

GPS/INS 통합 항법시스템의 성능분석에 관한 연구

* 조재범*, 원종훈*, 고선준**, 이자성**
 *아주대학교 제어계측공학과, **아주대학교 전자공학부

Performance Analysis of GPS/INS Integrated Navigation Systems

J. B. Cho, J. H. Won, S. J. Ko, J. S. Lee
 Ajou University *Department of Control & Instrument, **Department of Electronics

Abstract This paper compares two methods of GPS/INS integration: tightly-coupled integration and loosely-coupled integration. In the tightly-coupled method an integrated Kalman filter is designed to process raw GPS measurement data for state update and INS data for propagation. The loosely-coupled integration method uses the solution outputs from a stand-alone GPS receiver for update. The loosely-coupled method is simpler and can readily be applied to off-the-self receivers and sensors while the tightly-coupled integration requires access to raw measurement mechanism of the receiver. Simulation result show that the tightly-coupled integration system exhibits better performance and robustness than loosely-coupled integration method.

1. 서 론

관성항법시스템(Inertial Navigation System: INS)은 외부 장치의 도움 없이 항체의 위치, 속도 및 자세를 결정할 수 있으나, 관성센서의 오차성분이 누적됨으로써 부정확한 항법해를 나타내는 단점이 있다[1][2].

Global Positioning System(GPS)은 의사거리(pseudorange)를 이용하여 수신기의 위치와 속도를 제공하는 항법시스템으로써 장시간동안 안정성을 보장할 수 있으나 전파 차단, 가시위성수 부족에 의하여 항법해를 얻을 수 없는 경우가 발생할 수 있다[3].

따라서 GPS와 INS의 통합항법시스템 구현을 통하여 상호 보완적인 시스템의 구성이 가능하며 각 독립적인 시스템과 비교해볼 때 성능향상과 강인성을 얻을 수 있다. 통합시스템 구성방법은 크게 강결합방식(tightly-coupled)과 약결합방식(loosely-coupled)으로 나눌 수 있다. 강결합방식은 GPS의 raw 데이터를 이용하는 방법으로써 필터의 설계시 복잡성과 계산량의 증가를 유발하지만 수신시의 수신성능을 향상시킬 수 있고, 약결합방식은 수신기 내부 알고리즘에 의한 추정된 데이터를 이용하는 방법으로 구성이 간단하며 계산량이 감소된다.

본 논문에서는 GPS/INS 통합 방법에 따른 두 가지 항법시스템인 강결합방식과 약결합방식에 대해서 오차모델을 유도하고, 이를 이용한 통합 칼만필터(Kalman Filter)를 설계하며, 모의실험을 통하여 두 가지 시스템의 비교 분석을 수행한다.

2. 본 론

2.1 항법방정식

본 논문에서는 동(N), 북(E), 그리고 수직아래(D)로 표현되는 NED 좌표계를 사용한다. 관성좌표계에서 가속도와 자이로에 의해서 측정되는 항체의 비력과 회전량 그리고 지구의 중력과 자전등을 고려한 NED 좌표계에서의 속도 방정식은 다음과 같다[4].

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n \quad (1)$$

여기서,

$V^n = [V_N \ V_E \ V_D]^T$: 각 NED 방향의 속도성분

C_b^n : 항체 좌표계에서 NED 좌표계로 변환식

f^b : 가속도계 측정값

$$\begin{aligned} \omega_{en}^n &= [\dot{L} \cos L, -\dot{L}, -\dot{L} \sin L]^T \\ &= \left[\frac{V_E}{R_t + h}, \frac{-V_N}{R_m + h}, \frac{-V_D}{R_t + h} \right]^T \\ &= [\rho_N \ \rho_E \ \rho_D]^T \end{aligned}$$

$$\omega_{ie}^n = [\Omega_{ie} \cos L, 0, -\Omega_{ie} \sin L]^T$$

$R_m = R_0(1 - 2e + 3e \sin^2 L)$: 위도방향의 지구반지름

$R_t = R_0(1 + e \sin^2 L)$: 적도방향의 지구반지름

R_0 : 지구타원체의 적도반경

e : 지구의 이심률

Ω_{ie} : 지구회전 각속도

L, l, h : 위도, 경도, 고도

g^n : 지구중력

식(1)로부터 얻은 V^n 을 이용하면 항체의 위도, 경도, 고도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L = \frac{V_N}{R_m + h}, \quad l = \frac{-V_E}{R_m + h}, \quad h = -V_D \quad (2)$$

항체의 자세는 회전벡터를 이용한 쿼터니언을 사용하여 나타내었고 자세오차방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{2}[\omega_{ib}^b] - \frac{1}{2}[\omega_{in}^n]Q \\ &= \frac{1}{2}[\omega_{ib}^b]Q - \frac{1}{2}[C_b^n \omega_{in}^n]Q \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, ω_{ib}^b 는 자이로 측정값이고 ω_{in}^n 는 지구에 대한 항법좌표계의 회전률과 지구회전각속도를 더한 값이다.

2.2 오차식

기준좌표계에 대한 항체의 항법정보를 계산하는 스트랩다운 관성항법시스템(Strap Down Inertial Navigation System, SDINS)은 비선형 상태방정식으로 이루어져 있으므로 섭동(perturbation)방법을 이용하여 선형화된 SDINS 오차방정식을 얻을 수 있다.

위치오차모델과 속도오차모델, 자세오차모델은 다음과 같다[2].

$$\delta L = \frac{\rho_E R_{mm}}{R_m + h} \delta L + \frac{\rho_E}{R_m + h} \delta h + \frac{1}{R_m + h} \delta V_N \quad (4)$$

$$\delta l = \rho_N \sec L (\tan L - \frac{R_n}{R_i + h}) \delta L - \frac{\rho_N \sec L}{R_i + h} \delta h + \frac{\sec L}{R_i + h} \delta V_E \quad (5)$$

$$\delta h = -\delta V_D \quad (6)$$

여기서, $R_{mm} = \frac{\partial R_m}{\partial L} = 6 R_o e \sin L \cos L$

$$R_n = \frac{\partial R_i}{\partial L} = 2 R_o e \sin L \cos L$$

GPS에서의 오차는 의사거리 측정오차의 벡터합으로 모델링할 수 있는데 이 오차는 바이어스와 랜덤오차로 구분된다. GPS의 의사거리 오차모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$PR^i = R^i + c \cdot b + v_s^i + v^i \quad (7)$$

여기서,

- PR^i : i 번째 GPS위성의 의사거리
- R^i : 수신기와 i 번째 GPS위성의 실제거리
- b : 수신기 시계오차
- c : 빛의 속도
- v_s^i : i 번째 GPS위성에 기인한 의사거리 오차
- v^i : 수신기 오차(random noise)

실제거리 R^i 는 지구중심 지구고정(ECEF)좌표계에서 다음과 같이 표시된다.

$$R^i = \sqrt{(x_s^i - x_u)^2 + (y_s^i - y_u)^2 + (z_s^i - z_u)^2} \quad (8)$$

여기서, x_s^i, y_s^i, z_s^i : i 번째 위성의 위치

x_u, y_u, z_u : 수신기의 위치

2.3 강결합과 약결합 GPS/INS 통합시스템

GPS/INS 통합시스템은 이용하는 측정치의 종류에 따라 따라서 강결합 방식과 약결합 방식으로 나뉘어진다. 강결합방식은 GPS의 의사거리와 의사거리변화율을, 약결합 방식은 수신기로부터 추정된 위치와 속도를 측정치로 이용한다. 약결합방식은 구성이 간단하며, 계산부하가 낮으므로 실제 시스템 구현시 쉽게 적용할 수 있는 반면 수신기 내부 알고리즘에 의한 추정치를 이용함으로써 통합 칼만 필터의 최적성을 보장할수 없게 된다.

강결합방식은 GPS의 의사거리 측정치를 이용하므로 필터 설계시 복잡성과 계산부하의 증가를 유발하지만 GPS수신기의 성능을 향상시키며 INS센서오차를 효과적으로 보정할수 있는 장점이 있다. 다음은 각 결합방식에 대한 블럭도이다.

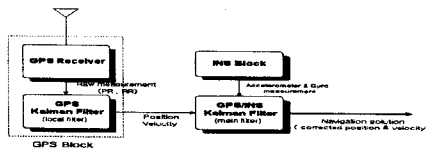


그림1. 약결합 GPS/INS 통합시스템

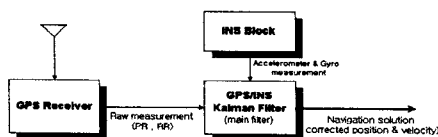


그림2. 강결합 GPS/INS 통합시스템

두 방식 모두 유도된 INS 위치, 속도, 자세오차식과 GPS 의사거리 측정식을 이용하여 전과과정은 INS를, 개

선과정을 GPS를 이용하도록 설계하였다.

본 논문에서는 각 방식을 적용한 통합 칼만필터를 설계하였다.

칼만필터를 구성하기 위한 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = F_{INS} x + w \quad (9)$$

$$z = H_{GPS} x + v \quad (10)$$

여기서, $E[ww^T] = Q, E[vv^T] = R$ 은 공정잡음과 측정잡음에 대한 공분산 행렬을 나타낸다.

강결합 칼만필터의 상태변수는 식(11)과 같이 위치, 속도, 자세, 시계오차 그리고 INS 측정치를 변수로 하는 18차로 구성하였다.

$$x = [L, l, V_N, V_E, \phi, q_1, q_2, q_3, f_x, f_y, w_x, w_y, w_z, h, V_D, f_z, B, \hat{B}] \quad (11)$$

시스템 행렬인 F는 다음과 같이 주어지고 각각의 행렬은 부록에 나타내었다.

$$F_{INS} = \begin{bmatrix} A_{4 \times 4} & B_{4 \times 4} & C_{4 \times 10} \\ D_{4 \times 4} & E_{4 \times 4} & G_{4 \times 10} \\ & & 0_{5 \times 18} \\ & & J_{5 \times 8} & K_{5 \times 10} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,

$$C_n^b \omega_{in}^n = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} [\omega_N \ \omega_E \ \omega_D]^T = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$$

개선과정을 위한 H_{GPS} 를 생성하기 위해서는 지구중심 지구고정좌표계(ECEF-Coordinate)에서의 GPS 측정치인 의사거리를 경위도 좌표계로 변환하는 작업이 필요하며 이를 위하여 체인룰(chain rule)을 이용한다.

$$H_{GPS} = \left[\frac{\partial PR^i}{\partial L} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial l} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial V_N} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial V_E} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial \phi} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial q_1} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial q_2} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial q_3} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial f_x} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial f_y} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial w_x} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial w_y} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial w_z} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial h} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial V_D} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial f_z} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial B} \quad \frac{\partial PR^i}{\partial \hat{B}} \right] \quad (14)$$

여기서,

$$\frac{\partial PR}{\partial L} = \frac{\partial PR}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial PR}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L} + \frac{\partial PR}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial L}$$

$$\frac{\partial PR}{\partial l} = \frac{\partial PR}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial PR}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial PR}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

$$\frac{\partial PR}{\partial h} = \frac{\partial PR}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial PR}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial h} + \frac{\partial PR}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial h}$$

$$\frac{\partial PR}{\partial B} = 1$$

약결합 방식에서의 상태변수는 식(15)와 같고 개선과정의 H_{GPS} 행렬은 수신기에서 출력하는 위도,경도,고도의 측정치와 상태변수와의 관계를 나타내므로 식(16)과 같이 표현된다.

$$x = [L, l, V_N, V_E, \phi, q_1, q_2, q_3, f_x, f_y, w_x, w_y, w_z, h, V_D, f_z] \quad (15)$$

$$H_{GPS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

위의 필터식들은 연속시간에서 설계된것이므로 이산화과정을 거친 이산칼만필터를 이용하게 되며, 적분계산시 수반되는 오차의 감소를 위하여 Runge-Kutta 방법을 이용하였다.

2.4 모의실험

설계된 강결합과 약결합 방식의 통합 칼만필터의 성능 분석을 위해서 모의 실험을 수행하였다.

실제 관성센서의 측정치는 관성좌표계에 대한 측정치이므로 이를 고려한 측정치를 생성하였으며 모의실험에서 사용한 자이로와 가속도계의 오차특성은 다음과 같다.

표1. 모의실험시 사용된 관성센서의 오차

	자이로	가속도계
바이어스	10 [deg/h]	0.01[g]
환산계수	1000 [ppm]	100[ppm]
백색잡음	0.001 [deg/h/√Hz]	5.0[μg/√Hz]

모의실험에서 전체의 항법시간은 약 30분으로 하였고, INS는 20Hz의 측정주기를 가지도록, GPS의 보정주기는 10초마다 이루어지도록 구성하였다.

GPS/INS 통합시스템의 강인성을 확인하기 위하여 모의 실험시 가시위성수를 제한하였으며, 그 구간에서의 가시위성수는 그림 3과 같다.

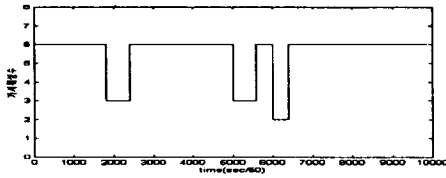


그림 3. GPS 가시위성수

그림 4와5는 GPS와INS를 독립적으로 이용한 위치 추정결과와 각 GPS/INS 통합방식에 따른 위치추정 결과를 함께 도시한 그림이다. 그림에서 확인할 수 있듯이 INS는 관성센서의 누적오차로 인하여 항법시간이 길수록 큰 오차를 나타내며, GPS는 가시위성수가 4개미만인 구간에서 위치 추정이 이루어지지 않음을 볼 수 있다. 반면 통합시스템에서는 실제궤적과 유사하면서 각 독립적인 시스템의 단점이 제거되었음을 확인할 수 있고, 그림 4와5를 비교해 볼 때, 강결합방식에서 더 정확한 위치추정이 이루어짐을 확인할 수 있는데, 이는 칼만필터에서 raw 데이터를 직접 이용함으로써 필터의 최적성을 보장할수 있기 때문으로 사료된다.

그림 6과7은 강결합방식과 약결합방식에서 NED 각 방향의 위치와 속도에 대한 실제궤적 오차를 도시한 그림으로, N과E 방향에서 강결합방식의 경우는 약 30m의 오차를, 약결합방식은 약 50m의 오차를 보인다. 각 결합의 D방향은 약 100m의 오차가 나는것을 확인할수 있는데 이는 GPS의 오차특성으로 인하여 통합시스템의 D방향 위치정확도가 떨어지기 때문이다.

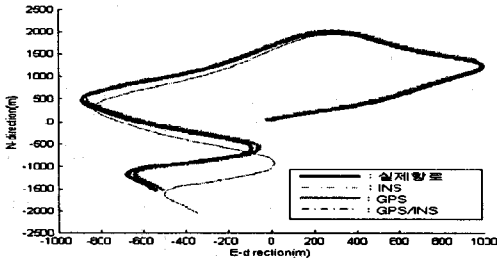


그림 4. 강결합 GPS/INS Integration

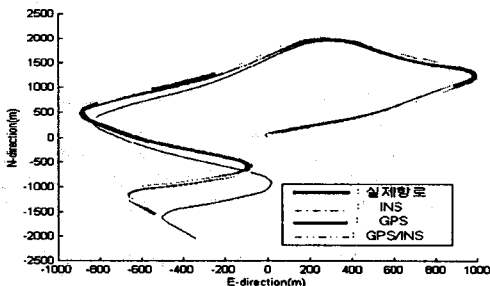


그림 5. 약결합 GPS/INS Integration

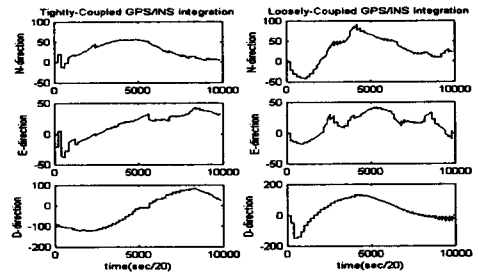


그림 6. 각 결합의 위치오차

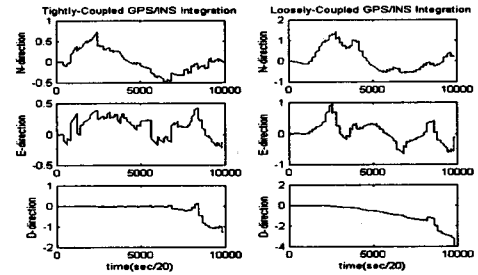


그림 7. 각 결합의 속도오차

3. 결 론

본 논문에서는 GPS에 의한 SDINS의 보정을 하는 두 가지 방식인 강결합방식과 약결합방식에 대해서 비교 분석하였다.

강결합방식과 약결합방식의 오차모델을 유도하고, 각 방식을 적용한 칼만필터를 설계하였으며, 그 성능을 분석하였다. 그 결과 각 통합필터 구현시 GPS 칼만필터의 항법해가 INS 위치정보를 보정하므로 항체의 위치오차는 GPS 항법해의 오차범위내에 존재하게 된다는 것을 확인하였다.

GPS/INS 통합시스템 구현을 통하여 저가의 관성센서와 GPS 수신기를 이용, 높은 정확도와 강인성을 얻을 수 있다는 점을 확인하였다. 또한 강결합방식이 약결합방식보다 구현은 어렵지만 칼만필터의 최적성이 보장되므로 정확한 보정이 이루어짐을 확인하였다.

4. 참고문헌

- [1] George M. Siouris, *Aerospace Avionics System*, Academic Press, 1993.
- [2] K. R. Britting, *Inertial Navigation System Analysis*, Wiley-Interscience, 1971.
- [3] B. W. Parkinson and J. J. Spiler Jr. (ed), *Global Positioning System: Theory and Application*, Vol. I, II, AIAA, Washington, DC, 1996.
- [4] 김진원, 지규인, 이장규, "GPS와 Dead-Reckoning을 이용한 항법시스템의 구성," 한국자동제어 학술회의 논문집, 1994.

부 록

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_E R_{mm}}{R_m + h} & 0 & \frac{1}{R_m + h} & 0 \\ \rho_N \sec L (\tan L - \frac{R_N}{R_i + h}) & 0 & 0 & \frac{\sec L}{R_i + h} \\ -(2\Omega_m \cos L \cdot V_E + \rho_N \sec^2 L V_E - \frac{\rho_E V_D R_{mm}}{R_m + h} + \rho_N \rho_D R_D) & 0 & \frac{V_D}{R_m + h} & -2\Omega_m \sin L - \rho_D \\ -(2\Omega_m \sin L V_D - 2\Omega \cos L V_N - \rho_N \sec^2 L V_N + \frac{\rho_N V_D R_x}{R_i + h} - \frac{\rho_D V_N R_x}{R_i + h}) & 0 & 2\Omega \sin L - \frac{\rho_D V_D}{R_i + h} + \frac{V_N \tan L}{R_i + h} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(q_0 f_x - q_3 f_y + q_2 f_z) & 2(q_1 f_x + q_2 f_y + q_3 f_z) & 2(-q_2 f_x + q_1 f_y + q_0 f_z) & 2(-q_3 f_x - q_0 f_y + q_1 f_z) \\ 2(q_3 f_x + q_0 f_y - q_1 f_z) & 2(q_2 f_x - q_1 f_y - q_0 f_z) & 2(q_1 f_x + q_2 f_y + q_3 f_z) & 2(q_0 f_x - q_3 f_y + q_2 f_z) \\ 2(-q_2 f_x + q_1 f_y + q_0 f_z) & 2(q_3 f_x + q_0 f_y - q_1 f_z) & 2(-q_0 f_x + q_3 f_y - q_2 f_z) & 2(q_1 f_x + q_2 f_y + q_3 f_z) \end{bmatrix}$$

$$C_{4 \times 10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_E}{R_m + h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_N \sec L}{R_i + h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_E V_D}{R_m + h} - \rho_N \rho_D & -\rho_E & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 0 & 0 \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 0 & 0 & 0 & -(\frac{\rho_N V_D}{R_i + h} - \frac{\rho_D V_N}{R_i + h}) & 2\Omega_m \cos L + \rho_N & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{12 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial L} q_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial L} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial L} q_3) & 0 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial V_N} q_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial V_N} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial V_N} q_3) & \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega_1}{\partial V_E} q_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial V_E} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial V_E} q_3) \\ \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial L} q_0 - \frac{\partial \omega_3}{\partial L} q_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial L} q_3) & 0 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial V_N} q_0 - \frac{\partial \omega_3}{\partial V_N} q_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial V_N} q_3) & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial V_E} q_0 - \frac{\partial \omega_3}{\partial V_E} q_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial V_E} q_3) \end{bmatrix}$$

$$D_{22 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_2}{\partial L} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial L} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial L} q_3) & 0 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_2}{\partial V_N} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial V_N} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial V_N} q_3) & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_2}{\partial V_E} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial V_E} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial V_E} q_3) \\ \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_3}{\partial L} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial L} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial L} q_2) & 0 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_3}{\partial V_N} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial V_N} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial V_N} q_2) & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_3}{\partial V_E} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial V_E} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial V_E} q_2) \end{bmatrix}$$

$$E_{12 \times 4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 & \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 - (\omega_x - \omega_y) & \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 - (\omega_x - \omega_z) & \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 - (\omega_x - \omega_y) \\ -\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 + \omega_x - \omega_y & -\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 & -\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 + \omega_x - \omega_z & -\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_3 - (\omega_x - \omega_z) \end{bmatrix}$$

$$E_{22 \times 4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_3 + \omega_x - \omega_z & -\frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_3 - (\omega_x - \omega_z) & -\frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_3 & -\frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_3 + \omega_x - \omega_z \\ -\frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_2 + \omega_x - \omega_z & -\frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_2 + \omega_x - \omega_z & -\frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_2 + \omega_x - \omega_z & -\frac{\partial \omega_3}{\partial \phi} q_0 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi} q_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial \phi} q_2 + \omega_x - \omega_z \end{bmatrix}$$

$$G_{4 \times 10} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} q_1 & -\frac{1}{2} q_2 & -\frac{1}{2} q_3 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial h} q_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial h} q_2 + \frac{\partial \omega_3}{\partial h} q_3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} q_0 & -\frac{1}{2} q_3 & \frac{1}{2} q_2 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_1}{\partial h} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial h} q_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial h} q_3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} q_3 & \frac{1}{2} q_2 & -\frac{1}{2} q_1 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_2}{\partial h} q_0 + \frac{\partial \omega_3}{\partial h} q_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial h} q_2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} q_2 & \frac{1}{2} q_1 & \frac{1}{2} q_0 & \frac{1}{2}(-\frac{\partial \omega_3}{\partial h} q_0 + \frac{\partial \omega_2}{\partial h} q_1 + \frac{\partial \omega_1}{\partial h} q_2) \end{bmatrix}$$

$$J_{5 \times 8} = \begin{bmatrix} 2\omega_m \sin L V_E + \rho_N^2 R_m + \rho_N^2 R_{mm} + 2 \sin L \cos L (g_1 + g_3 h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\rho_E & -2(\omega_m \cos L + \rho_N) & 2(-q_2 f_x + q_1 f_y + q_0 f_z) & 2(q_3 f_x + q_0 f_y - q_1 f_z) & 2(-q_0 f_x + q_3 f_y - q_2 f_z) & 2(q_1 f_x + q_2 f_y + q_3 f_z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{5 \times 10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 0 & 0 & 0 & \rho_N^2 + \rho_E^2 + g_2^2 + g_3^2 \sin^2 L & 0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서, $[D_{4 \times 4} \quad E_{4 \times 4}] = \begin{bmatrix} D_{12 \times 4} & E_{12 \times 4} \\ D_{22 \times 4} & E_{22 \times 4} \end{bmatrix}$