

TORA 시스템을 추적하기 위한 백스테핑 제어기 설계

권오봉*, 김동헌*, 현근호*, 이형찬**, 양해원*
 *한양대학교 전기공학과. **대진대학교 전기공학과

Backstepping Controller Design for tracking the TORA System

Ohbong Kwon*, Dong-Hun Kim*, Keun-Ho Hyun*, Hyung-Chan Lee**, Hai-Won Yang*
 *Dept. of Elec. Eng. Hanyang Univ. **Dept. of Elec. Eng. Dajin Univ.

Abstract - In this paper we consider the TORA system and use backstepping to design active controllers for tracking; this problem is much more challenging than stabilization. We show that the control effort of the closed-loop system can be significantly improved by exploiting the backstepping design.

1. 서 론

본 논문에서는 TORA 시스템의 안정도를 확인하고, 카트의 위치와 편심 질량체의 위치각을 추적하기 위해 백스테핑 기법을 이용한 제어기를 설계한다. 본 논문에서 제안하는 대상체인 TORA 시스템은 원하는 회전 각속도로 편심 질량을 회전시키는 시스템으로서 카트의 병진 운동과 편심 질량의 회전운동 사이의 복잡한 상호작용 관계를 가지고 있다. 따라서, TORA 시스템 특성은 실제 많은 분야에 적용 가능하다. 본 논문에서는 임의의 기준 입력을 통하여 안정화 함수를 구현하고, 이를 통한 가상입력을 순차적으로 구한다. 이러한 가상 입력을 통하여 Lyapunov 안정도를 만족시키는 백스테핑 제어기를 설계하고 이 제어기를 이용해 카트의 위치와 편심 질량의 위치각을 추적하려고 한다.

2. 안정도

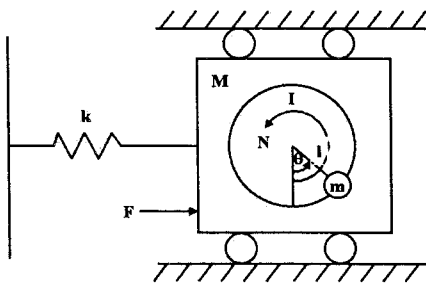


그림 1 Translational Oscillator with Rotational Actuator(TORA)

본 시스템은 [1]에서 다루어진 바 있으며, 여기서는 이 시스템의 동작이 공명 포획 현상을 보이는 이중-스핀 우주선과 비슷함을 보인다. 본 시스템에서의 공명 포획 현상은 회전 운동하는 질량체를 원하는 각속도로 움직이려고 할 때 나타난다. 만일 유용한 토크를 크기로 제한한다면, 병진 운동하는 발진기의 고유 주파수와 상응하는 각속도 $\sqrt{k/(M+m)}$ 로만 질량체를 움직일 수 있다.

이 절에서 다루려고 하는 시스템의 안정도는 쉽게 확인할 수 있다. 마찰력과 중력을 무시하면 운동 방정식[1]은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (M+m)\dot{q} + kq &= -m\dot{l}(\dot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) + F \\ (I+ml^2)\ddot{\theta} &= -ml\dot{q}\cos\theta + N \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, F 는 간섭이고 N 은 제어 토크이다. 이제부터 이 운동을 수직 평면에서 일어나는 것으로 가정하자. 그러면, 중력과 마찰력을 고려한 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (M+m)\dot{q} + F_{\text{sat}_r}(\dot{q}) + kq &= -m\dot{l}(\dot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) + F \\ (I+ml^2)\ddot{\theta} + N_{\text{sat}_r}(\dot{\theta}) + mgl\sin\theta &= -ml\dot{q}\cos\theta + N \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, F_r 는 마찰력이고 N_r 는 마찰력 토크 계수이고, $\text{sat}_r(\cdot)$ 과 $\text{sat}_r(\cdot)$ 은 포화 함수이다. 이 시스템에 대한 적당한 Lyapunov 함수는 시스템의 전체 에너지가 된다.

$$\begin{aligned} V(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2}kq^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}^2 + mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + \dot{l}^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{q}\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

식(2)을 이용하면, 식(3)의 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= kq\dot{q} + M\dot{q}\dot{q} + mgl\dot{\theta}\sin\theta + I\dot{\theta}\dot{\theta} \\ &\quad + m(\dot{q}\dot{q} + \dot{l}^2\dot{\theta}\dot{\theta} + \dot{q}\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{q}\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{q}\dot{l}\dot{\theta}^2\sin\theta) \\ &= kq\dot{q} + \dot{q}[-kq - F_r\text{sat}_r(\dot{q}) - m\dot{l}(\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + F] \\ &\quad + mgl\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}[-mgl\sin\theta - N_r\text{sat}_r(\dot{\theta}) - ml\dot{q}\cos\theta + N] \\ &\quad + ml(\dot{q}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{q}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{q}\dot{\theta}^2\sin\theta) \\ &= -F_r\text{sat}_r(\dot{q})\dot{q} - N_r\text{sat}_r(\dot{\theta})\dot{\theta} + F\dot{q} + N\dot{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

만일 $F \equiv 0$ 이고 $N \equiv 0$ 이면, 즉, 간섭과 토크 조작이 없다면, $\dot{V} \leq 0$ 이 되고, 이것은 식(2)의 시스템이 전체적으로 안정하다는 것을 의미한다. LaSalle의 정리를 이용하면, 식(2)와 (4)로 부터 모든 궤적이 두 개의 평형점(점근적으로 안정한 $x = \dot{x} = \theta = \dot{\theta} = 0$ 과 불안정한 $x = \dot{x} = \dot{\theta} = 0, \theta = \pi$)중 하나로 수렴한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 그러므로, 중력과 마찰력을 고려하면 이 시스템은 안정한 개루프가 된다. 이 계산은 만일 이 운동을 수평 평면에서 실험할 경우에도 $-N_0 \sin\theta$ 같은 중력항과 $-N_r\text{sat}_r(\dot{\theta})$ 같은 마찰력항을 포함하는 제어 토크가 같은 안정도 특성에서 생기는 것을 나타내고 있다.

3. 추적 설계

이 설계를 시작하기 위해서, 식(1)에 정의된 시스템을 [2]의 정규 무차원 좌표로 바꿔주면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} + \xi &= \varepsilon(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) + w \\ \dot{\theta} &= -\varepsilon \dot{\xi} \cos \theta + u \end{aligned} \quad (5)$$

또는,

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta) \dot{\xi} + \xi &= \varepsilon(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \cos \theta u) + w \\ (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta) \dot{\theta} &= \varepsilon \cos \theta (\xi - \varepsilon \dot{\theta}^2 \sin \theta - w) + u \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, ξ 는 카트의 위치이고, θ 는 질량체의 각도이고, w 는 외부 간섭 힘이고, u 는 조작기 토오크이다.

본 논문에서의 주요 제어 목적은 출력이 ξ 인 기준 신호 ξ_{ref} 을 추적하는 것이다[4]. 물론 시스템의 물리적 구조는 임의의 기준 신호를 추적하지 못하게 되어있다. 예를 들어, 0이 아닌 일정한 ξ_{ref} 을 추적할 수 없다. 따라서, 본 논문에서는 작은 크기의 발진성 신호만 고려하기로 한다.

어떤 신호를 추적하는 방법 중 하나는 백스테핑 설계를 이용하는 것이다[3]. 백스테핑 설계를 이용하기 위해서 좌표를 변화시키면

$$x_1 = \xi + \varepsilon \sin \theta, x_2 = \dot{\xi} + \varepsilon \dot{\theta} \cos \theta, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta} \quad (7)$$

와 같이 되고, 제어칙은 다음과 같다.

$$u = (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta)v - (\varepsilon \dot{\xi} \cos \theta - \varepsilon^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta) \quad (8)$$

그러면, 식(5)의 시스템은 다음과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon \sin x_3 + w \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= v \end{aligned} \quad (9)$$

추적 제어기의 백스테핑 설계를 하는데 있어 선행조건은 상태변수 x_1 과 x_4 에 대한 적당한 기준 신호를 정의하는 것이다. 기준 출력을 $\xi_{ref} = A_r \sin w_r t$ 이라 하면 도함수는 $\dot{\xi}_{ref} = A_r w_r \cos w_r t$ 과 $\ddot{\xi}_{ref} = -A_r w_r^2 \sin w_r t$ 이 된다.

그리고, θ 에 대한 기준 신호를 찾기 위해서 중간 변수 $p(t) = \frac{(1 - w_r^2)}{\varepsilon w_r^2} \xi_{ref}$ 을 이용해서 다음과 같이 계산한다.

$$\theta_{ref} = \arcsin(p) = \arcsin\left(A_r \frac{(1 - w_r^2)}{\varepsilon w_r^2} \sin w_r t\right) \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_{ref} = \frac{\dot{p}}{\cos \theta_{ref}} = \frac{(1 - w_r^2)}{\varepsilon w_r^2 \cos \theta_{ref}} \dot{\xi}_{ref} = \frac{A_r (1 - w_r^2)}{\varepsilon w_r \cos \theta_{ref}} \cos w_r t \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= \ddot{\theta}_{ref} \cos \theta_{ref} - \dot{\theta}_{ref}^2 \sin \theta_{ref} \\ &= \ddot{\theta}_{ref} \cos \theta_{ref} - \dot{p} \frac{(1 - w_r^2)}{(\varepsilon w_r^2)^2 \cos^2 \theta_{ref}} \dot{\xi}_{ref}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{ref} &= \frac{\ddot{p}}{\cos \theta_{ref}} + \frac{\dot{p}^2}{\cos^3 \theta_{ref}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon \cos \theta_{ref}} (\ddot{\xi}_{ref} + \dot{\xi}_{ref}) + \dot{p} \frac{(1 - w_r^2)^2}{(\varepsilon w_r^2)^2 \cos^3 \theta_{ref}} \dot{\xi}_{ref}^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{A_r (1 - w_r^2)}{\varepsilon \cos \theta_{ref}} \sin w_r t + \frac{A_r^3 (1 - w_r^2)^3}{\varepsilon^3 w_r^4 \cos^3 \theta_{ref}} \sin w_r t \cos^2 w_r t \quad (13)$$

정확히, 기준신호 ξ_{ref} 는 다음 관계식을 만족시킨다.

$$\ddot{\xi}_{ref} + \dot{\xi}_{ref} = -\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta_{ref} \quad (14)$$

식(10)-(14)을 가지고 (7)의 변환을 이용하면, 다음과 같이 기준신호 $x_{1,ref}$ 에서 $x_{4,ref}$ 을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{1,ref} &= \xi_{ref} + \varepsilon p \\ x_{2,ref} &= \dot{\xi}_{ref} + \varepsilon \dot{p} \\ x_{3,ref} &= \theta_{ref} \\ x_{4,ref} &= \dot{\theta}_{ref} \end{aligned} \quad (15)$$

본 논문에서 제어기를 설계하기 위한 백스테핑 기법은 다음과 같은 단계로 수행된다.

1단계) 식(9)에서 정의된 플랜트에서 에러 변수를 $z_1 = x_1$ 과 $z_2 = x_2$ 라고 정의하면, 이 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (16)$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 + \varepsilon \sin x_3 \quad (17)$$

식(17)에서 x_3 를 가상 제어입력으로 선택하고, $z_3 = x_3 - \alpha_0$ 라는 새로운 에러 변수를 도입한다.

$$x_3 = \alpha_0 + z_3 \quad (18)$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 + \varepsilon \sin(\alpha_0 + z_3) \quad (19)$$

여기서, α_0 는 정해지지 않았다.

z_1 과 z_2 를 0이 되게 하기 위해 다음과 같은 Lyapunov 함수를 선택한다.

$$V_1 = \frac{p_0}{2} (z_1^2 + z_2^2) \quad (20)$$

식(16)과 (19)를 이용하면,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= p_0 (z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2) \\ &= \varepsilon p_0 z_2 \sin(\alpha_0 + z_3) \end{aligned} \quad (21)$$

$z_3 = 0$ 일 때 초기 안정화 함수 $\alpha_0 = \frac{-C_0 z_2}{1 + z_2^2}$ 는 $\dot{V}_1 \leq 0$ 이 되게 한다.

2단계) 이 단계에서는 Lyapunov 함수에 z_3 을 포함시키려고 하는데 일반적인 형태인 z_3^2 대신에 $z_3 \in [-2\pi, 2\pi]$ 인 삼각함수의 형태로 선택하게 되면 다음과 같은 Lyapunov 함수를 갖게 된다.

$$V_2 = \frac{p_0}{2} (z_1^2 + z_2^2) + 2p_1 (1 - \cos \frac{z_3}{2}) \quad (22)$$

1단계에서 정의된 에러변수 z_3 의 도함수를 구하면 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{z}_3 = x_4 - \alpha_0 \quad (23)$$

여기서, $\dot{\alpha}_0 = \frac{\partial \alpha_0}{\partial z_2} (-z_1 + \varepsilon \sin x_3)$

그러므로, 식(23)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z}_3 = z_4 + \alpha_1 - \bar{\alpha}_0 \quad (24)$$

이 식에서 x_4 을 가상 제어 입력으로 선택하고, 최종 에러 변수로서 $z_4 = x_4 - \alpha_1$ 을 도입한다. 그러면, (16),(17)과(24)를 이용해서 V_2 의 도함수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= p_0(z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2) + p_1 \sin \frac{z_3}{2} (z_4 + a_1 - \bar{a}_0) \\
&= \varepsilon p_0 z_2 \sin a_0 + \varepsilon p_0 z_2 [\sin(z_3 + a_0) - \sin a_0] \\
&\quad + p_1 \sin \frac{z_3}{2} (z_4 + a_1 - \bar{a}_0) \\
&= p_1 \sin \frac{z_3}{2} [z_4 + a_1 - \bar{a}_0 + \frac{2\varepsilon p_0}{p_1} z_2 \cos(a_0 + \frac{z_3}{2})] \\
&\quad + \varepsilon p_0 z_2 \sin a_0
\end{aligned} \tag{25}$$

식(25)에서 $z_4=0$ 일 때 $\dot{V}_2 \leq 0$ 을 만들기 위해, 안정화 함수를 다음과 같이 만들 수 있다.

$$a_1 = -\frac{2\varepsilon p_0}{p_1} z_2 \cos(a_0 + \frac{z_3}{2}) + \bar{a}_0 - c_1 \sin \frac{z_3}{2} \tag{26}$$

3단계) 제어기를 설계하는 마지막 단계로 z_4 을 포함하는 Lyapunov 함수는

$$V = \frac{p_0}{2} (z_1^2 + z_2^2) + 2p_1(1 - \cos \frac{z_3}{2}) + \frac{p_2 z_4^2}{2} \tag{27}$$

이 되고, 이 Lyapunov 함수의 도함수는

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= p_1 \sin \frac{z_3}{2} [z_4 + a_1 - \bar{a}_0 + \frac{2\varepsilon p_0}{p_1} z_2 \cos(a_0 + \frac{z_3}{2})] \\
&\quad + p_2 z_4 (\dot{z}_4 - \bar{a}_1) + \varepsilon p_0 z_2 \sin a_0 \\
&= \varepsilon p_0 z_2 \sin a_0 + p_1 \sin \frac{z_3}{2} [a_1 - \bar{a}_0 + \frac{2\varepsilon p_0}{p_1} z_2 \cos(a_0 + \frac{z_3}{2})] \\
&\quad + p_2 z_4 (\frac{p_1}{p_2} \sin \frac{z_3}{2} + v - \bar{a}_1)
\end{aligned} \tag{28}$$

이 된다.

$$\text{여기서, } \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial z_2} & \frac{\partial a_1}{\partial z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_1 + \varepsilon \sin z_3 \\ x_4 - \bar{a}_0 \end{bmatrix}$$

그러므로, 우리가 설계하려는 제어기

$$v = \bar{a}_1 - \frac{p_1}{p_2} \sin \frac{z_3}{2} - c_2 z_4 \tag{29}$$

는 $\dot{V} \leq 0$ 이 됨을 보여준다.

4. 모의 실험

모의 실험은 식(9)의 플랜트에 대하여 $\varepsilon=0.1$ 이라 가정하고 수행되었다. 이 모의 실험에서는 위에서 설계한 식(29)의 제어기를 가지고 기준신호 $0.1 \sin 1.5t$ 와 외부 간섭 힘 $0.5e^{-t} \sin 2t$ 에 따라 카트의 위치를 추적하였다. 그림 2, 3, 4에서는 기준신호, 추적오차, 편심 질량체의 각을 보여주고 있고, 그림 5는 제어토크를 나타내고 있다. 여기에서, 제어변수는 다음과 같이 설정하였다.

$$c_0 = c_1 = c_2 = 1, p_0 = 100, p_1 = 1, p_2 = 10$$

5. 결 론

본 논문에서는 TORA 시스템의 안정도를 확인하고, 백스테핑을 이용한 제어기를 설계하여 기준신호에 따른 카트의 위치를 추적하였다. 특히, 본 논문에서 설계한 제어기 이외에도 가상제어입력, 초기안정화 함수, Lyapunov 함수를 선택하는데 따라 다른 제어기를 설계할 수 있다. 앞으로는 상태를 모르는 경우에 관측기를 설계하는 방법과 매개변수를 모르는 경우에 적응칙을 설계하는 방법을 연구할 계획이다.

[참 고 문 헌]

- [1] R.T.Bupp, D.S.Bernstein and V.T. Coppola benchmark problem for nonlinear control design : p statement, experimental testbed and passive no compensation", Proc. Am. Control Conf., Seattle pp.4363- 4367, 1995.
- [2] C.J.Wan , D.S.Bernstein and V.T.Coppola,

stabilization of the oscillating eccentric rotor", Proc. IEEE Conf. Dec. Contr., Orlando, FL, pp.4024-4029, 1994.

[3] M.Krstić, I.Kanellakopoulos and P.V.Kokotović, "N and Adaptive Control Design", Wiley-Interscience, York, 1995.

[4] I.Kanellakopoulos and J.Zhao, "Tracking and dis rejection for the benchmark nonlinear control problem Am. Control Conf., Seattle, WA, pp.4368-4369, 1995.

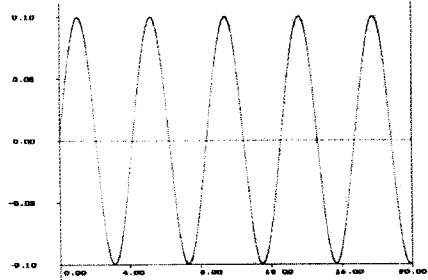


그림 2 reference signal

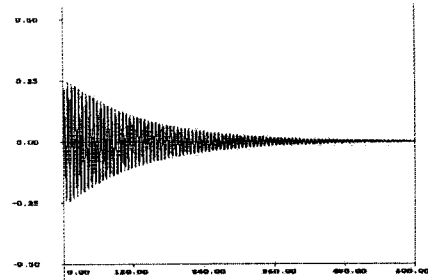


그림 3 Tracking error

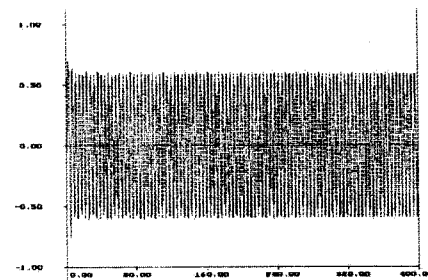


그림 4 angle of the proof mass

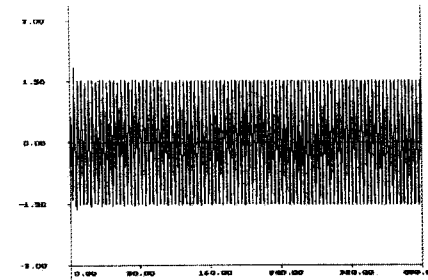


그림 5 control torque