1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

마찰력을 갖는 기계시스템에 대한 시간최적제어

김태한, 김양오, 하인중
서울대학교 전기공학부

Time-Optimal Control of Mechanical Systems With Friction

Tae-Han Kim, Yang-O Kim, In-Joong Ha
School of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - 본 논문은 마찰력을 갖는 기계시스템에 대한 시간최적제어문제의 엄밀한 해를 제시한다. 특히 최적제어입력을 되먹임 형태로 구한다. 기존의 연구들에서 미리 보상되거나 무시되던 Coulomb 마찰력까지 완전히 고려하여 빠른 응답을 얻는데 제어입력을 최대한 활용할 수 있게 한다.

1. 서 론

모든 기계시스템은 어느정도의 마찰력을 가진다 [8,10]. 하지만 로봇이나 수치제어장비의 시간최적제어를 위한 대부분의 기존의 연구결과들은 Coulomb 마찰력을 미리 보상하거나 무시하거나 또는 마찰력이 속도에 대한 연속함수라는 가정을 사용하였다[7]. 이것은 Pontryagin 의 maximum principle(PMP)[1]이 연속벡터필드만을 다루기 때문인데, 마찰력을 갖는 기계시스템은 불연속인 2차원 벡터필드로 기술된다. 따라서, 고전적인 PMP로는 마찰력을 다룰 수 없었다. 하지만 최근의 Clarke[3], Sussmann[11]의 연구결과는 PMP를 스무드하지 않은 벡터필드와 경계조건으로까지 확장시켰다. 또, [4,5]에서 Clarke 등은 다중최적프로세쓰(optimal multiprocess)에 대한 이론으로 확장하였다.

본 논문에서는 [5,11]의 결과를 최적궤적의 특정한 성질과 함께 마찰력을 갖는 기계시스템의 시간최적제어의 엄밀한 해를 구하는데 사용한다. 더구나 시간최적입력은 상태되먹임함수의 형태로 구해진다. Coulomb 마찰력이 미리 보상되거나 무시되지 않으므로 제어입력은 빠른 응답을 위해 최대한 사용될 수 있다.

2. 시간최적제어

다음 형태의 기계시스템을 고려한다.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = -F_f(x_2) + g(x_1, u) \tag{3}$$

여기서 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u(t) \in \mathrm{R}$ 는 각각 위치, 속도, 제어입력을 나타내고 제어입력은 $|u(t)| \le 1$ 로 제한된다. 마찰력 $F_f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 과 위치의 함수인 입력함수 $g \in \mathrm{C}^1: \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 는 다음의 가정을 만족한다.

$$\begin{cases} 0 \le F_f(x_2) \le F_s + F_v x_2 & \text{if } x_2 > 0 \\ -F_s \le F_f(x_2) \le F_s & \text{if } x_2 = 0 \\ -F_s + F_v x_2 \le F_f(x_2) \le 0 & \text{if } x_2 < 0 \end{cases} \tag{3}$$

여기서 F_s, F_v, $g_{\min}$, $g_{\max}$ 는 양의 상수들이고 $F_f(x_2)$ 는 $x_2 \in \mathrm{R} - \{0\}$ 에서 연속이다.

$$\begin{cases} g(x_1, u) = g(x_1 + 2\pi, u) \\ g(x_1, -1) \le g(x_1, u) \le g(x_1, 1) \\ -g_{\max} \le g(x_1, -1) \le -g_{\min} < -F_s < 0 \\ 0 < F_s < g_{\min} \le g(x_1, 1) \le g_{\max} \end{cases} \tag{4}$$

초기상태 (x_{1i}, x_{2i})와 최종상태 (x_{1f}, x_{2f})에 대한 시간최적문제 (P)는 다음과 같이 기술된다.

$$\text{(P)} \quad \begin{aligned} &\underset{|u| \le 1}{\text{Minimize}} \int_0^T 1 dt \\ &\text{subject to } (x_1(0), x_2(0)) = (x_{1i}, x_{2i}) \\ &\qquad (x_1(T), x_2(T)) = (x_{1f}, x_{2f}) \end{aligned}$$

만약 F_f와 g가 연속미분가능함수이면 상기의 문제 (P)는 PMP로 풀릴 수 있다. 하지만 마찰력 F_f는 통상 $x_2 = 0$ 에서 연속이 아니어서 PMP의 직접적인 적용이 불가능하다.

앞으로 (P)에 대한 시간최적입력은 u^*로 나타내고 그에 대한 시간최적상태궤적은 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$로 나타내기로 한다.

3. 주요 결과

주 정리를 제시하기 전에 (x_1^*, x_2^*)의 성질에 관한 두 개의 보조정리를 제시한다.

보조정리 1. 임의의 시간구간 $[t_i, t_f] \subset [0, T]$ 에서 x_2^*는 어떤 연속구간에서도 0 일 수는 없다. 더구나, 만약 s $[t_i, t_f]$ 에서 $x_2^*(t) \ge 0$ 이거나 $x_2^*(t) \le 0$ 이라면 모든 $t_0 \in (t_i, t_f)$ 에서 $x_2^*(t_0)$는 0이 아니다.

증명 : 만약 임의의 연속구간에서 속도가 0이라면 그 구간만큼을 제외한 궤적보다 느리게 되므로 시간최적이 아니다. $x_2^*(t) \ge 0$ 이거나 $x_2^*(t) \le 0$ 이라면 모든 $t_0 \in (t_i, t_f)$ 에서 $x_2^*(t_0)$ 가 0 이 아니라는 것은 자명하므로 증명은 생략한다.

■

다음의 보조정리는 시간최적인 상태궤적에서는 최대 두 번의 순간에서만 속도가 0일 수 있음을 보인다. 아래에서는 $W_+(y_1, y_2, u(t))$ 와 $W_-(y_1, y_2, u(t))$ 는 각각 시스템 (1)(2)와 역시간 시스템의 적분곡선으로 $(y_1, y_2), t=0$ 에서 시작하고 $u(t)$ 의 제어입력을 갖는다.

보조정리 2. 만약 $\{(x_1^*(t), x_2^*(t)) | t \in [0, T]\}$ 가 (P)의

해인 최적상태궤적이라면 $x_2^*(t_k)=0$ 를 만족하는 $t_k\in[0,T]$ 는 최대한 두개이다.

증명 : 만약 보조정리의 내용이 참이 아니라면 항상 $x_2^*(t_1)=x_2^*(t_2)=x_2^*(t_3)=0$ 인 t_1,t_2,t_3, $t_1<t_2<t_3$ 를 찾을 수 있다. 먼저 $x_1^*(t_3)<x_1^*(t_1)<x_1^*(t_2)$ 인 경우를 고려하면 $W_+(x_1^*(t_1),0,+1)\cup W_+(x_1^*(t_1),0-1)$ 가 R^2를 $(x_1^*(t_3),0)$ 와 $(x_1^*(t_2),0)$를 양쪽에 두고 나눈다. 가정에 의해 $x^*(t_2)$에서 $x^*(t_3)$까지의 궤적은 $W_+(x_1^*(t_1),0,-1)$를 어떤 시각 $\hat{t}\in(t_2,t_3)$에 지나게 되고 $(x_1^*(t_1),0)$은 다시 지나지 않는다. 만약 $x^*(\hat{t})$가 $x^*(t_1)$로부터 Δt 시간에 $W_+(x_1^*(t_1),0,-1)$를 따라서 도달된다면 $\{x^*(t)|t\in[t_1,\hat{t}]\}$내의 어떤 점으로부터도 $x^*(\hat{t})$는 Δt 이내의 시간에 도달되어야 한다. 아니라면 (2)-(4)에 의해 $-\dot{x}_2(t)\le F_f(x_2(t))-g(x_1(t),-1)$이고 $x^*(\hat{t})$를 $t=\hat{t}$ 에 지나는 모든 (1)(2)의 해는 다음의 부등식을 만족한다.

$$x_2(\hat{t}-\zeta)\le x_2^*(\hat{t})+\int_{\hat{t}-\zeta}^{\hat{t}}\{F_f(x_2(\tau))-g(x_1(\tau),-1)\}d\tau \tag{5}$$

식 (21)의 우변은 $W_+(x_1^*(t_1),0,-1)$에 포함되고 따라서 $\zeta\in[0,\Delta t)$ 동안 양의 값을 갖지 못한다. 그러므로 좌변인 $x_2(\hat{t}-\zeta)$도 $\zeta\in[0,\Delta t)$ 동안 양의 값을 갖지 못하여 $t\in[t_1,\hat{t}]$ 동안 $x_1^*(t)\le x_1^*(t_1)$ 가 되어야 한고 $x_1^*(t_2)>x_1^*(t_1)$ 를 만족하는 $t_2\in(t_1,\hat{t})$는 존재하지 않는다. 이것은 $x_1^*(t_3)<x_1^*(t_1)<x_1^*(t_2)$이고 t_1,t_2,t_3, $t_1<t_2<t_3$ 에서 $x_2^*(t_1)=x_2^*(t_2)=x_2^*(t_3)=0$라는 가정에 모순이다. 따라서 $x_2^*(t_1)=x_2^*(t_2)=x_2^*(t_3)=0$ 를 만족하는 어떠한 t_1,t_2,t_3, $t_1<t_2<t_3$ 도 $x_1^*(t_3)<x_1^*(t_1)<x_1^*(t_2)$인 경우로는 존재하지 않는다. 다른 경우인 $x_1^*(t_1)<x_1^*(t_3)<x_1^*(t_2)$ 나 $x_1^*(t_1)<x_1^*(t_2)<x_1^*(t_3)$의 경우에도 유사한 방법으로 증명이 가능하다.

■

다음의 정리에서 $H(x_1,x_2,u,\eta_1,\eta_2)$ 는 제어해밀튼함수(control hamiltonian function)로서 다음과 같이 정의된다.

$$H(x_1,x_2,u,\eta_1,\eta_2)=-1+\eta_1x_2+\eta_2\{g(x_1,u)-F_f(x_2)\} \tag{6}$$

정리. 전체 시간구간 $[0,T]$ 는 $0=t_0\le t_1\le t_2\le t_3=T$ 이고 $x_2^*(t_1)=x_2^*(t_2)=0$ 를 만족하는 최대 세 개의 부분구간 $[t_{k-1},t_k],k=1,2,3$ 으로 나누어진다. 그리고, 다음의 편미분방정식과 경계조건을 만족하는 조각적연속인 보조변수 η_1^*,η_2^* 가 각각의 부분구간 (t_{k-1},t_k), $k=1,2,3$ 에서 존재한다.

$$\dot{\eta}_1^*(t)=-\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1^*(t),sgn(\eta_2^*(t)))\eta_2^*(t) \tag{7}$$

$$\dot{\eta}_2^*(t)=-\eta_1^*(t)+F_f'(x_2^*(t))\eta_2^*(t) \tag{8}$$

$$\eta_1^*(t_k)=\lim_{t\to t_k-}\eta_1^*(t),\quad k=1,2 \tag{9}$$

$$\eta_2^*(t)=\lim_{t\to t_k-}\frac{1}{-F_f(-x_2^*(t))+g(x_1^*(t),sgn\,\eta_2^*(t))} \tag{10}$$

더구나, 최적해는 모든 $t\in[0,T]$에서 다음을 만족한다.

$$u^*(t)=sgn(\eta_2^*(t)) \tag{11}$$

$$H(x_1^*(t),x_2^*(t),u^*(t),\eta_1^*(t),\eta_2^*(t))=0 \tag{12}$$

증명 : 보조정리 2.에 의해서 시간최적상태궤적 x^* 와 시간최적입력 u^* 는최적다중프로쎄쓰[5] $\{\tau_0^k,\tau_1^k,x^k,u^k\}$로 대치될 수 있고, 각각의 프로쎄쓰는 $t\in(\tau_0^k,\tau_1^k)$, $k=1,2,3$ 에 대해서 다음을 만족한다.

$$\dot{x}_1^k(t)=x_2^k(t) \tag{13}$$

$$\dot{x}_2^k(t)=-F_f(x_2^k(t))+g(x_1^k(t),u^k(t)) \tag{14}$$

$$|u^k(t)|\le1 \tag{15}$$

$$\prod_{k=1}^{3}\{\tau_0^k,\tau_1^k,x^k(\tau_0^k),x^k(\tau_1^k)\}\in\Lambda \tag{16}$$

여기서 제한집합 Λ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Lambda=\Big\{\prod_{k=1}^{3}\{\tau_0^k,\tau_1^k,\xi_0^k,\xi_1^k\}\ |\ \tau_0^1=0,\tau_1^1=\tau_0^2=t_1,\ \tau_1^2=\tau_0^3=t_2,\tau_1^3=T,\ \xi_0^2,\xi_0^3\text{의두번째 인자는 }0\Big\} \tag{17}$$

그러면 문제 (P)는 다음의 $\{\tau_0^k,\tau_1^k,x^k,u^k\}$에 대한 최적다중프로쎄쓰문제로 바뀐다.

$$\underset{|u^k|\le1}{\text{minimize}}\ \sum_{k=1}^{3}\int_{\tau_0^k}^{\tau_1^k}\ \text{subject to}\,(30)-(34) \tag{18}$$

[5]의 정리 3.에 의해, 만약 $\{\tau_0^k,\tau_1^k,\bar{x}^k,\bar{u}^k\}$가 (18)에 대해 최적이라면 다음을 만족하는 실수 $h_k,k=1,\dots,3$ 과 $t\in(\tau_0^k,\tau_1^k)$에서 연속인 함수 $\eta_k:[\tau_0^k,\tau_1^k]\to R^2$, $k=1,2,3$ 이 존재한다.

$$\dot{\eta}_j^k(t)=-\frac{\partial}{\partial x_j}H(\bar{x}^k(t),\bar{u}^k(t),\eta^k(t)),j=1,2 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}h_k&=H(\bar{x}^k(t),\bar{u}^k(t),\eta^k(t))\\&=\sup_{|u^k(t)|\le1}H(\bar{x}^k(t),u^k(t),\eta^k(t))\end{aligned} \tag{20}$$

$$\prod_{k=1}^{3}\{-h^k,h^k,[\eta_1^k(\tau_0^k),\eta_2^k(\tau_1^k)]^T,-[\eta_1^k(\tau_0^k),\eta_2^k(\tau_1^k)]^T\}\in N_\Lambda \tag{21}$$

여기서 N_Λ 는 $\{\tau_0^k,\tau_1^k,\bar{x}^k(\tau_0^k),\bar{x}^k(\tau_1^k)\}$에서 구해진 Λ에 대한 노말콘(normal cone)[3]이다. 집합 Λ 에 대한 $\{\tau_0^k,\tau_1^k,\bar{x}^k(\tau_0^k),\bar{x}^k(\tau_1^k)\}$에서의 가능한 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\{0,\tilde{\tau}_1^1,[0,0]^T,[\tilde{x}_1^1(\tau_1^1),0]^T\}\times\\&\{\tilde{\tau}_1^1,\tilde{\tau}_1^2,[\tilde{x}_1^1(\tau_1^1),0]^T,[\tilde{x}_1^2(\tau_1^2),0]^T\}\times\\&\{\tilde{\tau}_1^2,\tilde{\tau}_1^3,[\tilde{x}_1^2(\tau_1^2),0]^T,[0,0]^T\}\end{aligned} \tag{22}$$

(21)(22)에 의해 $\widetilde{\tau}_1^3, \widetilde{\tau}_1^k, \widetilde{x}^k(\tau_1^k), k=1,2$ 의 임의의 변화에 대해서 아래 식을 만족한다.

$$\sum_{k=1}^{2}\{(h_k-h_{k+1})\widetilde{\tau}_1^k+(\eta_1^{k+1}(\tau_0^{k+1})-\eta_1^k(\tau_1^k))\widetilde{x}_1^k(\tau_1^k)\}$$
$$+h_3\widetilde{\tau}_1^3 \le 0 \tag{23}$$

따라서 다음의 결과를 얻는다.

$$h_k=0 \tag{24}$$

$$\eta_1^{k+1}=\eta_1^{k+1}(\tau_0^{k+1})=\eta_1^k(\tau_1^k)=\eta_1^k(t_k) \tag{25}$$

여기서 $t\in[t_{k-1},t_k)$, $k=1,2,3$에 대해 $u^*(t)=\overline{u^k}(t)$, $\eta_1^*(t)=\eta_1^k(t)$, $\eta_2^*(t)=\eta_2^k(t)$ 이면 (9)(12)가 충족되는 것을 알 수 있다. 또한 (19)으로부터 (7)(8)를 얻을 수 있다.

마지막으로 (9)과 (12)를 만족하는 η_2^* 는 $t_k, k=1,2$ 에서 각각 두 가지씩 존재하여 다음과 같다.

$$\eta_2^*(t_k)=\begin{cases}\lim_{t\to t_k+}\dfrac{1}{-F_f(x_2^*(t))+g(x_1^*(t),1)} \\ \lim_{t\to t_k+}\dfrac{1}{-F_f(x_2^*(t))+g(x_1^*(t),-1)}\end{cases} \tag{26}$$

보조정리 1.에 의해 x_2^* 는 $t=t_k, k=1,2$ 에서는 꼭 부호를 바꾸어야 하고 $u^*(t)=sgn\eta_2^*(t)$ 이므로 허용되는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\eta_2^*(t_k) &= \lim_{t\to t_k+}\frac{1}{-F_f(x_2^*(t))+g(x_1^*(t),\overline{u^k}(t_k))} \\ &= \lim_{t\to t_k-}\frac{1}{-F_f(-x_2^*(t))+g(x_1^*(t),sgn\ \eta_2^*(t))}\end{aligned} \tag{27}$$

■

상기 정리를 이용하여 PTP(point-to-point) 이동의 경우에 다음의 따름정리와 같이 상태궤환형태의 시간최적제어기를 구할 수 있다.

따름정리. $x_{2i}=x_{2f}=0$ 인 시간최적제어문제 (P)의 해인 최적제어입력은 다음과 같다.

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & \text{if } x_1\ge x_{1f}, x_2> W_-(x_{1f},0,+1)(x_1) \\ +1, & \text{if } x_1\ge x_{1f}, x_2\le W_-(x_{1f},0,+1)(x_1) \\ +1, & \text{if } x_1< x_{1f}, x_2< W_-(x_{1f},0,+1)(x_1) \\ -1, & \text{if } x_1< x_{1f}, x_2\ge W_-(x_{1f},0,+1)(x_1)\end{cases} \tag{28}$$

위 식에서 $W_-(y_1,y_2,u)(x_1)$ 는 집합 $\{x_2|(x_1,x_2)\in W_-(y_1,y_2,u)\}$ 를 나타낸다.

증명 : 보조정리 2.에 의해 $x_2^*(0)=x_2^*(T)=0$ 는 $x_2^*(t)\neq 0, t\in(0,T)$를 의미한다. 따라서, 정리 1.은 $t_1=t_2=0$ 으로 성립한다. 여기서 $\eta_2^*(\overline{t})=0$ 이 되는 $\overline{t}\in(0,T)$ 는 최대 한 개 뿐임을 보인다. (8)(12)에 의해 $\eta_2^*(\overline{t})$는 $[0,T]$의 어떠한 부분구간에 대해서도 일정하게 0 이 될 수는 없다. 만약, $\eta_2^*(\overline{t})=0$ 이 되는 $\overline{t}\in(0,T)$ 가 한 개보다 많다면 (8)과 η_1^*의 연속성에 의해 $\eta_2^*(t_1)=\eta_2^*(t_2)=0$ 와 $\eta_1^*(t_1)\eta_1^*(t_2)<0$ 를 만족하는 $t_1,t_2\in(0,T)$ 가 존재한다. 하지만 (12)에 의해 다음 식이 성립한다.

$$\eta_1^*(t_k)x_2^*(t_k)=1, \qquad k=1,2 \tag{29}$$

그런데, $x_2^*(t)$는 $t\in(0,T)$에서 부호가 바뀌지 않으므로 $\eta_1^*(t_k)\eta_1^*(t_2)\ge 0$ 이고 이는 상기의 가정에 모순이다. 따라서 η_2^*는 최대한 한 번 부호를 바꾸게 되어 최적제어입력 u^* 도 최대 한번만 스위치하게 되고 유일하게 허용되는 스위치곡선은 $W_-(x_{1f},0,-1)\cup W_-(x_{1f},0,+1)$가 되어 (28)과 같은 상태궤환형태의 제어입력이 구해진다.

■

따라서 정지위치간의 이동의 경우, 예를 들어 물체이동(pick-and-place)의 경우에는 보조변수 η_1,η_2 의 도입 없이 역시간시스템을 $u=\pm1$ 의 각각의 경우에 대해 적분함으로써 단일한 스위치곡선을 구할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 기계시스템의 시간최적제어에 대한 PMP를 최초로 마찰력을 엄밀히 고려하도록 확장하였다. 모델링오차에 대한 강인성이나 입력의 채터링방지를 위해서는 기존의 근사최적제어[9]의 결과를 본 논문의 결과와 함께 사용할 수 있다. 그리하여 본 논문의 결과는 실제 산업용 시스템에서 널리 이용될 수 있을 것이다.

[참 고 문 헌]

[1] L.S.Pontryagin, V.G.Boltyanskii, R.V.Gamkrelidze, E.F.Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley, New York, 1962

[2] E.B.Lee, L.Markus, Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley, New York, 1967

[3] F.H.Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983

[4] F.H.Clarke, R.B.Vinter, "Optimal Multiprocesses," *SIAM J. Control Optim.*, vol.27, No.5, pp1072-1091, 1989

[5] F.H.Clarke, R.B.Vinter, "Application of Optimal Multiprocesses," *SIAM J. Control Optim.*, vol.27, No.5, pp1072-1091, 1989

[6] R.S.Wallace, D.G.Taylor, "Low-Torque-Ripple Switched Reluctance motors for Direct-Drive Robotics," *IEEE trans. Robotics & Automat.*, vol.7, No.6, pp733-742, 1991

[7] L.G.Van Willigenburg, R.P.H.Loop, "Computation of Time-Optimal Controls Applied to Rigid Manipulators with Friction," *Int. J. Control*, vol.54, No.5, pp1097-1117, 1991

[8] B. Amstrong-H'elouvry, Control of Machines with Friction, Kluwer Academic Press, Boston, 1991

[9] L.Y.Pao, G.F.Franklin, "Proximate Time-Optimal Control of Third-Order Servomechanisms," *IEEE trans. Automat. Contr.*, vol.38, No.4, pp560-580, 1993

[10] H.Olsson, Control Systems with Friction, Lund Inst. of Tech., Sweden, 1996

[11] H.J.Sussmann, "Transversality Conditions and a Strong Maximum Principle for Systems of Differential Inclusions," *Proc. 37th Conf. Decision Control*, 1998