

개루프 전달함수 주파수영역 해석에 의한 H ∞ 최적 제어기의 건설성 및 성능 개선

김용규*, 유창근**

* : 한국철도기술연구원 고속전철시스템개발팀, ** : 남서울대학교 전자공학과

H ∞ optimal controller robustness and performance improvement by frequency domain analysis of open loop transfer function

Y.K.KIM*, C.K.RYU**

* : Korea Railroad Research Institute, ** : NAMSEOUL University

Abstract - When the controller designed by the H ∞ control technique is applied to the object system, sometimes the controller does not satisfy the robust stability and robust performance but only satisfy the nominal performance. In this paper, we derive the region on the frequency response curve of the open-loop transfer function which satisfy the robustness and robust performance of the designed controller. We also derive the region for the suitability of the weighting function on the frequency response curve of the weighting function. We showed that the robust stability and the robust performance of the H ∞ optimal controller, by applying the designed controller on an electromechanical actuator system, could be improved by determining parameter γ and weighting function gain α using the derived region.

시스템에 인가되는 플랜트 불확실성이 곱셈형일 경우, 표준 페루프 시스템은 그림 1과 같이 주어지며, 이에 대한 개루프 전달함수 L, 감도 함수 S, 상보 감도 T 사이에는 다음의 관계가 성립한다[3].

$$L = GK, S + T = I, S = \frac{1}{1 + GK}, T = \frac{GK}{1 + GK} \quad (1)$$

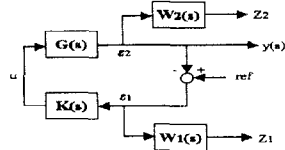


그림 1. 피드백 블록도

또한 H ∞ 제어시 사용되는 표준 페루프 전달함수 T_{ZU1}은 다음 식으로 주어진다[4].

$$T_{ZU1} = \frac{Z}{U_1} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 [1 + GK]^{-1} \\ W_2 GK [1 + GK]^{-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

1. 서 론

H ∞ 최적 제어는 가중함수를 갖는 표준 페루프 시스템을 구성한 후 가중함수 이득 α 와 매개변수 γ 를 선택하여 $\|T_{ZU1}\|_{\infty} < \gamma$ 의 관계를 만족하는 제어기를 설계함으로써 실현된다[1]. 그러나 α 와 γ 값을 적절히 결정하여 H ∞ 최적 제어기를 설계하고 이를 제어 대상 시스템에 적용할 경우 건설 안정도와 건설 성능을 만족하지 못하고 공칭 성능(nominal performance)만을 만족하는 문제점이 발생할 수도 있다.

본 논문에서는 개루프 전달함수의 주파수 응답 곡선 상에 건설성 영역과 성능 영역을 만족하는 영역을 도출하고, 제어 대상 시스템에 대한 적절한 가중함수의 이득을 결정할 수 있는 영역을 가중함수의 주파수 응답 곡선 상에 도출한다. 도출된 영역이 도시되어 있는 주파수 응답 곡선 상에 α 와 γ 값을 변화시켜 가며 구한 개루프 전달함수의 주파수 특성을 도시함으로써 H ∞ 최적 제어기의 건설 안정도 및 건설 성능을 개선할 수 있음을 임의의 전기 기계 구동기를 통해 보인다. 또한 보데 선도의 피크 값을 이용한 무한 놈의 해석 통해 본 논문에서 제안된 방법에 의해 결정된 가중함수가 안정된 건설성을 갖고 있음을 보인다.

2. 개루프 전달함수의 주파수 영역 해석

2.1 H ∞ 최적제어

설계된 H ∞ 최적 제어기의 적정성 여부는 감도함수 S와 상보 감도 함수 T의 주파수 응답이 각각에 대응하는 가중함수의 주파수 응답을 초과하지 않으며 제어 대상 시스템에 대한 건설성 사양 및 성능 사양이 주어질 경우 사양의 만족도로 판별한다[2].

전달함수 T_{ZU1}은 페루프 시스템 공칭 특성 및 플랜트의 비구조적 불확실성의 여러 가지 모델에 따라 변형되며, 이는 건설 안정도 해석의 기본이 된다. 만약 T_{ZU1}이 안정한 행렬일 때, 식(2)는 주파수 영역, 시간 영역에 대해 각각 $\omega \in \mathbb{R}^+$ ($\sigma(T_{ZU1}(j\omega)) < \gamma$), $t \in \mathbb{R}^+$ ($\sigma(T_{ZU1}(t)) < \gamma$)로 표현된다. 여기서 $\sigma(T_{ZU1}(j\omega))$ 는 행렬 T_{ZU1}의 가장 큰 특이치(Singular value)를 나타낸다.

불확실성이 곱셈형일 경우, 감도 함수 S와 상보 감도 함수 T를 제한하는 가중 함수를 W₁과 W₂라 하면 이에 따른 성능 및 안정도 조건은 다음과 같다[5].

- 1) 공칭 성능조건 : $\|W_1 S\|_{\infty} < 1$
- 2) 건설 안정도 조건 : $\|W_2 T\|_{\infty} < 1$
- 3) 공칭 성능과 건설 안정도를 만족하는 조건 : $\| \max(|W_1 S|, |W_2 T|) \|_{\infty} < 1$
- 4) 성능과 안정도 사이의 절충 조건 : $\| (|W_1 S|^2 + |W_2 T|^2)^{0.5} \|_{\infty} < \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 5) 건설 성능을 만족하기 위한 필요 충분 조건 : $\| (|W_1 S| + |W_2 T|) \|_{\infty} < 1$

플랜트의 비구조적 불확실성이 곱셈형일 경우, 건설 성능을 만족하기 위한 필요 충분 조건을 주파수 영역에서 표시하면 식(3)이 된다.

$$\left| \frac{W_1(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| + \left| \frac{W_2(j\omega)G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| < 1 \quad (3)$$

만약 ω_{\min} 이 $|W_1(j\omega)| > 1 > |W_2(j\omega)|$ 를 만족하는 최대 주파수이고, ω_{\max} 는 $|W_2(j\omega)| > 1 > |W_1(j\omega)|$ 를 만족하는 최소 주파수라고 한다면, 식(3)은 다음과 같이 변형된다.

$$|G(j\omega)K(j\omega)| > \frac{|W_1(j\omega)| - 1}{1 - |W_2(j\omega)|} \quad \forall \omega < \omega_{\min} \quad (4)$$

$$|G(j\omega)K(j\omega)| < \frac{1 - |W_1(j\omega)|}{|W_2(j\omega)| - 1} \quad \forall \omega > \omega_{\max} \quad (5)$$

여기서 플랜트의 '0' dB 차단 주파수는 ω_{\min} 과 ω_{\max} 사이에 존재해야 한다. 이 경우, 그림 1의 개루프 전달 함수 이득은 건설 성능을 만족하기 위해 그림 2와 같이 주어진 영역 내에 위치해야 하며 적절한 가중 함수의 선택에 의해 ω_c 가 ω_{\min} 과 ω_{\max} 에 근접하는 피드백 제어기 K를 구할 수 있다.

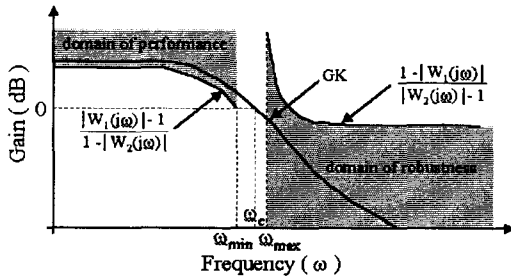


그림 2. 개루프 전달함수의 영역

한편 $\omega < \omega_{\min}$ 의 경우, $|W_1(j\omega)|$ 의 최대값은 W_2 의 값이 '0'일 때, $(1 + G(j\omega)K(j\omega))$ 이고, W_1 은 '1' 보다 커야 한다. 따라서 W_1 과 W_2 의 영역은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} 1 < |W_1(j\omega)| < (1 + |G(j\omega)K(j\omega)|) \\ 0 < |W_2(j\omega)| < 1 \end{cases} \quad \forall \omega < \omega_{\min} \quad (6)$$

같은 방법으로, $\omega > \omega_{\max}$ 의 경우, W_1 과 W_2 의 영역은 다음과 같다

$$\begin{cases} 0 < |W_1(j\omega)| < 1 \\ 1 < |W_2(j\omega)| < (1 + \frac{1}{|G(j\omega)K(j\omega)|}) \end{cases} \quad \forall \omega > \omega_{\max} \quad (7)$$

이는 그림 3으로 도시되며, 제어 대상 시스템에 대한 가중 함수의 적정 여부를 판단하는데 사용된다.

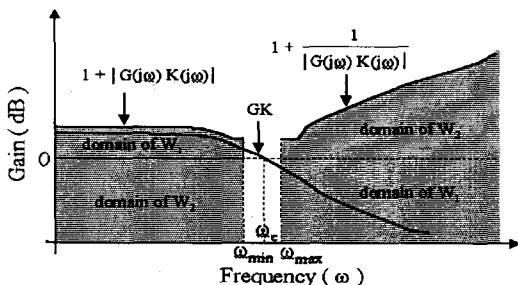


그림 3. 가중 함수의 영역

2.2 H ∞ 제어기의 구성 및 분석

본 논문에서 사용된 전기 기계 구동기 시스템은 그림 4로 주어지며 [6], 주요 설계 사양은 피드백 제어기 부하에 인가된 속도 Ω_c 와 외부의 기준 속도 사이의 오차

를 최소화하는 것으로 이에 대한 건설성 및 성능 사양은 다음과 같이 주어진다 : 먼저 대역 폭은 빠른 상승 시간과 건설한 외란 제거를 위해 ω_1 보다 높은 주파수 영역에 있어야 한다. 이때 ω_1 은 저역 주파수 영역에서 건설 성능을 만족하기 위해 $10 < \omega_1 < 50$ rad/sec 범위에 존재해야 한다. 또한 부하에 인가된 속도 Ω_c 가 외부에서 주어진 기준 속도를 근사적으로 추적하기 위해 ω_1 이하에서의 개루프 이득 감소는 -20 dB/dec 이상이어야 한다. 한편 감도 함수는 가능하면 최소화해야 하며, 건설성을 얻기 위해 ω_2 이상의 주파수 영역에서 개루프 이득 감소는 -40 dB/dec 이상이어야 한다. 여기서 ω_2 는 고역 주파수대에 있어서 건설성을 만족하기 위해 $\omega_1 < \omega_2 < 1000$ rad/sec 범위에 존재하여야 한다.

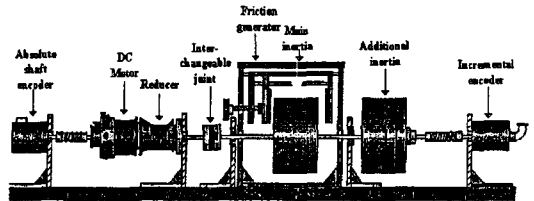


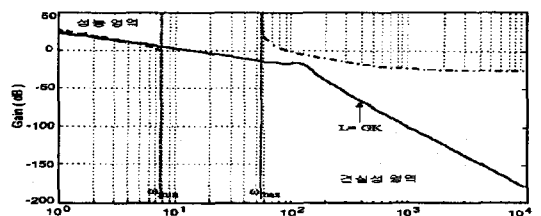
그림 4. 전기 기계 시스템

따라서 이러한 특성을 만족할 수 있도록 H ∞ 제어기 구성시 필요로 하는 가중함수를 구성한 결과 다음과 같다.

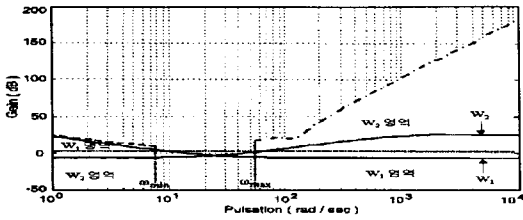
$$W_1 = \alpha \left(\frac{s+26}{s} \right), \quad W_2 = \alpha \left(\frac{1000}{26} \right) \left(\frac{s+26}{s+1000} \right) \quad (8)$$

여기서 α 는 H ∞ 최적 제어시 매개 변수 γ 의 최적값 계산에 따른 가중 함수의 이득 변화를 위해 추가된 계수이다. 이를 이용하여 H ∞ 최적 제어기가 구성된 경우, α_{\max} 및 γ_{opt} 값은 $\gamma_{\text{opt}}=5$, $\alpha_{\max}=5.84$ 로 주어지며, 이는 리카티 대수 방정식을 항상 만족하고 전달 함수 T_{ZU1} 의 특이치는 언제나 '1'보다 작으며, 감도 함수 S는 가중 함수 W_1 의 역함수 값을 항상 초과하지 않는다. 또한 상보 감도 함수 T의 경우에도 가중 함수 W_2 의 역함수를 초과하지 않는다. 구해진 개루프 전달 함수 L이 성능 및 건설성을 만족하는지를 확인하기 위해 개루프 전달 함수가 존재해야 할 영역을 도시한 결과 개루프 전달 함수는 낮은 주파수 영역에서 -20dB/dec 이상의 기울기를, 높은 주파수 영역에서는 -40dB/dec 이상의 기울기를 가지므로 원하는 건설성 및 성능 영역에 존재함을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나, 이를 본 논문에서 제안한 주파수 영역 해석을 한 결과는 그림 5와 같다.

그림 5(a)에서 개루프 전달함수는 건설성 영역 내부에 존재하는 반면, 성능 영역은 만족하지 않음을 알 수 있다. 이는 건설 안정도 대신 공칭 안정도를 만족하는 경우이다. 또한 그림 5(b)에서 가중 함수 W_1 은 주어진 조건의 임계치에 위치한다. 이는 건설성 및 성능 사양에 따라 주어진 가중함수의 이득이 부적절함을 의미한다. 따라서 α 와 γ 의 값이 안정된 건설성 및 성능 특성을 만족하도록 변화하며 해석을 한 결과 $\alpha_{\max}=3.611$, $\gamma_{\text{opt}}=5$ 를 얻었으며 그 결과는 그림 6으로 주어진다.

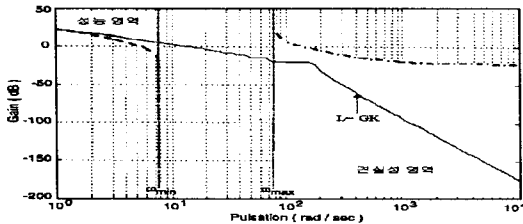


a) 개루프 전달 함수 영역

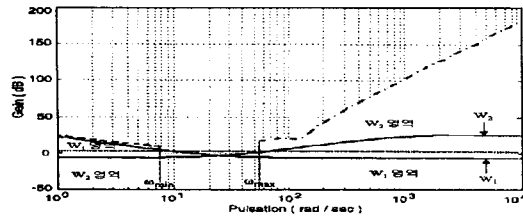


b) 가중 함수 영역
 그림 5. 가중함수 수정 전의 주파수 응답

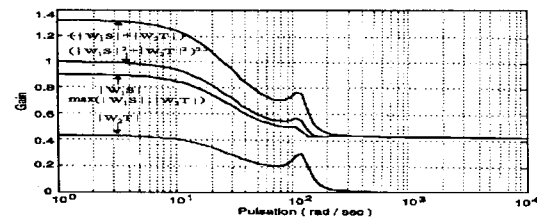
그림 6(a)에서 개루프 전달함수는 견실성 및 성능 영역 내부에 존재하며, 가중 함수 또한 주어진 영역 내부에 위치함을 알 수 있다. 이는 수정된 α 와 γ 의 값을 갖는 제어기의 견실성 및 성능 특성이 개선되었음을 의미한다.



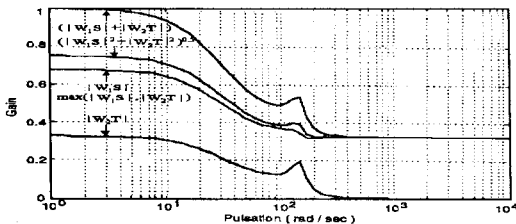
a) 개루프 전달 함수 영역



b) 가중 함수 영역
 그림 6. 가중함수 수정 후의 주파수 응답



a) 가중함수 수정 이전



b) 가중 함수 수정 이후
 그림 7. 주어진 무한놈 해석

$\|W_1 S\|$, $\|W_2 T\|$, $\max(\|W_1 S\| + \|W_2 T\|)$, $(\|W_1 S\|^2 + \|W_2 T\|^2)^{0.5}$, 및 $\|W_1 S\| + \|W_2 T\|$ 함수에 대한 보데 선도의 피크값은 이들 각각의 함수에 대한 무한 놈으로 해석되며, 초기의 제어기에 따른 이들값은 그림 7(a)로 주어지며, 수정된 가중함수 이득에 따른 이들 값은 그림 7(b)로 표현된다. 그림 7에서, 상세한 안정도 및 성능 분석을 시행하지 않을 경우, $\|W_1 S\| + \|W_2 T\|$ 와 $(\|W_1 S\|^2 + \|W_2 T\|^2)^{0.5}$ 의 무한놈 값은 임계치 '1'을 초과하지만 수정된 가중 함수에 따른 결과치는 항상 주어진 임계값을 초과하지 않는다. 따라서 본 논문에서 제안한 주파수 분석을 실행한 제어기는 이를 실행하지 않은 제어기보다 더욱 안정된 견실성을 갖는다는 것을 재확인할 수 있다.

3. 결 론

일반적으로 설계된 H_∞ 최적 제어기는 리카티 대수 방정식을 항상 만족하며, 이를 제어 대상 시스템에 적용하고 주파수 영역에서 해석할 경우 감도 함수 S와 가중 함수의 관계, 상보 감도 함수 T와 가중 함수 사이의 관계 및 표준 페루프 전달함수 T_{ZU1} 의 기본 조건을 모두 만족한다. 그러나 본 논문에서 제안된 개루프 전달함수의 주파수 응답곡선을 통해 해석한 결과 개루프 전달함수는 임계치에 접근함에 따라 견실 안정도 대신 공칭 안정도를 만족하였다. 이와 같은 문제점은 가중함수의 이득 α 와 매개변수 γ 값을 변화시켜 가며 견실성 및 성능을 만족하는 영역에서 내에서 최적 값을 찾아 해결하였다. 이를 이용하여 설계된 H_∞ 최적 제어기는 견실성 및 성능이 개선되었음을 확인할 수 있었다. 또한, 보데 선도의 피크 값을 이용하여 무한 놈을 해석한 결과 수정되기 전의 가중함수는 이득이 1이 초과하였으나 제안된 방법에 의해 수정된 가중함수는 임계값을 초과하지 않았다. 앞으로 H_∞ 최적 제어기를 용이하게 구성하기 위해서는 반복 계산을 감소시킬 수 있는 방법이 제시되어야 할 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] H.Kwakernaak, "Robust control and H_∞ optimization", Automatica, vol.29, pp.255-273, 1993.
- [2] J.M.Maciejowski, "Multivariable feedback design", Addison-wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- [3] J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonker, and B.A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. on Automatic Control, AC34, no.8, pp.831-847, August, 1989.
- [4] K.Glover and J.C.Doyle, "State-space formulae for all stabilising controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity", Systems & control letters, vol.11, pp.167-171, 1988.
- [5] J.C.Doyle, B.A.Francis and A.R.Tannenbaum, "Feedback Control Theory", Macmillan, New York, 1992.
- [6] O.Malasse, H.Razik, S.Machmoun, C.Iung, "Control of an electromechanical drive using V.S.S.C with dubious parameters", preprints, 2nd IFAC Workshop on system structure and Control, Prague, Tchecho, pp 384-387, 1992.