

볼 밸런싱 시스템의 위치 제어에 관한 연구

최 수영\*, 최 군호\*\*, 박 기현\*  
 \*성균관대학교 전기·전자·컴퓨터 공학부, \*\* (주)한미 기술연구소

A Study on the Position Control of a Ball-Balancing System

Sooyoung Choi\*, Goonho Choi\*\*, Kiheon Park\*

\*The School of Electrical & Computer Eng. Sung-Kyun-Kwan Univ, \*\*HAN-MI co.LTD.

**Abstract** - Ball-balancing control systems are ideal to demonstrate the design and hardware implementation procedures of optimal controllers based on modern control theory. This paper presents the design of an  $H_2$  optimal controller based on the generalized plant model of the ball-balancing system. The problem of balancing a metal ball on the midpoint of a beam is ultimately related to a regulating problem. So, the designed controller is correspond to this problem. The controller was experimented by DSP(digital signal processing) equipments and simulated by MATLAB. The performance of controller was verified through the experiments.

1. 서 론

볼 밸런싱 시스템의 제어 문제는 현대 제어 이론의 유용성을 검증하는 예로서 폭넓게 사용되어 왔다[1,2,3]. 볼 밸런싱 시스템은 전형적인 비선형 시스템으로서 시스템의 평형이 깨졌을 때 빔 위를 자유롭게 움직이는 볼을 대상으로 빔을 구동하여 다시 빔 위의 한 가운데에 위치시켜 평형을 유지하는 시스템이다. 기존의 연구에서 사용된 볼 밸런싱 시스템의 구조는 평형한 막대의 가운데에 회전축을 달아 막대 위로 볼을 움직여 평형을 유지하는 시스 형태를 취하고 있다[3,7,8,9]. 그래서 볼이 막대의 중심점을 벗어나게 되면 막대가 기울어져 전체 시스템의 평형이 깨어지게 된다. 본 연구에서는 시스의 한 쪽 면만을 구성한 형태의 변형된 볼 밸런싱 시스템[6]을 이용하여 볼의 위치가 막대의 중심점에서 그 상태를 유지할 수 있도록 제어하는 것을 목표로 한다. 제어기는 초기 상태를 목표 상태로 만든 후에 이를 유지하도록 하는 것으로, 시스템이 초기 상태가 아닐 때 궤환(feedback)을 이용하여 목표 상태로 만들어 주는 조정(regulating)역할을 한다. 따라서 여러 제어 기법 중에서 제어 시스템의 성능을 평가하는 평가 함수(cost function)를 정의하고 이 값을 최소화시킴으로써 원하는 제어기의 형태를 결정하는  $H_2$  설계 기법을 이용하여 제어기를 설계하고자 한다.  $H_2$  설계 기법은 다변수 시스템의 제어 문제를 체계적으로 다룰 수 있고, 시스템의 성능을 표현하는 평가함수의 값을 계산함으로써 제어 시스템이 도달할 수 있는 최상의 경우를 해석적인 방법으로 알려 주고 있다는 점에서 획기적이며[4,5], 기준 입력의 추종, 외란 및 측정 잡음의 영향 제거 등에 효율적이라고 알려져 있다. 본 연구에서는 변형된 볼 밸런싱 시스템을 이용한 표준화 플랜트(Generalized Plant)모델에 대하여 평가 함수 값을 유한하게 하는  $H_2$  제어를 설계하고 모의 실험에서의 이론적인 결과와 실제 시스템에 적용한 결과를 비교, 분석하여 제어 이론의 유용성을 검증해 보고자 한다.

2. 본 론

2.1 볼 밸런싱 시스템의 모델링

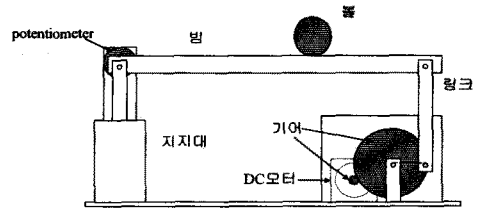


그림 1. 볼 밸런싱 시스템의 구조

볼 밸런싱 시스템의 구조는 그림 1과 같으며, 제어입력이 전달되는 구동 장치가 있고, 지지대를 축으로 제한된 각도 내에서 회전할 수 있는 빔이 있으며, 빔 위를 따라 움직이는 볼이 빔의 경사각을 이용하여 볼의 위치를 제어할 수 있도록 하는 구조를 가진 전기 기계적인 시스템이다. 기존의 볼 밸런싱 시스템은 양팔 저울의 형태를 취하고 있는데 본 연구에서의 시스템은 기존 시스템의 우측 부분만을 구성한 형태로 볼의 위치를 제어하기 쉽게 하기 위하여 구동 장치를 회전축의 중심이 아닌 우측 끝으로 이동시켜 링크 장치를 이용하여 빔의 경사각을 조절하도록 되어 있다. 기어의 회전각과 빔의 경사각의 관계, 구동 장치 부분의 운동 방정식, 볼의 위치와 빔의 경사각과의 관계를 종합하여 전체 시스템의 운동 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} &= -\frac{R_a}{L_a} \dot{\theta} + \frac{a}{n} \cdot \frac{k_b}{L_a} \dot{\theta} + \frac{1}{L_a} V \\
 \ddot{\phi} &= \frac{m}{m + \frac{I_{ball}}{r^2}} \ddot{\phi} - \frac{mg}{m + \frac{I_{ball}}{r^2}} \sin \theta - \frac{b_x}{m + \frac{I_{ball}}{r^2}} \dot{\phi} \\
 & \left( a \frac{l_3}{l_1} \left( \frac{J_m}{n^2} + J_g \right) + I_{beam} + m \dot{\phi}^2 \right) \ddot{\theta} \\
 & = \left( -a \frac{l_3}{l_1} \left( \frac{b_m}{n^2} + b_g \right) - 2m \dot{\phi} \dot{\theta} \right) \dot{\theta} - mg \phi \cos \theta \\
 & \quad - l_3 m_b g \cos(a\theta) - \frac{l_3}{l_1} \cdot \frac{k_t}{n} \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

전체 시스템의 운동 방정식으로부터 상태 방정식을 구하기 위하여 모터의 전기자 전류, 볼의 위치, 볼의 속도, 빔의 경사각, 빔의 각속도를 각 상태로 놓고, 모터의 입력 전압을 제어 입력으로 하여 상태를 다음과 같이 선정하였다.

$$\begin{aligned}
 [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T &= [i \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \\
 u &= V
 \end{aligned}$$

본 연구에서의 위치 제어 문제는 볼을 목표 위치인 동작점에서 유지하도록 하는 레귤레이터 설계문제이므로, 시스템의 분석 및 제어가 설계를 용이하게 하기 위하여 비선형 요소를 동작점에 대해 선형화 하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \delta \dot{x}_3 \\ \delta \dot{x}_4 \\ \delta \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_5 & a_6 & 0 & 0 & a_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u$$

$$y = C \delta x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [\delta x_1 \ \delta x_2 \ \delta x_3 \ \delta x_4 \ \delta x_5]^T$$

## 2.2 표준화 플랜트 모델에 대한 $H_2$ 설계 기법

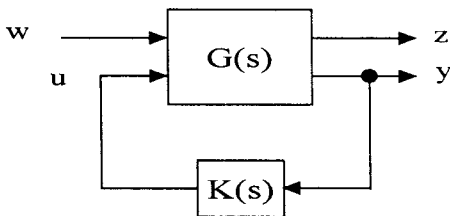


그림 2. 일반적인 GP 모델

일반적 제어 시스템의 구조는 그림 2와 같은 구조이며 위의 그림의 GP의 전달행렬 표현은

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

이고, 이 식을 풀어서

$$z(s) = G_{11}(s)u(s) + G_{12}(s)u(s)$$

$$y(s) = G_{21}(s)u(s) + G_{22}(s)u(s)$$

이다. 또한, 내부 모델을 다음과 같이 설정 할 때

$$\dot{x} = Ax(t) + B \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Cx(t) + D \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

행렬 B, C, D는

$$B = [B_1 \ B_2] \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

로 분할되며, 플랜트가 진분수적(strictly proper)일 경우  $D_{22} = 0$ 이다. 따라서, GP모델의 형태는 다음과 같이 정의되며,

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

아래와 같은 조건을 만족하는 것으로 가정한다.

- 1)  $(A, B_2)$ 가 가안정(stabilizable)하고,  $(A, C_2)$ 는 가검출(detactable)하다.
- 2)  $D_{11} = 0$
- 3)  $D_{12}$ 와  $D_{21}^T$ 는 전열랭크(full column rank)를 갖는다.

GP 모델에 대한  $H_2$ 노름(norm) 최적제어 문제는 그

림 2의 w에서 z까지의 전달함수인  $T_{zw}$ 의  $H_2$ 노름(norm)을 최소화하는 제어기  $K(s)$ 를 찾는 문제이다. 즉,

$$\min_{\text{admissible } K(s)} \|T_{zw}\| = \min_{\text{admissible } K(s)} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}(T_{zw}(j\omega)T_{zw}^*(j\omega))d\omega \right]^{1/2}$$

이다. 여기서 "admissible  $K(s)$ "라는 것은 전체 시스템을 내부적으로 안정시키는 제어기를 의미한다. 최적  $H_2$  제어기  $K(s)$ 는 기존의 LQG 최적제어 문제의 해를 이용하여 구할 수 있다.

$$J_{LQG} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T z^T z dt \right\}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T [x^T u^T] \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} [C_1 \ D_{12}] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \right\}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T [x^T u^T] \begin{bmatrix} Q & N_c \\ N_c^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \right\}$$

이며, 백색 시스템 잡음 d(t)와 백색 측정 잡음 m(t)가 correlated 되어  $[B_1 \ D_{21}]^T$ 의 채널로 들어오는 것으로 생각하고, 이들의 joint correlated 함수는

$$E \left\{ \begin{bmatrix} d(t) \\ m(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) & m(\tau) \end{bmatrix}^T \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} E & N_f \\ N_f^T & \Theta \end{bmatrix} \delta(t - \tau) = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{12} B_1^T & D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix} \delta(t - \tau)$$

이라 하자. 이 경우,  $H_2$  최적제어기  $K(s)$ 는 다음의 전 상태 피드백(full-state feedback) 게인  $K_c$ 와 칼만 필터(Kalman filter) 게인  $K_f$ 를 통해 구해진다.

### 1) 칼만 필터(Kalman filter)

$$\hat{\dot{x}} = A \hat{x} + B_2 u + K_f (y - C_2 \hat{x} - D_{22} u)$$

$$K_f = (\sum C_2^T + N_f) \Theta^{-1} = (\sum C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

여기서  $\sum$ 는 다음의 대수 리카티 방정식(Algebraic Riccati Equation)의 해로서, 대칭적(symmetric)이고 양의 반한정(positive semi-definite)한 유일 해이다.

$$\sum A^T + A \sum - (\sum C_2^T + N_f) \Theta^{-1} (C_2 \sum + N_f^T) + E = 0$$

### 2) 전 상태 피드백(Full-state Feedback)

$$u = -K_c \hat{x}$$

$K_c = R^{-1} (B_2^T P + N_c^T) = (D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T P + D_{12}^T C_1)$  여기서 P는 다음의 ARE의 해로서 양의 반한정(positive semi-definite)한 유일 해이다.

$$A^T P + P A - (P B_2 + N_c) R^{-1} (B_2 P + N_c) + Q = 0$$

최종적인  $H_2$  제어기  $K(s)$ 는

$$K(s) = \begin{bmatrix} A - K_f C_2 - B_2 K_c + K_f D_{22} K_c & : & K_f \\ \dots & & \dots \\ & K_c & : & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 이상의  $H_2$  제어기 설계기법을 이용하여 볼 밸런싱 시스템의 제어기를 설계 하고자 한다.

## 2.3 제어기 설계

그림 3은 GP 모델로 변환한 볼 밸런싱 시스템을 나타내며, 본 연구에서는 W1에서 W7까지의 가중치를 적절히 변화시키면서 만족한 성능을 갖는 제어기를 구현하였다. W1에서 W7까지의 가중치는 다음과 같다.

$$W1 = 0.1, \quad W2 = 0.1, \quad W3 = \frac{10}{s+10}, \quad W4 = \frac{1}{s+10}$$

$$W5 = 30, \quad W6 = 10, \quad W7 = 5$$

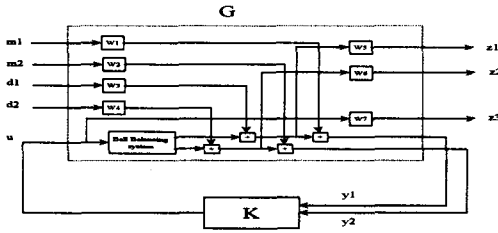


그림 3. GP 모델로 변환한 볼 밸런싱 시스템

### 2.4 실험 장치 구성

전체 실험 장치 구성도는 다음과 같다.

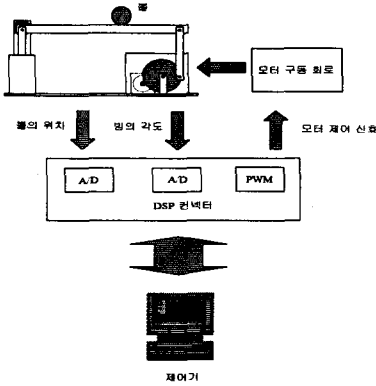
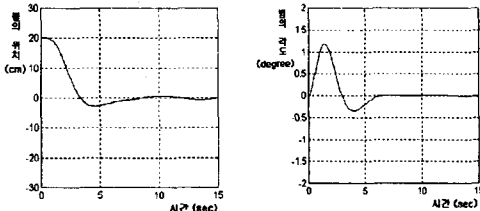


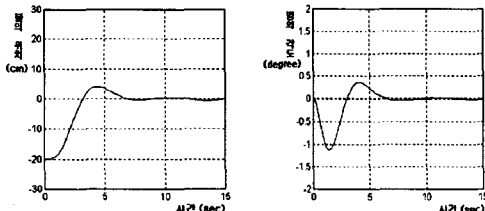
그림 4. 전체 실험 장치 구성도

### 2.5 시뮬레이션 결과

볼의 위치를 변화 시키고 함께 사인 함수 곡선의 외란이 인가되는 경우에 대해 시뮬레이션 하였다.



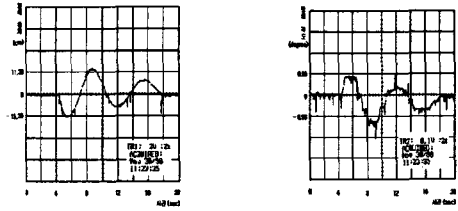
(초기 상태 : 빔의 경사각 0°, 볼의 위치 : 20cm)



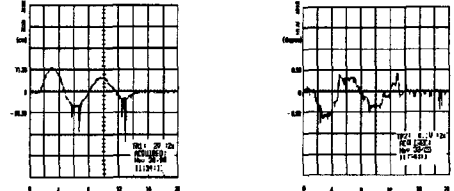
(초기 상태 : 빔의 경사각 0°, 볼의 위치 : -20cm)

### 2.6 실험 결과

설계된 제어기를 작동하여 제작된 플랜트의 동작점에서 소 상태를 잘 유지하는지의 조정문제를 보기 위해 먼저 평형 상태를 유지시킨 후에, 외란이 가해지는 경우 평형 상태로 잘 복원되는지를 실험하였다. 여기서 외란 요소로는 인위적으로 볼의 상태를 변화시키는 것(임펄스 상태)으로 하였으며, 이때 시스템의 볼의 위치 변화와 빔의 각도 변화를 측정 하였다.



(동작점에서 오른쪽으로 외란을 준 경우)



(동작점에서 왼쪽으로 외란을 준 경우)

## 3. 결 론

볼 밸런싱 시스템을 표준화 플랜트(GP)모델로 바꾸어 여러 제어기법 중에서 제어 시스템의 성능 최적화를 목적으로 두는  $H_2$  최적 제어 기법을 적용하여 제어기를 설계하였다. 제어기를 전달함수 형태가 아닌 상태공간 모델로서 구현하였으며, 초기 상태를 평형 상태로 만든 후에 이를 유지하도록 하는 조정(regulating)문제에 적용시켰다. 그리고 시뮬레이션과 실제 실험을 통해 설계된 제어기의 성능을 검증하였다.

### (참 고 문 헌)

- [1] Flank L. Lewis, "Applied Optimal Control and Estimation", Prentice Hall International, 1992
- [2] 김 중식, "동적 시스템 및 제어공학", 1994
- [3] P. E. Wellstead, V. Chimes, P. R. Fletcher, R. Moody, A. R. Robins., "The Ball and Beam Control Experiment", Int. J. Elect. Eng. Eeduc., vol. 15, pp. 21-39, 1989
- [4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B.A. Francis, "State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems", IEEE Transaction on automatic control, vol. 34, pp. 831-847, 1989
- [5] Richard Y. Chang, Michael G. Safonov, "Robust Toolbox for Use with MATLAB User's Guide", THE MATH WORKS INC., 1992
- [6] 전 진홍, "일차원 볼 밸런싱 시스템의 위치 제어에 관한 연구", 성균관대학교, 1996
- [7] 이 남기, "유전자 알고리즘을 이용한 Ball-Beam 시스템의 제어기 설계에 관한 연구", 광운대학교, 1996
- [8] 백 석찬, "반복학습을 이용한 공과 막대 시스템의 신경회로망 제어기 설계", 서울대학교, 1993
- [9] 정 현주, "LQG 레귤레이터를 이용한 볼-밸런서 제어", 건국대학교, 1994