22\text{-}1)$$

$$\dot{x}_2 = b_2 tu(t) \quad (22\text{-}2)$$

이 됨을 알 수 있다. 앞 식들을 블럭펄스 함수로 전개하면 다음의 식

$$\Psi_{(m)}^T(t)\ r_1$$
$$= \Psi_{(m)}^T(t)\ P_{1,0}^T\Delta(b_{11}) + \Psi_{(m)}^T(t)\ P_{1,1}^T\Delta(b_{12})$$
$$\Psi_{(m)}^T(t)\ P_{1,2}^T\Delta(b_{13}) + \Psi_{(m)}^T(t)\ P_{1,2}^T D_{r_2}\Delta(n_{112}) \quad (23\text{-}1)$$

$$\Psi_{(m)}^T(t)\ r_2 = \Psi_{(m)}^T(t)\ P_{1,1}^T\Delta(b_2) \quad (23\text{-}2)$$

이 되고, 이것을 행렬 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\Psi_{(m)}^T(t)\ r_1 = \Psi_{(m)}^T(t)\ H_1\ \theta_1 \quad (24\text{-}1)$$

$$\Psi_{(m)}^T(t)\ r_2 = \Psi_{(m)}^T(t)\ H_2\ \theta_2 \quad (24\text{-}2)$$

여기서 H_1, H_2, θ_1, θ_2은 다음을 만족한다.

$$H_1 = [\ P_{1,0}^T\Delta \vdots\ P_{1,1}^T\Delta \vdots\ P_{1,2}^T\Delta \vdots\ P_{1,2}^T D_{r_2}\Delta\ ]$$
$$H_1 = P_{1,1}^T\Delta$$
$$\therefore H_1 \in R^{m\times 4},\quad H_2 \in R^{m\times 1} \quad (24\text{-}3)$$
$$\theta_1^T = [b_{11} \vdots b_{12} \vdots b_{13} \vdots n_{112}],\quad \theta_2^T = b_2$$
$$\therefore \theta_1 \in R^4,\quad \theta_2 \in R^1$$

위식에서, 전개항수(m개)가 미지 파라미터의 수(4개, 1개)보다 많으면 식(25)에서와 같이 파라미터를 결정할 수 있다.

$$\theta_1 = (H_1^T H_1)^{-1} H_1^T r_1 \quad (25\text{-}1)$$

$$\theta_2 = (H_2^T H_2)^{-1} H_2^T r_2 \quad (25\text{-}2)$$

다음의 표 1은 구간 [0,1)에서 16항 전개하였을 때와 32항 전개하였을 때의 결과이다.

전개항수 m	$\hat{b}_{11}$	$\hat{b}_{12}$	$\hat{b}_{13}$	$\hat{n}_{112}$	$\hat{b}_2$
16	0.9149	2.1742	2.8057	4.6640	1.9027
32	0.9744	2.0150	2.8569	5.0210	1.9497
참 값	1	2	3	5	2

표 1. 파라미터들의 추정값
Table 1. Identified value of parameters

3. 결 론

쌍일차계의 파라미터를 추정하기 위해서는 제어입력과 상태의 곱으로 이루어진 항의 처리가 문제로 남아있었는데 이것은 직교함수의 비결합 특성을 통해 해결할 수 있다는 것이 밝혀졌다. 하지만 쌍일차계의 파라미터가 시변 요소를 포함하고있을 경우의 추정은 복잡한 연산과정에 의존할 수밖에 없었다. 본 논문은 비선형계의 일종인 쌍일차계의 시변 요소를 갖는 파라미터를 추정하는데 확장된 블럭펄스 적분연산행렬의 특성을 최초로 적용하였고, 그결과 연산과정이 간단해짐을 수식을 통해 보였다. 또한, 파라미터의 추정과정에서 블럭펄스함수의 비결합 특성을 간접적으로 보였다. 확장된 블럭펄스 적분연산행렬의 특성은 다중입출력(MIMO)시스템이나 시간 지연을 포함하는 시스템의 파라미터 추정에도 유용할 것으로 생각된다.

[참 고 문 헌]

[1] K. R. Palisamy, "System Identification via Block Pulse Functions", Int. J. Systems Sci. Vol. 10, pp. 1493, 1981.
[2] G. P. Rao, "System Identification via Walsh Functions", Pro. IEE., Vol. 122, pp. 1160, 1975
[3] P. R. Clement, "Laguerre Functions in System Analysis and Parameter Identification", J. Fran. Inst., Vol. 133, pp. 85, 1982
[4] Paraskevopoulds, :Legendre Series Approach to Identification and Analysis of Linear Systems", IEEE. Trans, Auto. Cont., Vol. 30, pp. 585, 1985
[5] N. S. Corrington, "solution of Differential and Integral Equations with Functions", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-20, No. 5, pp. 470, 1973
[6] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-20, pp. 596, 1975
[7] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A State Space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int. J. Systems Sci., Vol. 6, pp. 833, 1975
[8] C. F. Chen, Y. T. Tsay and T. T. Wu, "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems", J. Fanklin Inst., Vol. 303, pp. 267, 1977
[9] C. Hwang and T. Y. Guo, "Identification of Lumped Linear Time-varying Systems via Block Pulse Functions", Int. J. Systems Sci., Vol. 15, pp. 361, 1984
[10] C. H. Wang, "Generalized Block Pulse Operational Matrices and Their Applications to Operational Calculus", Int. J. Control, Vol. 36, No. 1, pp. 67 1982
[11] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block-pulse Functional and Their Applications in Control Systems", Springer-Verlag, 1992
[12] G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications", 2nd ed., Academic Press, pp. 103, 1980
[13] N. S. Hsu, "Identification of Non-linear Distributed Systems via Block-pulse Functions", Int. J. Control, Vol. 36, No. 2, pp. 281, 1982
[14] M. S. P. Sinha, V. S. Rajamani and A. K. Sinha, "Identification of Non-linear Distributed Systems Using Walsh Functions", Int. J. Control, Vol. 32, No. 4, pp. 669, 1980