

최적 극배치를 이용한 2관성 공진계의 PID 제어기 설계

전도수, 김동화
대전산업대학교 제어계측공학과

A Design of PID controller in Two-Mass System Using Optimal Pole Assignment

Don Su Jeon, Dong Hwa Kim

Dept. of Control and Instrumentation Engineering, Taejon National University of Technology

Abstract - In the two-mass system driving a load through a flexible shaft or transmission system, a shaft torsional vibration is often generated. In this case, it's difficult to control only by conventional PI controller. To solve this problem, the two-mass speed control system with PID controller is designed by using pole assignment method, and an optimum PID parameters are derived by evaluating ITAE(Integral of time multiplied by the absolute error) performance index. Simulation results show the validity of the proposed PID controller and this controller is compared with the conventional PID controller.

이고 진동하는 특성을 갖는 경우에는 속도명령 변화시나 부하토크 인가시 축에 비틀림 진동이 일어나 제어하기 어렵고 심한 경우 공진이 계속되어 축이 손상되는 등의 문제점이 있다.[2]

2.2 I-PD 제어기

이 제어 방법은 제어 대상의 특성을 정확하게 고차항으로 나타낼 수 있는 경우 미분항을 가미해 고차항으로 보상하여 제어 성능을 향상시키는데 목적이 있다.[6]

근래에는 2관성 속도 제어 시스템의 공역 복소근의 실수부를 동일하게 배치한 후 ITAE 성능지수 평가에 의해 최적 PID 파라미터를 유도하는 제어기 설계 방법[7]이 제안되었고 각 파라미터는 다음과 같다.

$$K_p = 1.448 \omega_a J_L, \quad K_i = 0.492 \omega_a^2 J_L, \quad K_d = 0.566 J_L - J_m \quad (1)$$

1. 서 론

산업용 로봇, 전기 자동차의 구동부, 철강 플랜트의 압연기 구동계, 엘리베이터 등과 같이 전동력을 기계적 부하로 전달하는 가변속도 제어용 2관성 공진계는 전동기와 부하의 관성에 의해 축에 비틀림 진동이 발생한다.[1]

이러한 문제를 해결하기 위하여 상태 관측기를 이용하는 방법[1][2][4], H_∞ 제어를 이용하는 방법[3][4], μ -Synthesis를 이용하는 방법[5] 등 다양하게 연구되고 있다. 그러나 대부분 이들 방법이 제어 성능 및 튜닝 방법은 매우 우수하나 수학적으로 난해하고 복잡한 제어이론이 요구되어 실용적인 면에서는 제한이 있다.

반면 PID 제어기의 제어이론은 지극히 간단하지만 이용자의 편리성 및 범용성은 더욱 증가하는 추세에 있어 선진 각국에서는 더욱 많은 사람들이 연구하거나 많은 제품을 내놓고 있는 실정이다.[6]

본 논문에서는 비례미분 선행형 PID(I-PD) 제어기를 2관성 공진계에 이용하였고, 과도 응답시 시스템의 공역 복소근의 실수부는 주로 정정 시간에 영향을 주는 지수의 감쇠항을 결정하기 때문에 기존의 방법과 달리 서로 동일하지 않게 배치한 후 ITAE 성능지수를 평가함으로써 최적 PID 파라미터를 유도하였다.

최적 설계된 기존의 PID 제어 방법에 비해 제안된 방법이 ITAE 성능지수 값, 정정 시간, 오버슈트, 외란에 대한 회복 시간 등이 개선됨을 시뮬레이션을 통해 확인하였다.

2. 기존의 2관성 공진계의 속도 제어기

2.1 PI 제어기

고전적으로 많이 사용되는 속도 제어기로서 구성이 간단하여 이해하기 쉽고 현장 기술자들이 이 제어기에 익숙하다는 장점이 있다. 그러나 근본적으로 PI 제어기는 제어대상을 1계 시스템으로 근사화하는 것이 가능한 경우에는 잘 적용되지만 2관성계의 시스템과 같이 제어대상이 고차

3. 제안된 2관성 공진계의 PID 제어기 설계

3.1 I-PD 제어기의 적용

I-PD 제어기를 가진 기존의 2관성 속도 제어 시스템이 그림 1에 나타나 있다.[7] 여기서, J_m : 전동기 관성, J_L : 부하 관성, ω_m : 전동기 속도, ω_L : 부하 속도, K_s : 구동축의 비틀림 상수, T_L : 외란 토크, ω_r : 전동기 속도의 기준 입력. 그리고 K_p , K_i , K_d 는 각각 비례, 미분, 적분 계수이다.

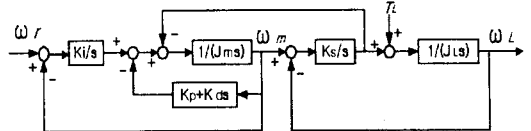


그림 1. I-PD 제어기를 가진 2관성 속도 제어 시스템

기준입력에서 부하속도까지의 폐루프 전달함수는 식 (2)와 같다.

$$\frac{\omega_L(s)}{\omega_r(s)} = \frac{K_i \omega_a^2}{J_m s^2 (s^2 + \omega_0^2) + (K_d s^2 + K_p s + K_i)(s^2 + \omega_a^2)} \quad (2)$$

여기서, ω_a : 반공진주파수, R : 관성비, ω_0 : 공진주파수이고 다음과 같이 정의된다.[4][7]

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K_s}{J_L}}, \quad R = \frac{J_L}{J_m} \quad (3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{K_s \frac{J_m + J_L}{J_m J_L}} = \omega_a \sqrt{1 + R}$$

식 (2)를 두 쌍의 공역 복소근을 갖도록 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2)} \quad (4)$$

여기서, ω_1, ω_2 는 고유 각 주파수, ζ_1, ζ_2 는 감쇠 계수이다.

식 (2)와 (4)에서 식 (5)~(8)이 유도된다.

$$K_p = 2(\zeta_1 \omega_1 + \zeta_2 \omega_2)(J_m + K_d) \quad (5)$$

$$K_i = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_a^2} (J_m + K_d) \quad (6)$$

$$K_d =$$

$$\frac{\omega_a^4 J_L}{\omega_a^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \omega_1 \omega_2) - \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_a^4} - J_m \quad (7)$$

$$\omega_1 \zeta_1 (\omega_2^2 - \omega_a^2) = \omega_2 \zeta_2 (\omega_a^2 - \omega_1^2) \quad (8)$$

K_p, K_i, K_d 에 의해 시스템의 극점이 조정되고 식 (8)은 식 (5)~(7)이 성립하기 위한 조건이 된다.

3.2 극점 배치

식 (4)에서 두 쌍의 공액 복소극의 실수부는 과도 응답의 정정 시간에 영향을 미치는 중요한 요소이므로 극점의 실수부를 동일하지 않게 다음과 같이 배치하자.

$$-\omega_1 \zeta_1 = -\alpha \omega_2 \zeta_2 \quad (9)$$

여기서, α 는 비례 상수이다.

위의 조건하에서 단위계단응답은 식 (4)로부터 얻는다.
 $y(t) =$

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{e^{-\zeta_1 \omega_1 t}}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} [c_1 \sin(\omega_1 \sqrt{1-\zeta_1^2} t - \beta_1)] \\ & - \frac{c_2}{\omega_1} \sin \omega_1 \sqrt{1-\zeta_1^2} t \\ & + \frac{\sqrt{1-\zeta_2^2}}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} \frac{e^{-(1-\frac{1}{\alpha})\zeta_1 \omega_1 t}}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} [c_3 \sin(\omega_2 \sqrt{1-\zeta_2^2} t - \beta_2)] \\ & - \frac{c_4}{\omega_2} \sin \omega_2 \sqrt{1-\zeta_2^2} t \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$c_1 = \frac{\omega_2(4\zeta_2^2 \omega_1^2 - \omega_2^2) + 2\zeta_2(\omega_1^2 - \alpha \omega_2^2) c_4}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

$$c_2 = -\frac{2\zeta_2 \omega_2(\omega_1^2 + \alpha \omega_2^2) + \omega_1^2 c_4}{\omega_2^2}$$

$$c_3 = \frac{\omega_1^2 \omega_2(1 - 4\zeta_2^2) - 2\zeta_2(\omega_1^2 - \alpha \omega_2^2) c_4}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

$$c_4 = \frac{2\zeta_2 \omega_1^2 \omega_2 [\omega_2^2(1 - 4\zeta_2^2)(1 - \alpha) + \omega_2^2 - \omega_1^2]}{4\zeta_2^2 \omega_2^2 (\omega_1^2 - \alpha \omega_2^2)(1 - \alpha) + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta_1^2}}{\zeta_1}, \quad \beta_2 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta_2^2}}{\zeta_2}$$

이고, 식 (10)에서 α 가 응답에 미치는 영향을 분석하면 다음과 같다.

① $\alpha < 1$ 일 때 : $e^{-(1-\frac{1}{\alpha})\zeta_1 \omega_1 t}$ 의 지수항의 부호가 '-'이고 α 가 감소할수록 지수항의 절대값이 커지기 때문에 과다감쇠 현상이 발생한다.

② $\alpha = 1$ 일 때 : $e^{-(1-\frac{1}{\alpha})\zeta_1 \omega_1 t}$ 의 지수항이 0이므로 $e^{-\omega_1 \zeta_1 t}$ 에 의해 감쇠가 결정된다. 이 경우는 시스템의 공액 복소극의 실수부가 서로 동일하기 때문에 참고문헌 [7]에서 제안한 극배치 조건과 같다.

③ $\alpha > 1$ 일 때 : $e^{-(1-\frac{1}{\alpha})\zeta_1 \omega_1 t}$ 의 지수항의 부호가 '+'이고 α 가 증가할수록 지수항이 커지기 때문에 계단응답

시 과소감쇠 현상이 발생하고 $\alpha = 1$ 일 때보다 오버슈트와 진동이 커진다. (단, $1 - \frac{1}{\alpha} < 1$)

그림 2는 반공진 주파수가 1[rad/sec]로 표준화되고 $\zeta_1 = 0.87, \omega_1 = 0.78 \omega_a, 0.2 \leq \alpha \leq 2.0$ 일 때 I-PD 제어기를 가진 2관성 시스템의 계단응답이다.

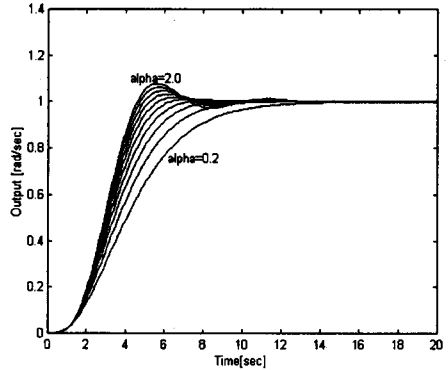


그림 2. α 에 따른 시스템의 계단 응답

앞서 분석한 결과(①~③)가 그림 2에 보이고 있다. 이로써 공액 복소극의 실수부가 동일하지 않을 때 α 가 시스템의 과도응답특성에 영향을 미치고 있음을 수식 및 계단응답으로부터 확인할 수 있다.

식 (8)과 (9)에서 식 (11)을 얻는다.

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(1+\alpha)\omega_a^2 - \omega_1^2}{\alpha}} \quad (11)$$

식 (11)에서 ω_2 는 ω_1 에 의해 결정된다. 따라서 ζ_1 과 ω_1 을 설정한 후 식 (9)와 (11)을 이용하면 극점을 간단히 배치할 수 있다.

3.3 ITAE 성능 평가 및 최적 PID 파라미터 결정

시스템의 성능지수가 최소값을 갖도록 파라미터를 조정하면 최적제어시스템을 구성할 수 있다. 성능지수의 종류에는 ISE, IAE, ITAE, ITSE 등이 있으나 선별성이 가장 높은 ITAE 성능지수를 이용하여 2관성 속도 제어 시스템을 평가함으로써 최적 PID 파라미터를 유도한다.

ITAE 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$ITAE = \int_0^T t |e(t)| dt \quad (12)$$

여기서, 상한 T 는 ITAE 성능지수가 정상상태 값으로 수렴하도록 임의로 정한 유한한 시간이고 $e(t)$ 는 시스템의 응답에 대한 오차이다.

그림 3은 α 에 따른 ITAE 성능지수 값을 나타내고 있다. ITAE 성능지수 값이 α 에 따라 변한다는 것을 알 수 있고 점선보다 실선에서 최소값을 찾을 수 있다.

식 (9)와 (11)에 의해 극점 배치된 I-PD 제어기를 가진 2관성 속도 제어 시스템의 계단응답을 식 (12)로 평가하면 $\omega_a = 1$ [rad/sec]로 표준화되었을 때 $\alpha = 1.4,$

$\zeta_1 = 0.87, \omega_1 = 0.78 \omega_a$ 에서 ITAE 성능지수가 최소값을 가진다. 이를 식 (9)와 (11)에 대입하면 $\zeta_2 = 0.43, \omega_2 = 1.13 \omega_a$ 를 얻을 수 있다. 또한 식 (5)~(7)에 의해 극배치와 ITAE 성능지수에 의한 최적 PID 파라미터는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} K_p &= 1.63 \omega_a J_L, \quad K_i = 0.544 \omega_a^2 J_L, \\ K_d &= 0.7 J_L - J_m \end{aligned} \quad (13)$$

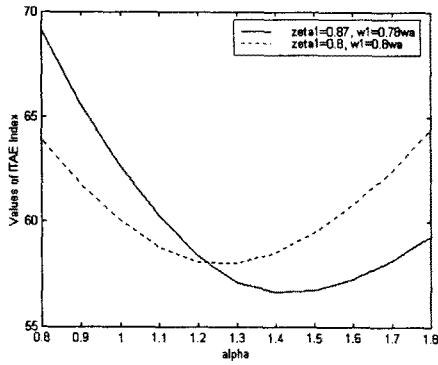


그림 3. α 에 따른 ITAE 성능지수 값

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

4.1 ITAE 성능지수 평가 비교

아래 그림은 $\omega_a = 1$ [rad/sec], $0.8 \leq \alpha \leq 2.0$ 일 때 ITAE 성능지수 최소값과 그 때의 ω_1/ω_a 및 ζ_1 의 값을 보여주고 있다. '*' 표시인 곳은 공액 복소근의 실수부를 동일하게 배치한 기존의 논문[7]에서 사용한 값이고, 'o' 표시는 본 논문에서 이용한 값인데 기존의 논문에 비해 ITAE 성능지수 값이 5.64% 정도 감소되었음을 보이고 있다.

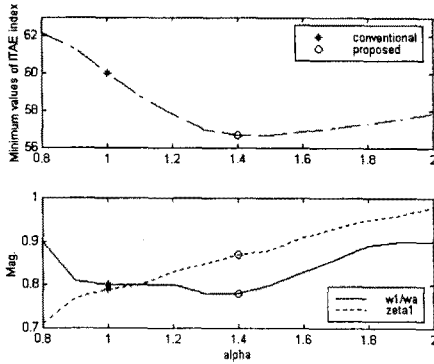


그림 4. ITAE 성능지수의 최소값과 위치

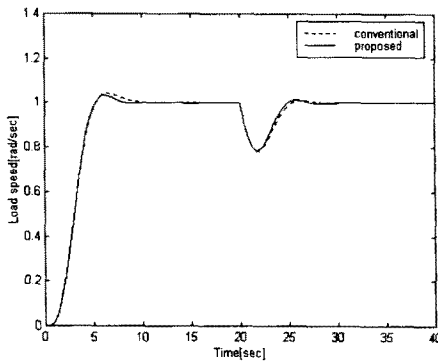


그림 5. 계단응답의 비교

4.2 최적 극배치에 의해 설계된 제어기의 적용

시뮬레이션에 사용한 전동기와 부하의 관성은 각각 0.005 [kgm²]과 0.015 [kgm²]이다. $\omega_a = 1$ [rad/sec], 계단 외란 토크 (T_L)는 20 [sec]에 -0.2 K, [Nm]를 인가하였다.

그림 5는 기존의 논문[7]과 본 논문에서 제안된 알고리즘을 각각 적용한 2관성 공진계에 대한 계단응답이다. 기존의 제어기에 비해 정정시간, 오버슈트, 외란에 대한 회복 성능 등이 다소 개선됨을 보이고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 최적 극배치를 이용한 2관성 공진계의 PID 제어기 설계 기법을 제안하였다. 시스템의 공액 복소근의 실수부를 동일하지 않게 만든 후 두 실수부에 대한 비례 상수 α 가 과도응답특성에 미치는 영향을 수식적으로 분석한 다음 계단응답으로 확인하였고, ITAE 성능지수 값이 최소가 되는 위치로부터 최적 PID 파라미터를 유도하였다.

기존의 제어기에 비해 ITAE 성능지수 값, 정정시간, 오버슈트, 외란에 대한 회복 성능 등이 다소 개선됨을 보였다.

본 논문에서 제안된 2관성용 제어기 설계 기법은 기초적인 제어 이론들을 이용함으로써 적용이 간편하고 실용적인 것이 특징으로 향후 실 플랜트에 효과적으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

(참고 문헌)

- [1] 김진수, 김상욱, 김영석, "2관성 공진계를 갖는 유도 전동기의 2자유도 속도제어", 대한전기학회 논문지, 제46권, 제1호, pp. 83-90, 1997.
- [2] 지준근, 송승호, 설승기, 박민호, "2관성계를 갖는 전동기 구동 시스템의 축 비틀림 진동 억제를 위한 속도 제어기", 대한전기학회 논문지, 제42권, 제8호, pp. 44-53, 1993.
- [3] Y. Matsui, "Speed control of 2-mass system by PID controller", Trans. IEE-Jpn, vol. 116-D, no. 4, pp. 441-447, 1996.
- [4] N. Matsui and Y. Hori, "Advanced technologies in motor control", Trans. IEE-Jpn, vol. 113-D, no. 10, pp. 1122-1137, 1993.
- [5] M. Hirata, K. Z. Liu and T. Mita, "Active vibration control of a 2-mass spring system using μ -Synthesis", Trans. IEE-Jpn, vol. 114-D, no. 5, pp. 512-519, 1994.
- [6] 김동화, 계장제어 시스템, 동일출판사, 서울, 1997.
- [7] G. Zhang and J. Furusho, "A practical PID controller design for speed servo system", Trans. IEE-Jpn, vol. 118-D, no. 9, pp. 1095-1096, 1998.