

선형 대칭 구성 시스템에 대한 분산 제어기 설계

이세인*, 이상철, 조도현, 이종용, 박종우, 이상호

*광운대학교 제어계측공학과(Tel: +82-2-940-5153; E-mail: si20@shinbiro.com)

On Design of the Decentralised Controller for a System with a Linear Symmetric Structure

Lee, Sein, Lee, Sang-Chuel, Cho, Do-Hyeoun, Lee, Jong-Yong, Park, Jong-Woo, Lee, Sang-Hyo
Dept. of Control and Instrumentation Eng., Kwangwoon University

Abstract - 본 논문에서는 선형 대규모 시스템 (large-scale systems)에 대하여 강건한 분산 제어기를 설계한다. 동일한 부시스템 (identical subsystems)들이 서로 대칭적으로 연결되어 있는 제어기 설계시 불확실성은 부시스템 행렬과 연결 시스템 행렬의 유계된 매개 변수 변동을 모두 고려한다. 본 논문의 설계 절차는 대칭 연결 구조를 불확실성으로 포함시킨 하나의 인공적인 보조 시스템 (artificial auxiliary systems)으로 변환함으로써 대규모 시스템에 대한 분산 제어기 설계의 복잡성을 줄일 수 있음을 보이고 수치 예를 통해 이를 확인한다.

여기서, y_{ji} 는 j번째 부시스템의 상호연결 출력이며, p_x 차원 벡터로서 식(3)과 같이 j번째 부시스템 상태와 관련된 다.

$$y_{ji} = C_x x_j \quad (3)$$

또한, 상호연결 행렬 L_{ij} 는 식(4)와 같은 구조를 갖는다.

$$L = L_d + \Delta L_d \quad L_{ij} = L_q + \Delta L_q \quad (i \neq j) \quad (4)$$

2.1.2 설계 복잡성을 감소시킨 강건한 분산 제어기 설계

본 논문의 중요 목적은 선형 대칭 구조를 갖는 대규모 시스템의 강건 안정성을 보장하고 설계의 복잡성을 줄일 수 있는 제어기를 설계하는 것이다. 이를 만족하기 위하여 식(5)에서 N개의 분산 피드백 제어기와 전 상태 관측기로 구성된 구조를 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_m \hat{x}_i + B u_i - G(C \hat{x}_i - y_i) \\ u_i &= K \hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

A_m, G 그리고 K 행렬을 설계하는 절차는 다음과 같이 두 가지 방법으로 구분된다. 먼저, 부시스템과 같은 차수를 갖는 인공적인 보조 불확실성 시스템을 정의한다. 두 번째로, 식(1)-(4)으로 표현된 원래 시스템이 점근적으로 안정하도록 관측기 기반 제어기를 설계한다. 이 절차에 따라, 인공적인 보조 불확실성 시스템을 식(6)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= (A_m + \Delta A_m)x_m + (B_m + \Delta B_m)u_m \\ y_m &= (C + \Delta C)x_m \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_m &= A + E L_d C_x + \left(\frac{N}{2} - 1\right) E L_q C_x \\ \Delta A_m &= \Delta A + E(\Delta L_d - \Delta L_q) \Delta C_x + N E \Delta L_q C_x + \Delta A_a \end{aligned} \quad (7)$$

또한, ΔA_a 는 식(8)과 같은 행렬이다.

$$\Delta A_a = \sum_{i=1}^k A_{ai} r_{ai}(t) \quad (8)$$

A_{ai} 는 식(9)와 같이 $(N/2)EL_q C_x$ 를 분해함으로써 얻어지는 계수(rank)가 - 1인 행렬이다.

$$\frac{N}{2} E L_q C_x = \sum_{i=1}^k A_{ai} \quad (9)$$

그리고, $r_{ai}(t)$ 는 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $|r_{ai}(t)| \leq 1$ 을 만족하는 불확실한 르베그-가측인(Lebesgue-measurable) 함수이다.

행렬 ΔA_m 은 식(10)과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$\Delta A_m = \sum_{i=1}^k A_{mi} r_{mi}(t) \quad (10)$$

모든 $t \geq 0$ 에 대해서, 식(10)에서 유계된 A_{mi} 는 적절한 행렬이고 r_{mi} 는 르베그-가측인 불확실한 함수이다.

$$|r_{mi}(t)| \leq \bar{r}_m, \quad \bar{r}_m \geq 0, \quad i = 1, \dots, k_m \quad (11)$$

식(12)와 같이 $A_{mj}, B_j,$ 와 C_j 행렬은 rank가 1인 행렬이라고 가정하자.

1. 서 론

최근에 대칭 구성 시스템의 구성적 특징 및 제어 문제에 대한 연구가 이루어 지고 있다. 대칭적 구성 시스템 (symmetric composite systems)은 동일한 부시스템들로 구성되어 있으며, 그 부시스템들의 상호연결(inter-connection)이 동일한 대각 블록 요소와 일반적으로 대각 블록 요소와는 또 다른 동일한 비대각 블록 요소를 갖는 상수 행렬로 표현되는 시스템이다.

일반적인 상호결합 시스템에 비해 대칭 특성을 갖는 상호 결합은 제어 시스템의 분석과 디자인의 단순화에 새로운 가능성을 제공했다[1,2]. 대칭적 합성 시스템의 동작은 하나의 분리된 하위 시스템 차수의 2배의 차수 모델에 의해 완벽히 모델화 되어진다. 그 결과 얻어지는 분산 제어 디자인 문제는 하나의 제어기 설계문제로 고려되어왔고 동시에 2개의 저차 시스템을 안정화 시키는 문제로 생각 되어왔다. 기존의 논문과는 달리, 본 논문에서는 불확실성이 포함된 대칭 구성 시스템에 대하여 시스템의 대칭적 특성을 사용하여 하나의 하위 시스템 차수와 같은 보조 시스템을 제어 대상으로 다룬다. 이때, 이러한 제어 대상에 대하여 Peterson[3]에 의한 리카티 방정식 접근법을 이용하여 제어기를 설계한다. 따라서, 본 논문의 설계 절차는 많은 수의 부시스템으로 구성된 시스템의 차수를 현저히 축소 시킴으로써 설계의 복잡성을 줄일 수 있다.

2. 본 론

2.1 분산 제어기 설계

2.1.1 분산제어 구조

N개의 부시스템으로 구성된 불확실한 선형 대칭적 구성 시스템에서 i번째 부 시스템은 식(1)과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= [A + \Delta A]x_i + [B + \Delta B]u_i + E s_{zi} \quad x_i(0) = x_0 \quad (1) \\ y_i &= (C + \Delta C)x_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

x_i, u_i, s_{zi}, y_i 는 각각 부시스템의 상태, 제어 입력, 상호 연결 입력이고 측정된 출력의 n, m, p_x, p 차원 벡터이다. 상호연결은 식(2)와 같다.

$$s_{zi} = \sum_{j=1}^N L_{ij} y_{zj} \quad (2)$$

$A_{mi} = d_i d_i^T, B_i = f_i g_i^T, C_i = h_i w_i^T$ (12)
 여기서 d_i, e_i, f_i, g_i 와 w_i 는 적절한 차원의 벡터이다.

$$T = \bar{r}_m \sum_{i=1}^k d_i d_i^T \quad U = \bar{r}_m \sum_{i=1}^k e_i e_i^T \quad T = \bar{s} \sum_{i=1}^k g_i g_i^T$$

$$W = \bar{s} \sum_{i=1}^k f_i f_i^T \quad X = \bar{v} \sum_{i=1}^k h_i h_i^T \quad Y = \bar{v} \sum_{i=1}^k w_i w_i^T \quad (13)$$

이득 행렬 K와 G는 식(14)과 식(15)로 표현되는 두 개의 대수 리카티 방정식에 대한 해인 양의 정부호 대칭 행렬 P_c, P_o 에 의해 결정된다. 이때, P_c 와 P_o 는 식(16)의 행렬 부등식을 만족해야 한다.

$$A_m^T P_c + P_c A_m - P_c \left[\frac{1}{\epsilon} \{ B R_1^T - 2 R_1^T V R_1^T \} B^T - 2 W \right] P_c - T P_c + 2 U + \frac{1}{\epsilon_1} Y + \epsilon_1 Q_1 = 0 \quad (14)$$

$$A_m^T P_o + P_o A_m - \left[\frac{1}{\epsilon_1} \{ C^T (R_2^{-1} - R_2^2 X R_2^{-1}) C \} \right. \\ \left. - \frac{2}{\epsilon_1} P_c B R_1^{-1} B^T P_c \right] + P_o (T + \frac{2}{\epsilon_1} W + \epsilon_2 Q_2) P_o = 0 \quad (15)$$

$$\epsilon_2 (P_o Q_2 P_o + \frac{1}{\epsilon_1^2} C^T R_2^2 C) - \frac{1}{\epsilon_1^2} P_c B R_1^{-1} B^T P_c \\ \times (Q_1 + \frac{1}{\epsilon_1^2} P_c B R_1^{-1} B^T P_c)^{-1} P_c B_o R_1^{-1} B_o^T P_c > 0 \quad (16)$$

여기서 ϵ_1 과 ϵ_2 는 양의 상수로 주어지고 Q_1, Q_2, R_1 과 R_2 는 적절한 차원의 대칭적 양의 정부호 행렬로 주어진다. 이득 행렬 K와 G는 식(17)과 같이 결정되어 진다.

$$K = -\frac{1}{\epsilon_1} R_1^{-1} B^T P_c, \quad G = \frac{1}{\epsilon_1} R_0^{-1} C^T P_2^{-1} \quad (17)$$

2.2 적용 예제

식 (1)~(4)에 의하여 기술된 N=9를 가지는 불확실한 대칭 구성 시스템을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3.15 \\ -3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad (18)$$

$$E = I \quad C_x = I \quad L_q = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad L_d = 0$$

불확실성 행렬은 $k=1, l=0, k_d=0$ 및 $k_o=I$ 에 대해 식(19)와 같다.

$$\Delta A = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta L_q = \begin{bmatrix} 0(t) & r_{q1}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B = 0 \quad \Delta L_o = 0 \quad \Delta C = 0$$

$$|r_1(t)| \leq \bar{r} = 0.5, \quad |r_{q1}(t)| \leq \bar{r} = 0.00625 \quad (19)$$

본 논문의 목적은 2.1.2절에서 유도된 방법을 이용하여 시스템을 안정화 시키는 것이다. ΔL_q 에서 $|r_{q1}(t)|$ 의 최소 유계는 식(7)로부터 하위 시스템의 수(Number)에 영향을 받는다.

유도된 방법을 적용하기 위해, 첫째 식(6)~(10)에 의해 정의된 보조 시스템을 구성하는 것이다. 식(15)를 식(7)에 대입 하므로써 식(20)을 얻는다.

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 3.5 \\ -3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

식(16)을 식(7)에 대입 하므로써 식(21)을 얻는다.

$$\Delta A_m = \begin{bmatrix} r_1(t) & 8r_{q1}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \Delta A_a \quad (21)$$

물론,

$$\frac{N}{2} E L_q C_x = \begin{bmatrix} 0(t) & 0.45 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

그러므로, $k_o=1$ 로 고려될 수 있고 불확실한 행렬은 식(23) 같다.

$$\Delta A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0.045 r_{q1}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 $r_{q1}(t)$ 는 모든 $t \geq 0$ 에 대해 $|r_{q1}(t)| \leq 1$ 을 만족하는 함수이다.

식(10)에서 $k_m=2$ 로 고려하면 A_{m1} 과 A_{m2} 는 식(24)과 같다.

$$A_{m1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{m2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

따라서 식(10)은 식(25)로 표현된다.

$$\Delta A_m = A_{m1} r_{m1}(t) + A_{m2} r_{m2}(t) \quad (25)$$

여기서, $r_{m1}(t) = r_1(t)$ 와 $r_{m2}(t) = 8r_{q1}(t) + 0.45a_1(t)$.

이때, $|r_{m1}(t)| = |r_1(t)| \leq \bar{r} = 0.5$ 와 $|r_{m2}(t)| \leq 8|r_{q1}(t)| + 0.45|r_{q1}(t)| \leq 0.05 + 0.45 = 0.5$ 를 만족한다.

따라서, 이러한 경우에 식(12)에서 유계 \bar{r}_m 은 0.5이다.

$A_{m1} = d_{m1} e_{m1}^T, A_{m2} = d_{m2} e_{m2}^T$ 고려하면 식 (26)과 같다.

$$d_{m1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_{m2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ e_{m1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_{m2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

그때,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$V = 0 \quad W = 0 \quad X = 0 \quad Y = 0$$

하중 행렬은 $Q_1 = I, R_1 = 1, Q_2 = I, R_2 = 1, \epsilon_1 = 0.25$.

$\epsilon_2 = 0.1$ 로 선택했다.

대응되는 리카티 방정식(식(14)과(15))의 양-한정 해는

$$P_c = \begin{bmatrix} 1.7425 & -0.6463 \\ -0.6463 & 2.3385 \end{bmatrix} \quad P_o = \begin{bmatrix} 0.5434 & -0.1659 \\ -0.1659 & 0.7319 \end{bmatrix}$$

이다.

행렬 부등식(식(16))의 결과로서 불확실성 시스템은 본 논문의 설계절차를 사용하여 안정화 시킬 수 있다. 식(19)에 의해 주어진 이득 행렬은 식 (28)과 같다.

$$K = [-6.9700 \quad 2.5851] \quad G = \begin{bmatrix} 19.7713 \\ 4.4810 \end{bmatrix} \quad (28)$$

다음으로 제어기 구성의 시뮬레이션은 $r_1(t) = 0.5 \sin(t)$ 와 $r_{q1}(t) = 0.00625 \sin(t)$ 인 정현파 형태로 주어지는 불확실성을 가지고 실행 되었다. $r_{q1}(t) = 0.00625 \sin(t)$ 로 정의한 이러한 불확실성은 보조시스템에 대해 $r_{m1}(t) = r_{m2}(t) = 0.5 \sin(t)$ 를 제공한다. 그림. 1과 2는 상태와 초기조건

$[x_{m1}(0), x_{m2}(0), \hat{x}_{m1}(0), \hat{x}_{m2}(0)] = [2, -2, 0, 0]$ 에 대한 보조 시스템의 에러상태와 관측기 상태들의 궤적을 보여준다. 그림. 3~8은 원래의 페루프 시스템의 부분 시스템에 대한 응답을 보여주는데, 첫 부분시스템은 $[x_1(0), \hat{x}_1(0)] = [2, -2, 0, 0]$ 인 초기조건을 갖고, 나머지 부분시스템은 0의 초기조건을 갖는다.

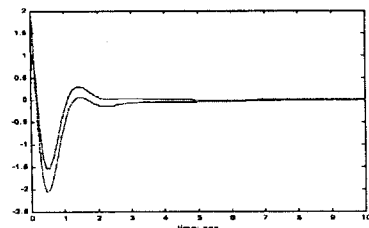


그림 1 보조 시스템 응답 : 구성요소 1
 Fig. 1 Auxiliary system responses : component 1
 --- states
 - - - - - estimated states

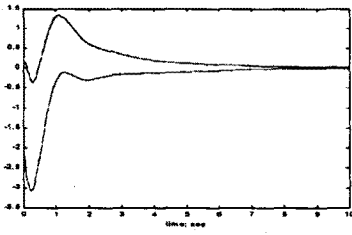


그림 2 보조 시스템 응답 : 구성요소 2
Fig. 2 Auxiliary system responses : component 2 states

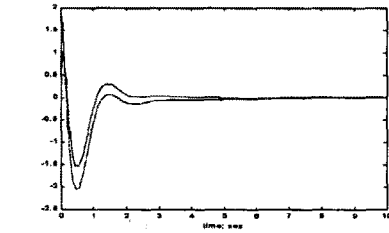


그림 3 원래 시스템 응답 : 부 시스템 1, 구성요소 1
Fig. 3 Original system responses : subsystem 1, component 1 states

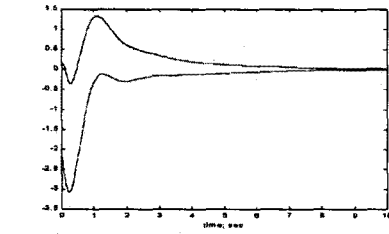


그림 4 원래 시스템 응답 : 부 시스템 2, 구성요소 2
Fig. 4 Auxiliary system responses : subsystem 2, component 2 states

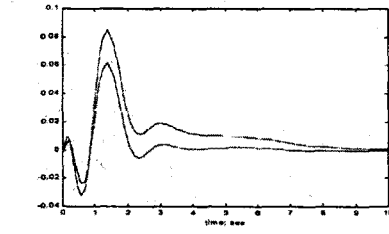


그림 5 원래 시스템의 응답 : 부 시스템 2, 구성요소 1
Fig. 5 Original system responses : subsystem 2, component 1 states

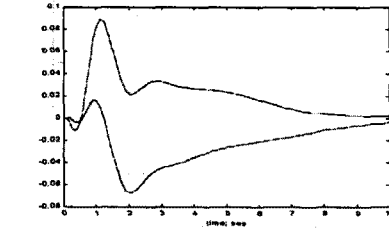


그림 6 원래 시스템의 응답 : 부 시스템 2, 구성요소 2
Fig. 6 Original system responses : subsystem 2, component 2 states

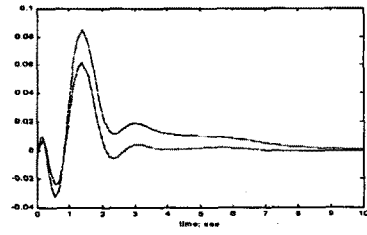


그림 7 원래 시스템의 응답 : 부 시스템 3, 구성요소 1
Fig. 7 Original system responses : subsystem 3, component 1 states

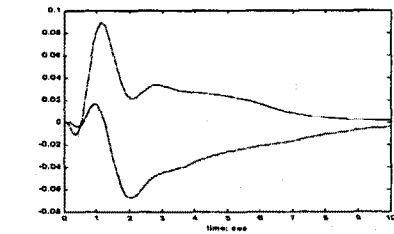


그림 8 원래 시스템의 응답 : 부 시스템 3, 구성요소 2
Fig. 8 Original system responses : subsystem 3, component 2 states

3. 결 론

이 기술의 확장은 유도된 변수 불확실성을 가지는 불확실한 공칭 선형 대칭 구성 시스템을 위한 복잡성-축소 (complexity-reduced) 분산 제어 디자인으로 Perterson [3] 에 의해 발전되었다. 그 디자인은 하위 시스템의 차원과 동일한 차원의 보조 인공 불확실성 시스템으로 사용되어 실현되었다. 이 방법으로, 시스템의 대칭적 성질은 분산 제어의 제어 디자인 복잡성을 줄이는데 유용하게 사용되었다.

(참 고 문 헌)

- [1]. SUNDARESHAN, M.K., and ELBANNA, R. M.: "Qualitative analysis and decentralized controller synthesis for a class of large-scale systems with symmetrically interconnected subsystems". *Automatica*, 27, (2), pp. 383-388, 1991
- [2]. YANG, G. H., and ZHANG, S. Y.: "Structural properties of large-scale systems possessing similar structures". *Automatica*, 31, (7), pp. 1011-1017 1995.
- [3]. PETERSEN, I. R.: "A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems". *IEEE Trans, AC-30*, (9), pp. 904-907. 1985.
- [4]. TRINH, H., and ALDEEN, M.: "Decentralised feedback controllers for uncertain interconnected systems". *IEE Proc. D.*, 140, (6), pp 429-434, 1993
- [5]. XIAOPING, L.: "Output regulation of strongly coupled symmetric composite systems". *Automatica*, 28,(5), pp. 1037-1041, 1992.
- [6]. YANG, G. H., and ZHANG, S. Y.: "Stabilizing controllers for uncertain symmetric composite systems". *Automatica*, 31, (2), pp. 337-340, 1995