

모형헬리콥터의 수학적 해석

김양욱*, 이광원**, 이자성**, 홍석교**
 * 아주대학교 대학원 전자공학부, ** 아주대학교 전자공학부

Mathematical Analysis of Model Helicopter

Y.O.Kim*, K.W.Lee**, J.S.Lee**, S.K.Hong**
 * School of Electronics Eng. Ajou Univ. ** School of Electronics Eng. Ajou Univ.

Abstract - Helicopter system is regarded as a challenging example in multivariable robust control application since the dynamics of helicopter is highly coupled and nonlinear. In this paper, Dynamic equations for model helicopter at hover are derived. Various system properties are stated with respect to control of the attitude of the vehicle. A linearized model is used to analyse the system stability and to design the attitude controller. The simulation results of LQG controller are presented.

생성하고 제어를 한다. 기체의 롤, 피치, 요각은 주 날개와 꼬리날개의 피치 각을 이용하여 직접 제어되며 축 방향 속도는 피치와 롤의 자세를 변화시켜 제어한다. 주 날개는 전체적인 피치각을 변경시켜 추력의 크기를 결정하는 콜렉티브 피치와 기체의 롤과 피치 자세를 제어하는 2개의 사이클릭 피치가 있다. 꼬리날개는 주 날개의 회전에 의한 기체의 회전을 상쇄시키는 반 토크의 추력을 생성하고 요 방향 자세를 제어한다.

2.1 날개의 동역학 및 공역학

주 날개의 피치각은 날개의 회전각에 대하여 식(1)과 같이 표현된다(4).

$$\theta = \theta_M - A_1 \cos \Psi - B_1 \sin \Psi \quad (1)$$

단, θ_M : 콜렉티브 피치 입력 각
 A_1, B_1 : 가로, 세로 방향 사이클릭 입력 각
 $\Psi = \Omega t$: 날개의 회전에 의한 방위각

플래핑 방정식의 해가 식(2)와 같이 표현된다고 하면

$$\beta = a_0 - a_{1SM} \cos \Psi - b_{1SM} \sin \Psi \quad (2)$$

단, a_0 : 코닝 각
 a_{1SM}, b_{1SM} : 세로, 가로 방향 플래핑 각

플래핑과 피치각은 식(3)과 같은 관계를 갖는다.

$$a_0 = \gamma \theta_M / 8, a_{1SM} = -B_1, b_{1SM} = A_1 \quad (3)$$

따라서 날개의 입력에 대하여 플래핑의 진폭은 일치하고 위상은 90° 위상 지연된다[1][2]. γ 는 날개의 관성 모멘트 I_b 에 따라 달라진다. 꼬리 날개의 경우에는 사이클릭 입력이 없다. 날개의 회전에 의해 생성되는 추력은 날개의 회전 속도 Ω 의 함수로 식(4)와 같이 표현된다

$$T = C_T \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 \quad (4)$$

단, C_T : 근사적으로 θ 에 비례하는 추력 계수
 ρ : 공기 밀도
 Ω : 날개의 회전 각속도, R : 날개의 길이

토크 Q 는 추력과 항력의 함수로 식(5)로 구한다.

$$Q = \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 R \{ k_p C_T^{1.5} \sqrt{2} + C_d \} \quad (5)$$

단, k_p : 실험 상수, C_d : 항력 계수

1. 서론

헬리콥터는 고정익 비행기와 달리 수직, 선회, 정지 비행과 같은 다양한 비행 모드를 갖고 있기 때문에 개발 초기부터 그 유용성이 증가되어 왔다. 헬리콥터의 동적 방정식은 크게 주 날개의 동역학과 기체에 의한 요소로 나누어진다. 주 날개에 대한 연구는 날개를 강체로 가정한 강체 회전일때의 해석 방법과 현재 활발히 연구되고 있는 공탄성체로서의 유연체 해석 방법이 있는데 Flap, Lead-Lag, Torsion 운동이 이에 속한다[1].

본 논문에서는 먼저 헬리콥터 시스템을 동체 부분과 주 날개 부분으로 나눈 후 동체를 강체로 가정하여 정지 비행 상태에서의 동역학적 방정식을 유도하고 이를 간단한 모형 헬리콥터(Concept 30)에 적용하였다. 조정 또는 외란에 의한 트림 상태에서의 비행 변수의 변화율 즉, 동적 미계수를 추출하여 모형 헬리콥터가 갖는 비행성을 해석하였다. 동적 미계수를 추출하는데 사용되는 공력 하중은 간단한 수학적 모델을 이용하여 계산하였다(2). 비행성은 동안정 계수의 형태로 표현되는 개루프 안정성을 의미한다. 거의 모든 헬리콥터는 특히 정지 비행시 고유한 불안정성을 갖고 있다[1]. 해석한 모형을 대상으로 LQG 제어 이론을 적용하여 정지 비행 자세 제어가 충분히 가능함을 밝힌다.

2. 헬리콥터의 동역학

헬리콥터 모델은 그림 1과 같이 입력, 기구, 회전의, 기체 동력학부로 구성되어 있다.

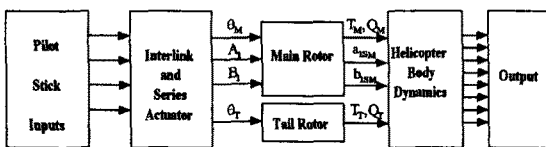


그림 1. 헬리콥터 시스템 구성도

헬리콥터는 주 회전 날개의 회전에 의해 양력, 추력을

2.2 기체의 동역학

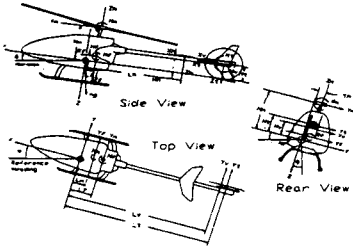


그림 2 비행 좌표계와 자유 물체도

동체 좌표계에서 강체의 운동방정식은 Newton-Euler 방정식을 이용하면 다음과 같이 기술된다[5].

$$\begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}^b \\ \dot{\omega}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^b \times mv^b \\ \omega^b \times J\omega^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^b \\ \tau^b \end{bmatrix} \quad (6)$$

- 단, v^b : 동체의 무게중심에서의 x,y,z 각속도
- ω^b : 동체의 무게중심에서의 x,y,z 축에 대한 각속도
- v^b : 동체의 무게중심에서의 x,y,z 방향의 속도
- ω^b : 동체의 무게중심에서의 축에 대한 각속도
- J: 관성 tensor
- f^b : 기체의 중심에 작용하는 외부 힘
- τ^b : 기체의 축에 작용하는 외부 모멘트

$[v^b, \omega^b]^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 같이 상태 벡터를 정의하면 식(6)의 비선형 방정식은 식(7)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v}^b &= \frac{1}{m}(f^b - \omega^b \times v^b) \\ \dot{\omega}^b &= J^{-1}(\tau^b - \omega^b \times J\omega^b) \end{aligned} \quad (7)$$

따라서, 탄성을 무시한 정상 비행중인 헬리콥터의 운동 방정식은 기체가 가로축에 대하여 대칭을 이루고 있다고 가정하면 동체의 무게중심에 전해지는 힘과 모멘트의 합에 의한 강체의 운동 방정식으로 구해진다[1][3]. 동체의 무게 중심에서의 운동방정식을 각축의 힘과 모멘트 성분으로 표현하면 식(8)와(9)와 같다.

$$\begin{aligned} f_x &= m(\dot{u} + uq - vr) \\ f_y &= m(\dot{v} + ur - wp) \\ f_z &= m(\dot{w} + vp - uq) \\ \tau_R &= \dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{zz} + qr(I_{zz} - I_{yy}) + pqI_{xz} \\ \tau_M &= \dot{q}I_{yy} + pr(I_{xx} - I_{zz}) + (p^2 - r^2)I_{zz} \\ \tau_N &= \dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xx} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + qrI_{xz} \end{aligned} \quad (8)$$

기체에 작용하는 f^b, τ^b 는 식(10)(11)과 같이 정리된다.

$$f^b = \begin{bmatrix} X_M + X_T + X_H + X_V + X_F \\ Y_M + Y_T + Y_H + Y_V + Y_F \\ Z_M + Z_T + Z_H + Z_V + Z_F \end{bmatrix} + R^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\tau^b = \begin{bmatrix} R_M + R_F \\ M_M + M_T + M_F \\ N_M + N_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_M h_M + Z_M l_M + Y_T h_T + Y_V h_V + Y_F h_F \\ -X_M h_M + Z_M l_M - X_T h_T + Z_T l_T - X_H h_H + Z_H l_H - X_V h_V \\ -Y_M l_M - Y_T l_T - Y_V l_V - T_F l_F \end{bmatrix} \quad (11)$$

단, 첨자 M, T, H, V, F 는 각각 주 날개, 꼬리날개, 수평 안정판, 수직 안정판, 기체를 의미한다.

$R \in SO(3)$ 는 Euler 자세 각의 변환 행렬을 의미한다. 정지 비행과 저속의 전진비행 시에는 수직, 수평 안정판 및 기체에 의한 항력 성분을 무시할 수 있다[1][3]. 식(10)(11)의 비선형 항들을 정지 비행일 때 대하여 표현하면 식(12)로 표현된다.

$$\begin{aligned} X_M &= T_M \sin(a_{1s_M} + i_M) \\ Y_M &= T_M \sin(b_{1s_M}) \\ Z_M &= -T_M \cos(a_{1s_M} + i_M) \\ R_M &= \left(\frac{dR}{db_{1s_M}}\right) b_{1s_M} - Q_M \sin(i_M + a_{1s_M}) \\ M_M &= \left(\frac{dR}{da_{as_M}}\right) a_{1s_M} + Q_M \sin(b_{1s_M}) \\ N_M &= Q_M \cos(i_M + a_{1s_M}) \cos(b_{1s_M}) \\ M_T &= -Q_T, \quad Y_T = -T_T, \quad Z_T = T_T b_{1s_T} \end{aligned} \quad (12)$$

단, $i_M = 0$: shaft 축의 기울어짐 각도
 $b_{1s_T} = 0$

식(10)(11)(12)을 이용해 시스템 방정식을 구한다.

3. 모형 헬리콥터의 해석

모형 헬리콥터(Concept 30)를 날개부와 기체부로 나누어 각부에 동적 방정식을 적용하였다. 운동방정식을 기체의 중심 좌표계(그림 2)를 기준으로하고 날개는 수학적으로 간단히 하기 위해 강체로 간주한다. 정지 비행시의 특성을 파악하기 위하여 전체시스템을 8차의 선형 미분 방정식으로 나타내기로 한다. 선형화하는 방법은 먼저 정상 비행을 유지하기 위한, 즉, $f^b = 0, \tau^b = 0$ 을 만족하는 트림조건을 구한 후 트림점에서 테일러 급수 전개를 통해 시스템을 선형화 시킨다. 선형화된 모델은 식(13)과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (13)$$

단, $x = [u, v, w, \phi, \rho, \theta, q, r]$, $u = [\theta_M, \theta_T, A_1, B_1]$

모형 헬리콥터의 주요 parameter 및 정지비행시의 날개의 추력은 표 1 와같이 측정 및 계산되었고 시스템 행렬은 표 2와 같이 구하여졌다.

표 1. 모형 헬리콥터의 주요 파라미터

$$\begin{aligned} T_M &= 31.5183, \quad Q_M = 0.8553, \quad T_T = 1.1867 \\ I_b &= 0.008652, \quad m = 3.2, \quad y_M = 0 \\ l_T &= 0.721, \quad h_T = 0.064, \quad h_m = 0.251, \quad l_m = -0.015 \\ I_{xx} &= 0.025, \quad I_{yy} = 0.0688, \quad I_{zz} = 0.1000, \quad I_{xz} = 0 \end{aligned}$$

표 2. 시스템 행렬값

$$A = \begin{bmatrix} -0.0267 & -0.0205 & 0 & 0 & -0.0554 & -9.8 & 0.2702 & 0 \\ 0.0205 & -0.0324 & 0 & 9.8 & -0.0021 & 0 & -0.0554 & 0.0234 \\ 0 & 0 & -0.9174 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6584 & -0.8597 & 0 & 0 & -8.6878 & 0 & -1.7801 & 0.0838 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.3124 & 0 & 0.2801 & 0 & -3.1572 & 0 & -3.1572 & 0.0115 \\ 0 & 0.5457 & -0.4629 & 0 & 0.0349 & 0 & 0 & -0.1433 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1.8484 & 0 & -1.3286 & 6.9595 \\ -0.2054 & 0.4439 & -6.9595 & 1.3286 \\ -70.8194 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.8843 & 1.5905 & 28.2744 & 42.7165 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27.0560 & 0.1625 & 15.5234 & -81.3142 \\ 125.8398 & -7.4690 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그림 3은 모형 헬리콥터의 개방 루프 극의 위치이다. 시스템의 전체적인 극의 배치는 실제 헬리콥터와 유사하며 고유치 값은 실제 헬리콥터에 비해 큼을 알 수 있다. 이것은 모형 헬리콥터가 실제 헬리콥터에 비해 작고 날개의 회전 속도가 실제 헬리콥터에 비해 빠르므로 전체적인 응답속도가 빠르게 나타나는 것을 의미한다. $0.4197 \pm 0.8307j$ rad/s에 불안정한 극이 원점 근처의 -0.1057 rad/s에 Spiral mode 에 해당하는 안정한 극이 존재함을 알 수 있다.

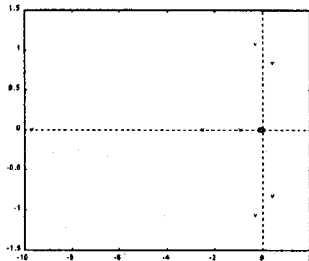


그림 3. 8차 모드의 개방루프 고유치

원점 근처의 안정한 pole은 다른 poles에 비해 상대적으로 멀리 떨어져있고 저주파 영역에서 큰 Condition number를 갖는다. 따라서 저주파 영역에서 임의의 시스템 입력에 대하여 롤각만이 응답이 나타나는 MISO 시스템으로 해석 할 수 있다. 시스템은 0.1 rad/s 이하의 저주파 영역에서 큰 응답비를 갖고 있다. 따라서 롤과 피치에 큰 연성이 존재함을 예상 할 수 있다(2). Condition number가 큰 시스템은 시스템의 작은 변화

에 매우 민감하게 반응하므로 시스템의 견실성이 떨어진 다[4]. 따라서 모형 헬리콥터의 제어시 고주파 영역뿐 아니라 저주파에서도 시스템의 견실성을 보장하는 견실 제어가 요구된다.

4. 정지 비행제어 모의 실험

식(14)과 같이 표현되는 선형 시불변 시스템을 고려한다. LQG 제어 이론은 식(15)로 표현되는 비용함수 J 를 최소화하는 것을 목표로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (14)$$

단, $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p$

$w = W\delta(t-\tau)$, $v = V\delta(t-\tau)$ 인 백색 잡음

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\} \quad (15)$$

단, $Q = Q^T > 0$, $R = R^T \geq 0$ 가중치 행렬

비용함수 J 를 최소화하는 제어 입력 u 는 식(16)와 같다.

$$u = -K_c \hat{x} \quad (16)$$

단, K_c : LQ 제어 이득 행렬

\hat{x} : x 의 추정값

Q, R 을 적절히 선택하여 정지 비행 자세제어를 설계하였다. 그림 4는 롤각과 피치각의 초기값이 10° 일때의 출력 값과 z 축의 속도 및 요의 각 속도 결과이고 그림 5는 입력 u 의 값이다.

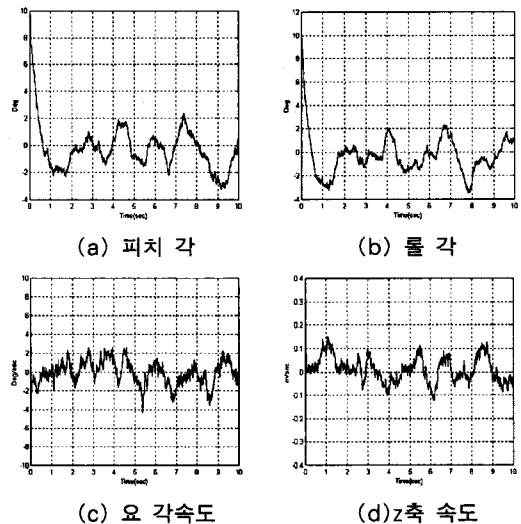


그림 4. 모의 실험 결과

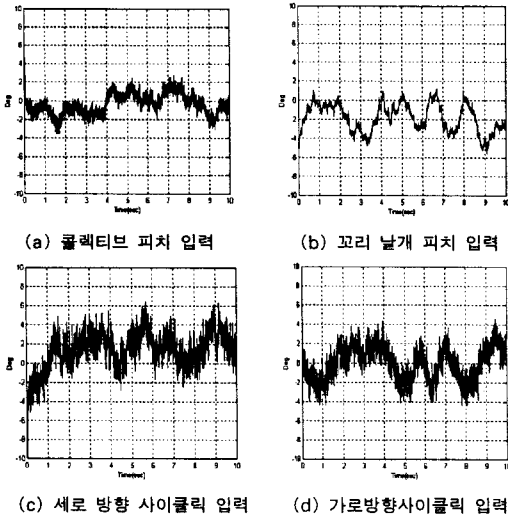


그림 5. 제어 입력값

모의 실험 결과 LQG 제어 이론을 적용하여 모형 헬리콥터의 자세를 충분히 제어 할 수 있음 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 헬리콥터의 동력학 방정식을 간단히 정리하여 모형 헬리콥터에 적용함으로써 그 비행성을 분석하였다. 시스템의 특징은 실제 헬리콥터와 유사한 극 배치를 보이는 것이고 저주파 영역에서 Condition number가 크다는 것이다. 모의 실험을 통해서 10° 의 초기값을 갖는 롤과 피치값을 LQG 제어한 결과 대략 2초후에 약 $\pm 2^\circ$ 편차를 갖는 안정된 범위로 수렴하고 z축의 속도가 0 부근에 유지되어 일정한 고도를 유지하는 자세제어가 가능함을 보여 주었다. 추후 연구 과제로는 보조 날개의(Bell-Hiller 시스템) 수학적 해석과 RC 멀티플렉싱시 발생하는 약 80ms의 시간 지연 및 피치의 급격한 변화에 대한 공기 유입 속도의 지연을 모델링하기위한 연구가 필요하며 불확실한 시스템 모델링에도 시스템의 안정성을 충분히 보장하는 건설제어의 도입이 요구된다.

[참 고 문 헌]

- [1] Prouty, R. W. Helicopter Performance, Stability, and Control, Kreiger Publishing Co. 1995
- [2] A.R.S.Bramwell, Helicopter Dynamics, Edward Arnold, 1986
- [3] Gareth D.Padfield, Helicopter Flight Dynamics, Blackwell Science, 1996
- [4] Sigurd.Skogestad, Ian.Postlethwaite, Multivariable Feedback Control, JHON WIELEY & SONS, 1996