

확장  $H^\infty$  필터를 이용한 표적 추적 시스템 설계

\*이현석\*, 나원상\*, 진승희\*, 윤태성\*\*, 박진배\*  
 \*연세대 전기·컴퓨터공학과, \*\*창원대 전기공학과

Design of Target Tracking systems Using The extended  $H^\infty$  Filter

Lee, Hyun Seok\* Ra, Won Sang\* Jin, Seung Hee\* Yoon, Tae Sung\*\* Park, Jin Bae\*  
 \*Dept. of Electrical & Computer Engineering, Yonsei Univ.  
 \*\*Dept. of Electrical Engineering, Changwon National Univ.

**Abstract** - In this paper, the design method of target tracking systems using the extended  $H^\infty$  filter(EHF) is proposed. Usually, a Cartesian coordinate frame is well suited to describe the target dynamics. However, the measurements made in radar-centered polar coordinates are expressed as nonlinear equations in Cartesian coordinates. Thus the tracking problem is concerned with the nonlinear estimation. The extended  $H^\infty$  filter is able to deal with the problems arising in the target tracking systems such as the parameter uncertainty included inevitably in modeling physical systems mathematically, the unavailability of the stochastic information about exogenous disturbances, and errors due to the linearization of measurement equations. We show the proposed filter is robust than the extended Kalman filter(EKF) through a simple target tracking example.

여기에서  $f_i, g_i, h_i$ 는 미분 가능한 연속 시변 비선형 함수이고, 상태 변수의 초기치  $x_0$ 는 가우시안 랜덤 변수로,  $w_i, v_i$ 는 영평균 백색잡음으로 가정한다. 식 (1)에서  $x_0, w_i, v_i$ 는 다음 Gramian을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ w_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ w_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^* & R_i \end{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}$$

비선형 상태 방정식 (1)을 선형화하고 선형화된 상태 방정식에 대한 칼만 필터 문제를 푸는 것이 확장 칼만 필터 문제이므로 비선형 함수  $f_i, g_i, h_i$ 를  $\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i-1}$ 에서 Taylor 급수로 전개하면 다음 결과를 얻는다.

1. 서 론

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= f_i(\hat{x}_{i|j}) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{i|j}} (x_i - \hat{x}_{i|j}) + h.o.t \\ g_i(x_i) &= g_i(\hat{x}_{i|j}) + h.o.t \\ h_i(x_i) &= h_i(\hat{x}_{i|j-1}) + \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{i|j-1}} (x_i - \hat{x}_{i|j-1}) + h.o.t \end{aligned} \quad (2)$$

본 논문에서는 확장  $H^\infty$  필터를 이용한 표적 추적 시스템을 제안한다. 지금까지 표적 추적 시스템은 칼만 필터[1,2]를 기반으로 설계되어 왔다. 그러나 칼만 필터는 시스템 모델이 완벽하다는 가정과 외부 잡음이 백색 잡음이라는 가정이 필요하므로 이러한 가정을 만족하지 않는 상황하에서는 추정 성능이 저하되는 단점이 있다[3]. 특히 확장 칼만 필터의 경우 비선형 시스템의 선형화를 통해 얻어진 근사화된 선형 시스템 모델을 기반으로 하기 때문에 추정 오차가 증가할 가능성이 크다. 실제로 직각 좌표계는 표적의 운동상태를 나타내는데 적당하지만 측정 주체-레이더 같은 경우 표적의 방위와 거리를 측정-에 의한 측정 방정식은 비선형 함수로 나타내어진다[4]. 또한 일반적으로 표적 추적 시스템에서의 외부 잡음은 특성을 결정하기 어려운 경우가 많은 것으로 알려져 있다.

식 (2)에서 고차항(h.o.t)을 무시하고,  $\hat{x}_{i1}$ 와  $\hat{x}_{i-1}$ 을 알고 있다고 가정하면, 다음과 같은 근사화된 선형 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_i x_i + G_i w_i + p_i \\ y_i &= H_i x_i + v_i + q_i \end{aligned} \quad (3)$$

이러한 특성을 고려해 볼 때, 결국 칼만 필터를 기반으로 하는 기존 표적 추적 시스템의 문제점을 크게 두가지로 요약할 수 있다. 첫째, 물리적 시스템을 수학적으로 모델링함에 따라 필연적으로 개입되는 시스템의 파라미터 불확실성에 효과적으로 대응하지 못하며, 둘째, 외부 잡음에 대한 통계적 가정이 불확실한 경우, 혹은 측정 방정식의 선형화 과정에서 오차가 발생하는 경우에 대해 강인하지 못하다. 이러한 문제를 보완하기 위하여 본 논문에서는 확장 칼만 필터 알고리즘과 동일한 구조를 가지는 확장  $H^\infty$  필터[5,6]를 이용, 새로운 표적 추적 시스템을 설계하고자 한다. 실제로 공칭  $H^\infty$  필터에 기반한 확장  $H^\infty$  필터는 통계적 가정이 주어지지 않은 외부 잡음뿐만 아니라 선형화에 따른 모델링 오차와 시스템 자체의 파라미터 불확실성에 대해 확장 칼만 필터보다 강인한 성능을 지닌 것으로 알려져 있다[6].

여기에서

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{i|j}} \\ G_i &= g_i(\hat{x}_{i|j}) \\ H_i &= \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}_{i|j-1}} \\ p_i &= f_i(\hat{x}_{i|j}) - F_i \hat{x}_{i|j} \\ q_i &= h_i(\hat{x}_{i|j-1}) - H_i \hat{x}_{i|j-1} \end{aligned}$$

동속 운동을 하는 간단한 2차원 표적 시스템 예제를 통하여 기존의 기법과 제안된 방법의 성능을 비교, 검증하도록 한다.

식 (3)의 근사화된 상태 방정식에서 만일 Gramian  $R_y = \langle y_i, y_i \rangle$ 이 비특이(nonsingular)라고 하고,  $\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i-1}$ 을 각각  $x_i$ 의  $span\{y_0, \dots, y_i\}$ ,  $span\{y_0, \dots, y_{i-1}\}$  위로의 정사영으로 정의했을 때, 확장 칼만 필터식은 다음과 같다[1,2].

2. 확장 칼만 필터

다음과 같은 일반적인 형태의 시변 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f_i(x_i) + g_i(x_i)w_i \\ y_i &= h_i(x_i) + v_i \end{aligned} \quad (1)$$

$$\hat{x}_{i|j} = \hat{x}_{i-1} + K_i(y_i - h_i(\hat{x}_{i-1})) \quad \hat{x}_{0|1} = x_0 \quad (4)$$

$$\hat{x}_{i+1|j} = f_i(\hat{x}_{i|j}) \quad (5)$$

이때, 필터 이득  $K_i$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} K_i &= P_{i| i-1} H_i^* R_{e,i}^{-1} \\ R_{e,i} &= H_i^* P_{i| i-1} H_i^* + R_i \end{aligned} \quad (6)$$

또한, 식 (6)에서 상태 추정 오차의 공분산은 다음과 같은 리카티 순환식을 만족한다.

$$\begin{aligned} P_{i+1| i} &= F_i P_{i| i-1} F_i^* - (F_i P_{i| i-1} H_i^* + G_i S_i^*) R_{e,i}^{-1} \\ &\quad \times (F_i P_{i| i-1} H_i^* + G_i S_i^*)^* + G_i Q_i G_i^* \\ P_{0| -1} &= P_0 \end{aligned}$$

### 3. 확장 $H^\infty$ 필터

시변 비선형 상태 방정식 (1)과 근사화된 선형 방정식 (3)에 대하여, 추정하고자 하는 상태 변수의 임의의 선형합을  $z_i = L_i x_i$  라고 하고 필터링 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$e_i = \hat{z}_{i| i} - L_i x_i \quad (7)$$

여기에서  $\hat{z}_{i| i}$ 는 0에서  $i$  번째 까지의 측정치를 통해 얻어진 필터의 추정치를 나타낸다. 이 장에서 소개하려고 하는 준 최적 확장  $H^\infty$  필터는 잡음 감쇄 수준  $\gamma > 0$ 와 비선형 시스템 (1)에 대하여 외란으로부터 추정 오차의 최대 에너지 이득을 아래와 같이  $\gamma^2$  이하로 제한한다.

$$\sup_{x_0, w, v, e_i \in \mathcal{L}_2} \frac{\sum_{j=0}^i e_j^* e_j}{(x_0 - \hat{x}_0)^* \Gamma_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{j=0}^i w_j^* w_j + \sum_{j=0}^i v_j^* v_j} < \gamma^2 \quad (8)$$

주어진 양의 스칼라  $\gamma$ 에 대해 조건 (8)을 만족하는 확장  $H^\infty$  필터가 존재할 가정은 다음과 같다.

1.  $[F_i, G_i]$ 가 제어 가능하다.
2. 확장  $H^\infty$  필터의 리카티 순환식을 만족하는 추정 오차 공분산 행렬을  $P_{i| i-1}$ 라고 하면, 모든 시간 인덱스  $i$ 에 대해 다음 식이 만족된다.

$$P_{i| i-1}^{-1} + H_i^* H_i - \gamma^{-2} L_i^* L_i > 0 \quad (9)$$

이때, 조건 1, 2를 만족하는  $H^\infty$  필터 식은 다음과 같이 주어지며

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i| i} &= \hat{x}_{i| i-1} + K_i (y_i - h_i(\hat{x}_{i| i-1})) \quad \hat{x}_{0| -1} = x_0 \\ \hat{x}_{i+1| i} &= f_i(\hat{x}_{i| i}) \end{aligned} \quad (10)$$

확장  $H^\infty$  필터 개인은 다음과 같이 구할 수 있다[6].

$$K_i = P_{i| i-1} H_i^* (I + H_i P_{i| i-1} H_i^*)^{-1} \quad (12)$$

위의 식 (12)에서 추정 오차의 공분산 행렬  $P_{i| i-1}$ 은 다음 리카티 순환식을 만족한다.

$$\begin{aligned} P_{i+1| i} &= F_i P_{i| i-1} F_i^* - F_i P_{i| i-1} \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i^* \\ L_i^* \end{bmatrix} P_{i| i-1} F_i^* + G_i Q_i G_i^* \\ P_{0| -1} &= P_0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$R_{e,i} = \begin{bmatrix} H_i^* \\ L_i^* \end{bmatrix} P_{i| i-1} \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 4. 표적 추적 시스템 예제

등속 2차원 운동을 하는 표적 추적 모델은 다음과 같다 [4,7]. 이때 플랫폼의 위치는 원점에 고정되어 있는 것으로 생각한다.

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ x_v \\ y_v \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ x_v \\ y_v \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_i$$

$$\begin{bmatrix} r^m \\ \theta^m \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \\ \tan^{-1}(y_p / x_p) \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix}_i$$

여기에서  $x_p, y_p$ 는 각각 표적의 위치를,  $x_v, y_v$ 는 각각  $x, y$  방향으로의 속도를 나타낸다. 위의 상태 방정식에서 샘플링 주기  $T=1$ 이며, 파라미터 불확실성을 나타내는 변수  $\alpha$ 는  $|\alpha| \leq 10^{-3}$ 의 범위를 갖는 시변수로 표적의  $x$ 방향 속도와 관련된 파라미터이다. 또한 프로세스 잡음  $w_i$  및 측정 잡음  $v_i$ 은 영평균 백색잡음으로 다음과 같은 공분산 행렬을 갖는 것으로 가정한다.

$$E\{w_i w_i^T\} = Q_i = 10^{-2}$$

$$E\{v_i v_i^T\} = R_i = \text{diag}\{10^{-2}, 3\sigma^2\}$$

$$E\{w_i v_j^T\} = 0$$

확장 칼만 필터를 설계하기 위해 측정 방정식  $h_i(x_0)$ 를 아래와 같이 근사화 한다.

$$H_i = \left. \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \bar{\theta}_i}{\bar{r}_i} & \frac{\sin \bar{\theta}_i}{\bar{r}_i} & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \bar{\theta}_i}{\bar{r}_i} & \frac{\cos \bar{\theta}_i}{\bar{r}_i} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta}_i = \tan^{-1} \left( \frac{\hat{y}_{p| i-1}}{\hat{x}_{p| i-1}} \right)$$

$$\bar{r}_i = \left( \hat{x}_{p| i-1}^2 + \hat{y}_{p| i-1}^2 \right)^{1/2}$$

표적은 원점을 기준으로 ( $x_{j0} = -100,000\text{m}, y_{j0} = 100,000\text{m}$ ) 지점에서  $125\text{m/s}$  ( $x_v = 100\text{m/s}, y_v = 75\text{m/s}$ )의 속도로 등속 2차원 운동을 한다고 가정한다(Fig. 1). 이때 Platform의 위치를 원점으로 한다.

제한한 표적 추적 시스템의 성능을 확장 칼만 필터와 비교하기 위하여 시스템에 파라미터 불확실성에 있는 경우와 그렇지 않은 경우에 대하여 각각 Monte-Carlo 모의실험을 100회 수행하였고 실험 결과는 아래와 같다. Fig. 2,3,4는 파라미터 불확실성이 없는 경우, Fig. 5,6,7은 파라미터 불확실성이 있는 경우에  $x$  방향의 위치 및 속도와 그에 대한 추정 오차 및 평균 자승 오차이다.

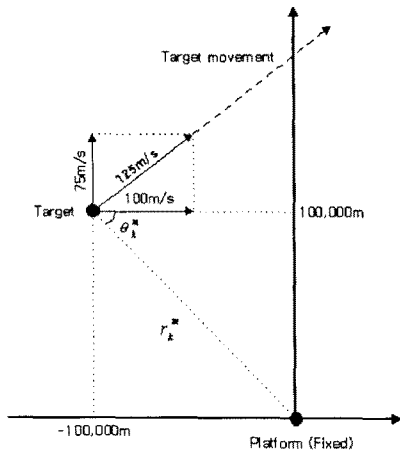


Fig. 1 표적 운동 및 측정 요소

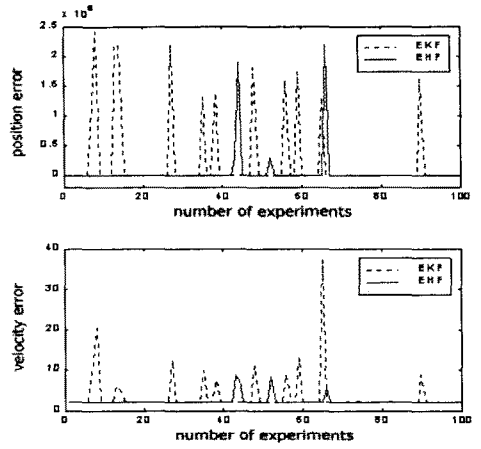


Fig. 4 x 방향의 위치 및 속력에 대한 MSE

Case 1. 파라미터 불확실성이 없는( $\alpha=0$ ) 경우

Case 2. 파라미터 불확실성이 있는( $|\alpha| \leq 10^{-3}$ ) 경우

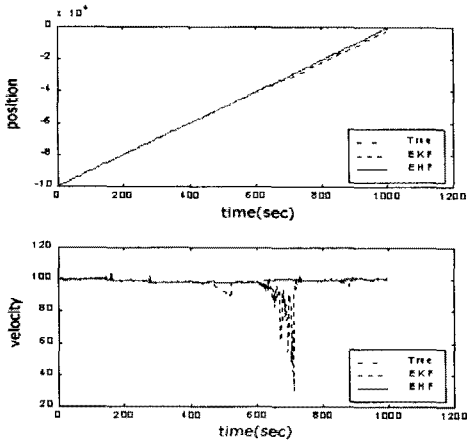


Fig. 2. x 방향의 위치 및 속도

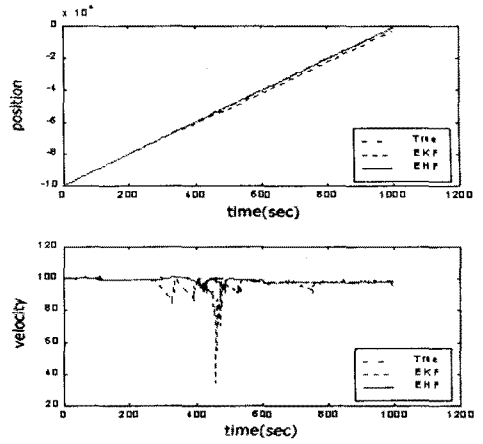


Fig. 5. x 방향의 위치 및 속도

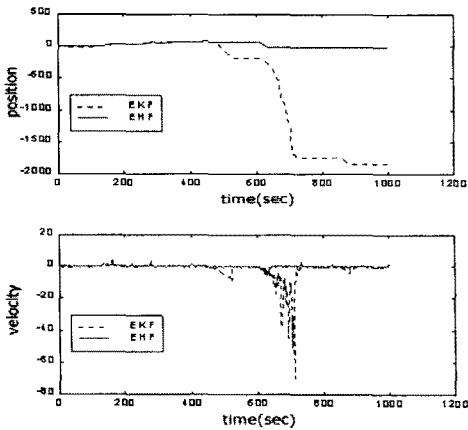


Fig. 3. x 방향의 위치 및 속도에 대한 추정 오차

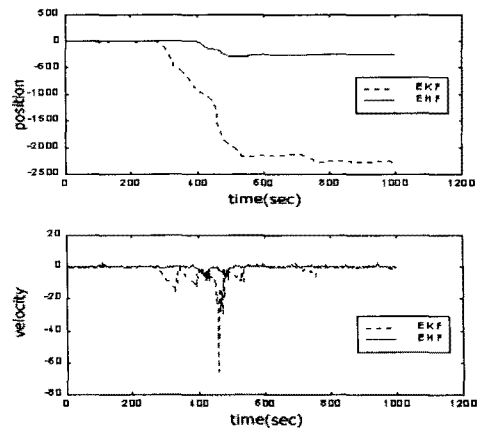


Fig. 6. x 방향의 위치 및 속도에 대한 추정 오차

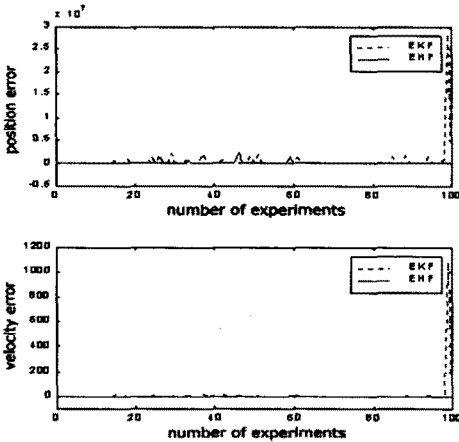


Fig. 7 x 방향의 위치 및 속력에 대한 MSE

Table 1. 확장 칼만 필터와 확장  $H^\infty$  필터의 비교

Filter	Mean of MSE (100 Monte Carlo Simulation)	
	Case 1	Case 2
Extended Kalman Filter	$2.0618 \times 10^5$	$4.9399 \times 10^5$
Extended $H^\infty$ Filter	$4.6633 \times 10^4$	$4.6348 \times 10^4$

Table 1에서와 같이 시스템에 파라미터 불확실성이 없는 경우(Case 1)에도 평균적으로 약 4.5배정도 성능이 개선되었으며 파라미터 불확실성이 존재하는 경우(Case 2)에는 약 10배정도 성능이 개선되어 확장 칼만 필터보다 강인한 성능을 나타내고 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 최근 개발된 확장  $H^\infty$  필터에 기반한 표적 추적 시스템을 제안하였다. 제안된 표적 추적 시스템은 확장  $H^\infty$  필터의 특성상, 확장 칼만 필터에 기반한 기존의 표적 추적 시스템에서 발생할 수 있는 문제점-물리적 시스템을 수학적으로 모델링할 때 필연적으로 개입되는 시스템의 파라미터 불확실성이 존재하는 경우 추정 오차가 커지는 단점[8]-을 보완할 수 있을 것으로 생각된다. 실제로 실험 결과로부터, 제안된 표적 추적 시스템이 파라미터 불확실성이 존재하는 경우뿐만 아니라 파라미터 불확실성이 존재하지 않는 경우에 대해서도 확장 칼만 필터를 기반으로 한 기존의 표적 추적 시스템에 비하여 좋은 추정 성능을 보임을 알 수 있다. 또한 표적 추적 시스템의 경우 시스템에 유입되는 외부 잡음에 대한 통계적 가정이 불분명한 경우가 많으므로, 제안된 표적 추적 시스템이 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

## [참 고 문 헌]

- [1] A.H. Jazwinski, "Stochastic Processes and Filtering Theory", Academic Press, 1970.
- [2] Anderson, B.D.O. and J.B. Moore, "Optimal Filtering", Prentice-Hall, Inc., 1979.
- [3] Shaked, U. and Y. Theodor, " $H^\infty$ -Optimal Estimation : A Tutorial", Proc. IEEE Conf. Decision Contr. pp. 2278-2286, 1992.
- [4] Park, S.T. Park, and J.G. Lee, "Design of Practical Tracking Algorithm with Radar Measurements", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol.34, No.4, pp.1337-1344, 1998.
- [5] Burl, J.B. " $H^\infty$  Estimation for Nonlinear Systems", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 5, pp.199-202, 1998.

[6] 나원상 의 "비선형 필터링 문제를 위한 확장  $H^\infty$  필터 설계", 연세대 산업기술연구소 논문집 제30집 2권(49), pp.117-126, 1998.

[7] Bar-Shalom, Y., and T.E Fortmann, "Tracking and Data Association", New York: Academic Press, 1988.

[8] George, M. S., Chen, G. and J. Wang, "Tracking an Incoming Ballistic Missile Using an Extended Interval Kalman Filter", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol.33, No.1, pp.232-240, January 1997.