

특이 섭동 이산시 쌍일차 계통에서의 페루프 최적 제어기 설계

강현구* · 김범수** · 최원호** · 권요한** · 임요택**
 * : 고려대학교 메카트로닉스학과 , ** : 고려대학교 전기공학과

Design of a closed-loop controller for discrete-time singularly perturbed bilinear systems

Hyun-Goo Kang* · Beom-Soo Kim** · Won-Ho Choi** · Yo-Han Kwon** · Myo-Taeg Lim**

* : Department of Mechatronics Eng., Korea Univ. ** : Department of Electrical Eng., Korea Univ.

Abstract - In between of linear and nonlinear systems lies a large class of bilinear systems. The major importance of bilinear systems lies in the applications to the real world systems such as many physical processes, many biological process, some economic process. Despite vast application of bilinear systems they have not been studied extensively in the domain of singularly perturbations except for a few minor results. In this paper we will utilize singular perturbations theory to obtain the closed-loop optimal solution for discrete-time bilinear systems.

A, B, N_j 는 상수 행렬이다. 그리고, 평가지수(performance index)는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \{x^T(n)Qx(n) + u^T(n)Ru(n)\} \quad (2)$$

여기에서, Q 는 양의 준정부호 대칭(positive semi-definite symmetric) $n \times n$ 행렬이고, R 은 양의 정부호 대칭(positive definite symmetric) $m \times m$ 행렬이다. 최적 제어 문제 (1)-(2)의 근사 해는 아래의 가정 1 하에서 연속시 계통에서의 결과[2]을 이산시 계통에 적용하여 얻을 수 있다.

1. 서 론

실세계의 많은 물리적, 생물적 계통들은 선형 및 비선형 계통사이에 존재하는 쌍일차계통으로 존재하며

쌍일차 연속시 계통은 $\dot{x} = (A + \sum_{k=1}^m N_k u_k)x + BU$ 와 같

이 표현된다. 이들 쌍일차 계통으로 표현되는 실세계 중에는 고차의 수학적인 모델링으로 표현이 가능한 대규모 계통들을 포함하기도 하며 실질적으로 많은 쌍일차 계통이 특이 섭동(singular perturbation) 구조를 갖는다. 그러나, 현재까지 쌍일차 계통의 특이 섭동의 관점에서의 연구는 많이 이루어지지 않은 상태이다. 쌍일차 계통에 대한 특이 섭동 이론의 적용은 쌍일차 계통의 제어기 설계문제를 저차의 부계통(subsystem)의 차원에서 가능하게 한다. 이는 연산속도의 향상을 가져올 수 있으며, 또한 병렬 연산 수행을 가능하게 하고, 작은 섭동 변수인 ϵ 의 존재로 인한 수학적인 연산의 어려움을 해결할 수 있는 장점을 갖게 한다. 본 논문에서는 연속시 계통에서의 연구 결과[1]를 확장하여 이산시 계통에서의 특이 섭동 쌍일차 계통의 정상 상태 최적 제어기를 설계하였다. 전체 계통의 최적 해는 이산시 쌍일차 계통에 대해 특이 섭동 이론의 적용을 통하여 저차의 부계통 해로써 근사적으로 구하였다. 얻어진 해는 고정점 반복(fixed point iteration) 방법을 적용해 해의 정확도를 순차적으로 개선을 할 수 있으며, 따라서 임의의 정확도를 갖는 최적 제어기 설계가 가능하였다.

2. 특이 섭동을 갖는 이산시 쌍일차 계통에서의 페루프 최적 제어기 설계

2.1 특이 섭동 이산시 쌍일차 계통의 페루프 최적 제어

2.1.1 이산시 쌍일차 계통의 최적 제어
 다음과 같은 이산시 쌍일차 계통의 최적 제어 문제를 고려해보자.

$$x(n+1) = Ax(n) + \{B + x(n)M\}u(n) \quad (1)$$

$$x(0) = x^0, \quad \{x(n)M\} = \sum_{j=1}^m x_j N_j$$

여기서, $x \in \mathbb{R}^n$ 는 상태 변수, $u \in \mathbb{R}^m$ 은 제어 변수,

가정 1 쌍 (A, B) 는 안정화 할 수 있고(stabilizable) $X_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A, B + xM)\}$ 으로 정의된 안정도 영역에 머물고, (A, \sqrt{Q}) 는 검출 가능(detectable) 하다.

$$x_0(n+1) = Ax_0(n) + Bu(n), \quad x_0(0) = x^0$$

$$x_i(n+1) = Ax_i(n) + B_i(n)u_i, \quad B_i(n) \triangleq B + x_{i-1}(n)M \quad (3)$$

여기에서, $i=1, 2, 3, \dots$ 는 반복 숫자이며 이산 대수 Riccati 방정식의 열은 다음과 같이 주어진다.

$$P_i(n) = Q + A^T P_i(n) A - A^T P_i(n) B_i(n) (R + B_i^T(n) P_i(n) B_i(n))^{-1} B_i^T(n) P_i(n) A \quad (4)$$

식 (4)의 최적 해는 다음의 근사 귀환 제어 입력의 열로 나타난다.

$$u_i(n) = -(R + B_i^T(n) P_i(n) B_i(n))^{-1} B_i^T(n) P_i(n) A x(n) \quad (5)$$

식 (5)에서 반복 숫자 i 를 늘리면 다음의 관계가 성립한다

$$u_i(n) \rightarrow u_{opt}(n) \quad x_i(n) \rightarrow x_{opt}(n) \quad (6)$$

따라서 이산시 쌍일차 계통의 최적 문제는 이산 시변 선형 계통의 열로부터 해를 얻을 수 있다.

2.1.2 특이 섭동 이산시 쌍일차 계통의 페루프 최적 제어

다음의 특이 섭동 이산시 쌍일차 계통을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \epsilon A_1 & \epsilon A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U(n)$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon M_1 & \epsilon M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \end{bmatrix} \right\}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서, 느린상태 변수 $x_1 \in \mathbb{R}^m$, 빠른 상태 변수 $x_2 \in \mathbb{R}^n$, 제어 입력 $u \in \mathbb{R}^m$, ϵ 는 작은 양의 변수이다. 앞 절의 결과를 적용하면, 식 (7)은 다음의 시변 선형 계통의 열로써 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x_{1i}(n+1) \\ x_{2i}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \epsilon A_1 & \epsilon A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i}(n) \\ x_{2i}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon B_{1i}(n) \\ B_{2i}(n) \end{bmatrix} u(n) \quad (8)$$

여기에서, $i=0, 1, 2, \dots$ 는 반복 숫자를 나타 내며, 평가 지수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [x_i(n)^T Q x_i(n) + u_i(n)^T R u_i(n)] \quad (9)$$

식 (9)에서,

$$x_i(n) = \begin{bmatrix} x_{1i}(n) \\ x_{2i}(n) \end{bmatrix}, \quad Q(n) = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad R > 0 \quad (10)$$

위의 최적 제어 문제에 제어 입력은 식 (5)와 같이 주어지며, 대응되는 이산 시변 Riccati 방정식은 식 (4)와 같이 주어진다. 식 (4)에서 행렬은 특히 섭동 구조를 가지므로 구하는 해 $P_i(n)$ 은 다음의 형태를 갖는다. [6]

$$P_i(n) = \begin{bmatrix} P_{1i}(n)/\varepsilon & P_{2i}(n) \\ P_{2i}(n)^T & P_{3i}(n) \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (4)의 이산 대수 Riccati 방정식의 경우, 식 (11)의 저차의 분할된 형태로의 확장은 수학적으로 상당히 복잡하므로, 여기서는 쌍일차 변환식 [5]을 이용하여, 이산시 Riccati 방정식을 다음의 연속시 Riccati 방정식의 문제로 바꾼다.

$$A_{\alpha}^T(n) P_{\alpha}(n) + P_{\alpha}(n) A_{\alpha}(n) + Q_{\alpha}(n) - P_{\alpha}(n) S_{\alpha}(n) P_{\alpha}(n) = 0 \quad (12)$$

식 (12)에서, $S_{\alpha}(n) = B_{\alpha}(n) R_{\alpha}(n)^{-1} B_{\alpha}^T(n)$ 이다. 만일 다음의 관계가 유효하면, 식 (12)와 (4)는 같은 해를 가지게 된다. [5]

$$\begin{aligned} A_{\alpha}(n) &= I - 2 D_i^{-T}(n) \\ S_{\alpha}(n) &= 2(I+A)^{-1} S_{di}(n) D_i^{-1}(n), \\ S_{di}(n) &= B_i(n) R^{-1} B_i^T(n) \\ Q_{\alpha}(n) &= 2 D_i^T(n) Q(I+A)^{-1} \\ D_i(n) &= (I+A)^T + Q(I+A)^{-1} S_{di}(n) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)-(13)에서 i 는 (4)에서 정의한 반복 횟수를 뜻한다. 식 (13)에서 $(I+A)^{-1}$ 이 존재한다고 가정한다.

$$I+A = \begin{bmatrix} 2I + \varepsilon A_1 & \varepsilon A_2 \\ A_3 & I + A_4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

(14)로부터 작은 값의 ε 에서 $I+A_4$ 가 역변환이 가능하면 (14)는 역변환이 가능하다. 즉 A_4 가 -1에서 고유값을 갖지 않으면, 역변환이 가능하다.

가정 2 빠른 부계통 행렬은 -1에서 고유값(eigenvalue)을 갖지 않는다.

가정 2의 조건이 성립하면, $D_i^T(n)$ 은 비특이 행렬이다. 쌍일차 변환식을 적용한 경우, 행렬은 특히 섭동구조를 가진다. [4] 식(13)으로부터 얻어진 행렬의 구조는 연속시 특히 섭동 LQ문제의 빠른 시간형(fast time version)이다. 특히 섭동계통의 빠른 시간형과 느린 시간형의 사용에는 차이가 없으므로 여기서는 일반적으로 많이 사용되는 느린 시간형을 사용한다.

식 (13)의 느린 시간형은 $A_{\alpha}(n)$ 에 $1/\varepsilon$ 을 곱하고, $S_{\alpha}(n)$ 에 $1/\varepsilon^2$ 을 곱하여 얻을 수 있다.

$$A_{\alpha}(n) = \begin{bmatrix} A_{1i}(n) & A_{2i}(n) \\ A_{3i}(n) & A_{4i}(n) \end{bmatrix}, \quad S_{\alpha}(n) = \begin{bmatrix} S_{1i}(n) & S_{2i}(n) \\ S_{2i}^T(n) & S_{3i}(n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

따라서 구하는 해는 (16)의 형태를 갖는다.

$$P_{\alpha}(n) = \begin{bmatrix} P_{1i}(n) & \varepsilon P_{2i}(n) \\ \varepsilon P_{2i}^T(n) & \varepsilon P_{3i}(n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

위의 행렬의 표현식은 각각 시불변계통에서의 결과를 시변 계통으로의 확장하여 나타낼 수 있다. [4]

식 (12)의 $O(\varepsilon)$ 근사화된 해는 다음의 저차의 대수 Riccati 방정식으로부터 얻을 수 있다.

$$P_{1i}(n) A_{1i}(n) + A_{1i}^T(n) P_{2i}(n) + P_{2i}(n) - P_{1i}(n) S_{1i}(n) P_{1i}(n) - P_{1i}(n) S_{2i}(n) P_{2i}(n) - P_{2i}(n) S_{3i}(n) P_{2i}(n) + Q_{1i}(n) = 0 \quad (17)$$

$$P_{1i}(n) A_{2i}(n) + P_{2i}(n) A_{4i}(n) + A_{2i}^T(n) P_{3i}(n) - P_{1i}(n) S_{2i}(n) P_{3i}(n) - P_{2i}(n) S_{3i}(n) P_{3i}(n) + Q_{2i}(n) = 0 \quad (18)$$

$$P_{3i}(n) A_{4i}(n) + A_{4i}^T(n) P_{3i}(n) - P_{3i}(n) S_{3i}(n) P_{3i}(n) + Q_{3i}(n) = 0 \quad (19)$$

식 (19)의 Riccati 방정식은 가정 3의 조건이 성립하면 유일한 양의 준정부호 안정화 해를 갖는다.

가정 3 $(A_{4i}(n), B_{2i}(n), \sqrt{Q_{3i}(n)})$ 은 안정화 가능하며, 검출 가능(stabilizable-detectable)하다.

식 (17)로부터,

$$P_{2i}(n) = -(P_{1i}(n) A_{2i}(n) + A_{2i}^T(n) P_{3i}(n) - P_{1i}(n) S_{2i}(n) P_{3i}(n) + Q_{2i}(n)) (A_{4i}(n) - S_{3i}(n) P_{3i}(n))^{-1} \quad (20)$$

식 (18)를 (17)에 대입 후 정리하면 다음의 저차의 Riccati 방정식을 얻을 수 있다.

$$P_{1i}(n) A(n) + A^T(n) P_{1i}(n) + Q(n) - P_{1i}(n) S(n) P_{1i}(n) - S(n) = B_0(n) R_0^{-1}(n) B_0^T(n) \quad (21)$$

식 (21)의 유일한 해는 다음과 같은 가정에서 구할 수 있다.

가정 4 $(A(n), B_0(n), \sqrt{Q(n)})$ 은 안정화 가능하며, 검출 가능하다. (stabilizable-detectable)

식 (17)-(21)로부터, 식 (12)의 $O(\varepsilon)$ 근접한 해를 구할 수 있으며, 다음의 고정점 반복 알고리즘으로부터 해의 정확도를 $O(\varepsilon^{(k+1)})$ 로 개선할 수 있다.

근사화 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{P}_i^{(k)} = P_i(n) + \varepsilon E_i^{(k)}(n) \quad (22)$$

여기서

$$P_i(n) = \begin{bmatrix} P_{1i}(n) & \varepsilon P_{2i}(n) \\ \varepsilon P_{2i}^T(n) & \varepsilon P_{3i}(n) \end{bmatrix}, \quad E_i(n) = \begin{bmatrix} E_{1i}(n) & \varepsilon E_{2i}(n) \\ \varepsilon E_{2i}^T(n) & \varepsilon E_{3i}(n) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$O(\varepsilon)$ 의 수렴속도를 갖는 저차의 알고리즘은 다음과 같다. 여기서, i 는 식 (3)에서 정의된 반복 횟수를 나타내며, $S_j = B_{1j} R^{-1} B_{1j}^T, S_{2j} = B_{2j} R^{-1} B_{2j}^T, j=1,2$ 이다.

$$\begin{aligned} E_{3i}^{(k+1)} D_{3i} + D_{3i}^T E_{3i}^{(k+1)} &= H_{3i}^{(k)} \\ E_{2i}^{(k+1)} D_{3i} + E_{1i}^{(k+1)} D_{21i} + D_{21i}^T E_{3i}^{(k+1)} &= -H_{1i}^{(k)} \\ E_{1i}^{(k+1)} D_{1i} + D_{1i}^T E_{1i}^{(k+1)} &= D_i^T H_{1i}^{(k)T} + H_{1i}^{(k)} D_i + D_i^T H_{3i}^{(k)} D_i + \varepsilon H_{2i}^{(k)} \\ E_{ji}^{(0)} &= 0, \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (24)$$

여기에서,

$$\begin{aligned} D_{1i} &= D_{11i} - D_{21i} D_{3i}^{-1} D_{21i}, \quad D_{11i} = A_{1i} - S_{1i} P_{1i} - S_{1i} P_{2i}^T \\ D_{21i} &= A_{2i} - S_{2i} P_{3i}, \quad D_{22i} = A_{3i} - S_{2i}^T P_{1i} - S_{3i} P_{2i} \\ D_{3i} &= A_{4i} - S_{3i} P_{3i}, \quad D_i = D_{3i}^{-1} D_{22i} \end{aligned} \quad (25)$$

그리고,

$$H_{1i}^{(k)} = A_{1i}^T P_{2i}^{(k)} - P_{1i}^{(k)} S_{1i} P_{2i}^{(k)} - P_{2i}^{(k)} S_{2i}^T P_{2i}^{(k)} - \varepsilon (E_{1i}^{(k)} S_{2i} E_{3i}^{(k)} + E_{2i}^{(k)} S_{3i} E_{3i}^{(k)}) \quad (26)$$

$$H_{2i}^{(k)} = E_{1i}^{(k)} S_{1i} E_{1i}^{(k)} + E_{1i}^{(k)} S_{1i} E_{2i}^{(k)T} + E_{2i}^{(k)} S_{1i}^T E_{1i}^{(k)} + E_{2i}^{(k)} S_{2i} E_{2i}^{(k)T} \quad (27)$$

$$H_{3i}^{(k)} = -P_{2i}^{(k)T} - A_{2i}^T P_{2i}^{(k)} + \varepsilon P_{2i}^{(k)T} S_{1i} P_{2i}^{(k)} + \varepsilon E_{3i}^{(k)} S_{2i} E_{3i}^{(k)} + P_{2i}^{(k)T} S_{3i} P_{2i}^{(k)} + P_{3i}^{(k)} S_{3i} P_{2i}^{(k)} \quad (28)$$

여기에서, D_{1i} 와 D_{3i} 는 안정한 행렬이며, 위의 알고리즘은 $O(\varepsilon)$ 의 속도로 수렴한다. 즉,

$$\|E_{ji}^{(k+1)} - E_{ji}^{(k)}\| = O(\varepsilon), \quad j=1,2,3 \quad (29)$$

그리고,

$$\overline{P}_{ii}^{(k)}(\varepsilon) = P_{ii}(\varepsilon) + \varepsilon E_{ii}^{(k)}(\varepsilon), j=1,2,3 \quad (30)$$

즉, 정확한 해, $\overline{P}_{ii}^{(k)}$ 에서 $O(\varepsilon^{(k+1)})$ 근접한 해를 구할 수 있다. 따라서, 두 개의 저차의 Lyapunov 방정식을 풀어서 $O(\varepsilon^{(k+1)})$ 의 정확도를 갖는 최적 해를 구할 수 있다.

2.2 시뮬레이션 결과

2.2.1 이산시 특이 섭동 쌍일차 계통의 최적 제어 기

앞에서 제시한 알고리즘을 다음의 실제 계통의 유도 전동기 모델에 적용하였다. [3] 계통의 상태 변수와 제어 입력은 아래와 같이 주어지며, $\varepsilon=0.01$ 로 하고, 샘플링 시간을 0.001로 하였다.

$$x = \begin{bmatrix} \phi_{ds} \\ \phi_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ \omega_s \end{bmatrix}$$

여기에서, ϕ_{ds} 와 ϕ_{qs} 는 고정자 자속의 사영, i_{ds} 와 i_{qs} 는 고정자 전류의 사영, v_{ds} 와 v_{qs} 는 공급 전압의 사영, ω_s 는 슬립 각주파수를 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 3.2157 & -0.0031 & 0 \\ -3.1257 & 1.0000 & 0 & -0.0031 \\ 0.9887 & 270.5900 & 0.5507 & 0.0257 \\ -270.5900 & 0.9887 & -0.0257 & 0.5507 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0100 & -0.0730 \\ 0.8730 & 0 & 0.8780 \\ 0 & 0.8730 & -0.5300 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \end{bmatrix}, N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = I_4, R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

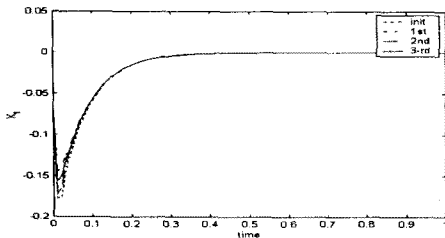


그림 1 ϕ_{ds} 의 궤적

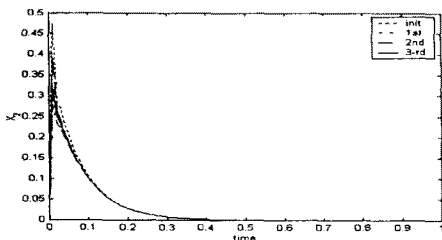


그림 2 ϕ_{qs} 의 궤적

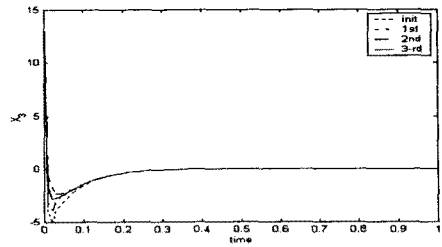


그림 3 i_{ds} 의 궤적

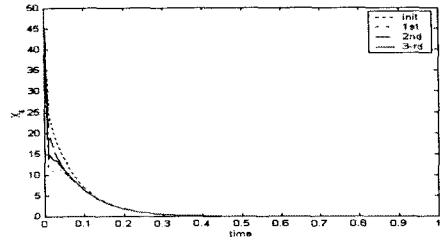


그림 4 i_{qs} 의 궤적

그림1-그림4는 식 (3)에 정의된 반복(i)을 3번 하였으며, 매 반복시 고정점 반복 알고리즘을 통해 해의 정확도를 $O(\varepsilon^2)$ 으로 개선하였다. 각각의 그림에서 반복 횟수 i 의 값에 따른 궤적을 도시하였으며, $i=3$ 일 때 최적 값으로 수렴하였다.

3. 결 론

본 논문에서는 쌍일차 계통의 페루프 최적 제어 문제를 다루었다. 제안된 알고리즘에서 저차의 연속 시변 Riccati 방정식을 풀어 전체 계통의 최적 해에 $O(\varepsilon)$ 근접한 해를 구하였다. 또한 이 해의 정확도는 고정점 반복 알고리즘을 통하여 $O(\varepsilon^{k+1})$ 로 증가시킬 수 있으며, 논문에 제시된 알고리즘을 유도 전동기의 쌍일차 모델에 적용하여 효율성을 입증하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] Z. Aganovic, "Singularly perturbed and weakly coupled bilinear control systems", Ph. D. Dissertation, Rutgers University, 1993
- [2] W. Cebuhar and V. Constanza, "Approximate procedures for the optimal control of bilinear and nonlinear systems, J. of Optimization Theory and Applications, 43, 615-627, 1984.
- [3] G. Figalli, M.Cava, and L. Tomachi, "An Optimal feedback control for a bilinear model of induction motor drives", Int. J. of Control, 39,1007-1016,1984
- [4] Z. Gajic and M. Lim, "The study of discrete singularly perturbed linear-quadratic control systems", Control and Dynamic Systems, 70, 1995
- [5] R. Kondo and K. Furuta, "On the bilinear transformation of Riccati equations", IEEE Trans. Automatic Control, AC-31, 50-54, 1986
- [6] B. Litkouhi and H. Khalil, "Infinite-time regulators for singularly perturbed difference equations", Int. J. Control, 39, 587-598, 1984