

임펄스응답 데이터의 펄스전달함수의 근사

°이동철* 배종일* 정형환**

* 부경대학교 전기·제어계측공학부

** 동아대학교 전기공학과

Approximation of Pulse Transfer Function
of Impulse Response Data

Dong-Cheol Lee*, Jong-Il Bae*, Hyeng-Hwan Chung**

* Dept. of Electrical and control Eng. Pukyong Nat'l Univ.

** Dept. of Electrical Eng. Dong-A Univ.

Abstract- As a method of obtaining pulse transfer function: transfer function of discrete-time from input-output data, there are method of obtaining unknown parameter of pulse transfer function from estimated impulse response before[1-3]. There is no need to approximate to several meanings because of not being established algebraical relations between impulse response for estimation error and parameter of transfer function exactly.

In this paper, I inquire the method[4] of obtaining the optimal pulse transfer function as a meaning of Hankel norm approximation from impulse response data and examine estimated property as computer simulation from this method.

1. 서 론

입출력 데이터로부터 이산시간의 전달함수 즉, 펄스전달함수를 구하는 방법의 하나로써, 먼저 입출력 데이터로부터 유한개의 임펄스응답을 추정하고, 추정된 임펄스응답으로부터 펄스전달함수의 미지 파라미터를 구하는 방법이 있다[1-3]. 추정오차를 위한 임펄스응답과 전달함수의 파라미터의 대수관계가 정확하게 성립되지 않으므로 몇 가지 의미로 근사시킬 필요가 있다.

본 논문에서는 임펄스응답 데이터로부터 Hankel norm 근사의 의미로 최적인 펄스전달함수를 구하는 방법[4]를 고찰하고, 이 방법으로 구한 추정치의 성질을 컴퓨터 시뮬레이션

으로 검토한다.

2. 문제의 설정

m개의 임펄스응답 데이터열 $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ 이 있다고 하자. 이 $\{h_i\}$ 을 이용하여 식(1)과 같은 $m \times m$ Hankel 행렬을 구성한다.

$$\Phi(H) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{m-1} & h_m \\ h_2 & h_3 & \dots & h_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ h_m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

이때 문제는 식(2)로 정의되는

$$H(z) = \sum_{i=0}^m h_i z^{-i} \quad (2)$$

함수 $\|H(z) - H^T(z)\|_H$ 을 최소화하는 r차의 유리전달함수 $H^T(z)$ 를 구하는 것이다.

여기서, $\|\cdot\|_H$ 는 노오옴이며, 함수 $F(z)$ 는 다음과 같다.

$$F(z) = \sum_k = 0^\infty f_k z^{-k}$$

Hankel norm는 다음과 같이 정의된다.

$$\|F(z)\|_H = \bar{\sigma}(\Phi)$$

단, $\bar{\sigma}(\cdot)$ 는 (\cdot) 내의 행렬의 최대 특이치를 나타낸다.

3. 평형실현

$H(z)$ 의 m차원 상태공간 실현의 하나는 다음과 같다.

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$$

$$y(k) = c^T x(k) \quad (3)$$

이때, $A^k = 0, k \geq m$ 인 것에 주의한다. 가관

측성행렬 및 가제어성행렬을 각각 다음과 같이 두고,

$$G_0 = [c \ A^T c \ \cdots \ (A^T)^{m-1} c]^T$$

$$G_c = [b \ Ab \ \cdots \ A^{m-1} b]$$

잘 알려져 있는 바와 같이 Hankel행렬 $\Phi(H)$ 는, $h_k = c^T A^{k-1} b$, $k=1, 2, \dots, m$ 로부터 다음의 식(4)와 같이 표현된다.

$$\Phi(H) = G_0 G_c \quad (4)$$

한편, Hankel행렬 $\Phi(H)$ 를 특이치분해하면 다음 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} \Phi(H) &= U \Sigma V^T \\ &= (U \Sigma^{\frac{1}{2}}) (\Sigma^{\frac{1}{2}} V^T) \end{aligned} \quad (5)$$

$$G_0 = U \Sigma^{\frac{1}{2}}, \quad G_c = \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T \text{ 되는 실현}$$

(A, b, c^T) 를 고려하면 $A^k = 0$, $k \geq m$ 로부터 가관측 Gramian은 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^{k-1} c c^T A^{k-1} \\ = G_0^T G_0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \Sigma^{\frac{1}{2}} U^T U \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma$$

가제어 Gramian은 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} A^{k-1} b b^T (A^T)^{k-1} \\ = G_c G_c^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \Sigma^{\frac{1}{2}} V^T V \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma$$

이와 같은 실현 (A, b, c^T) 은 $H(z)$ 의 평균 실현임을 알 수 있다.

G_0^{\cdot} 을 다음과 같이 정의하면

$$G_0^{\cdot} = [A^T c \ (A^T)^2 \ \cdots \ (A^T)^{m-1} c \ 0]^T$$

$A^m = 0$ 로부터 식(8)과 같다.

$$G_0 A = G_0^{\cdot} \quad (8)$$

A 는, 다음 식(9)와 같이 계산된다.

$$A = G_0^{-1} G_0^{\cdot} = (U \Sigma^{\frac{1}{2}})^{-1} (U \Sigma^{\frac{1}{2}})^{\cdot} \quad (9)$$

또 G_c, G_0 의 구조로부터 b 및 c^T 가 각각

$\Sigma^{\frac{1}{2}} V^T$ 의 제1열, $U \Sigma^{\frac{1}{2}}$ 의 제1행으로부터 구할 수 있음을 알 수 있다.

4. 최적 Hankel norm 근사

앞 절의 평균실현 (A^T, b, c^T) 에 있어서,

Σ 가 다음 식(10)과 같다고 하면

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag} [\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_m, \sigma_m, \sigma_{r+1}] \\ &= \text{diag} [\Sigma_1, \sigma_{r+1}] \end{aligned} \quad (10)$$

$H(z)$ 의 r 차 최적 Hankel norm 근사 $H^T(z)$ 는 다음과 같이 된다.

$$H^T(z) = [\hat{c}^T (zI - \hat{A})^{-1} b]_+$$

여기서, $[M(z)]_+$ 는 $M(z)$ 의 안정부분을 나타내며, 또 (\hat{A}, b, \hat{c}^T) 는 다음의 Lyapunov방정식을 만족한다.

$$A_e P_e A_e^T - P_e + b_e b_e^T = 0 \quad (11)$$

$$A_e^T Q_e A_e - Q_e + c_e c_e^T = 0 \quad (12)$$

단,

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}, \quad b_e = \begin{bmatrix} b \\ \hat{b} \end{bmatrix},$$

$$c_e^T = [c^T \quad -\hat{c}^T]$$

$$P_e = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & I_{m-1} \\ 0^T & \sigma_{r+1} & 0^T \\ I_{m-1} & 0 & \Sigma_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Q_e = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & I_{m-1} \\ 0^T & \sigma_{r+1} & 0^T \\ -\Gamma & 0 & \Sigma_1 \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_{r+1}^2 I_{m-1} \quad (15)$$

따라서, A, b, c^T 를 Σ 의 분할에 대응되는 분할로 나타내면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{12} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [c_1^T \quad c_2]$$

A_{11} ; $(m-1) \times (m-1)$ 행렬

a_{12}, a_{21}, b_1, c^T ; $(m-1)$ 차원벡터

$\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}^T$ 는 식(11), (12)에서 식(16), (17), (18)과 같이 된다.

$$\hat{A} = [A_{11} - \frac{1}{b_2} b_1 a_{21}]^T \quad (16)$$

$$\hat{b} = -\frac{1}{b_2} (a_{21} \hat{A})^T \quad (17)$$

$$\hat{c}^T = -\frac{1}{c_2} a_{12}^T \Gamma \hat{A} \quad (18)$$

5. 계산예

먼저, 펄스전달함수

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} \quad m=30$$

의 임펄스응답열 $\{h_i\}$ 을 구하여보자. 이 $\{h_i\}$ 을 이용하여 오차 $\epsilon=0.4$ 의 최적 Hankel norm 근사 $H^T(z)$ 를 계산한 결과를 그림에 나타냈다. 여기서, $H^T(z)$ 의 차수는 $r=2$ 이며, $\sigma_{r+1}=0.3653$ 이다.

6. 결론

최적 Hankel norm 근사법은 극(pole)을 배치하지 않으면 안될 뿐만 아니라, 임의의 진폭 특성함수에 대해 비선형에는 관계치 않았다. 이 방법은 평형실현 조건을 이용하여 Hankel norm 행렬특이치분해의 주요부분에 기초하여 근사오차가 Lyapunov 방정식을 만족하므로 계산방법이 간단하며, 계산속도가 빠르고, 또 계산결과도 안정하였다.

본 논문에서는 단일입출력의 경우에는 최적 Hankel norm 근사법을 소개했지만, 다중입출력의 경우에도 최적 Hankel norm 근사법이 적용되지만, 본 논문에서는 언급하지 않았다.

또, 본 논문에서는 5차까지의 모델을 근사계산했지만, 실제로는 5차이상의 모델도 계산할 수 있으나 시간과 컴퓨터의 메모리 한계로 본 논문에서는 계산하지 않았다.

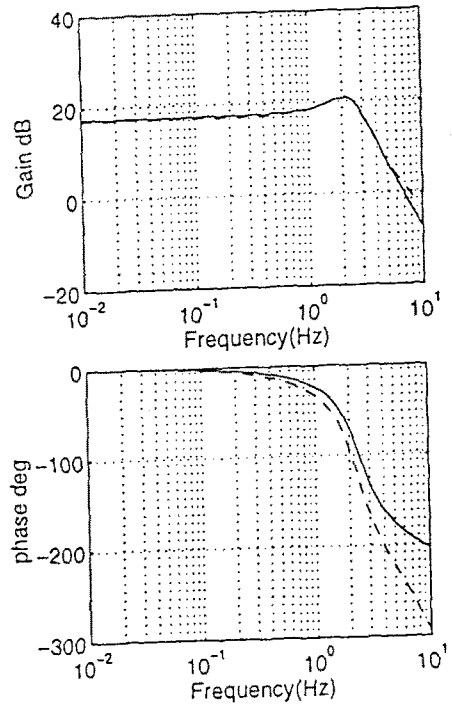
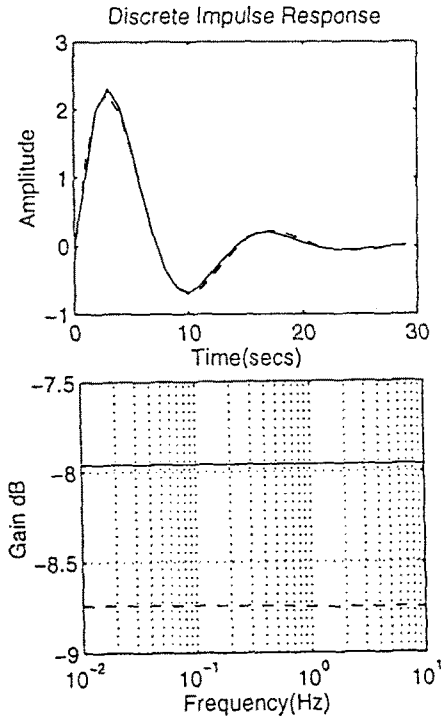


그림 1. 시스템의 2차근사

[참고문헌]

- [1] J. Kim & K. Wada, "On System Identification of Discrete-Time Systems from Noisy Impulse Response Data," Proc. 26th ISCI E Int. Symp. On Stochastic Systems Theory and Its Applications, Osaka, pp. 59-64, 1994
- [2] A. G. Evans & R. Fischl, "Optimal Least Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters," IEEE Trans. Audio Electro-Acoust., ASSP-25, pp. 229-234, 1977
- [3] A. K. Shaw, "Optimal Identification of Discrete-Time systems from Impulse Response Data," IEEE Trans. Signal Processing, 42, pp. 113-120, 1977
- [4] B. S. Chen, S. C. Peng & B. W. Chiou, "IIR Filter Design via Optimal Hankel Norm Approximation", IEE Proc. G., 139(5), pp. 113-120, 1992
- [5] B. S. Chen, B. W. Chiou & S. C. Peng, "Minimum Sensitivity IIR Filter Design Using Principal Component Approach", IEE Proc. G, 138, pp. 474-482, 1991