

디지털 재설계를 이용한 퍼지제어기

이호재\* 주영훈\*\* 박진배\*

\*연세대 전기·컴퓨터공학과, \*\*군산대 제어계측공학과

Fuzzy Controller by Using Digital Redesign

\*Ho Jae Lee, \*\*Young Hoon Joo, \*Jin Bae Park

\*Dept. of Electrical & Computer Eng., Yonsei Univ.

\*\*Dept. of Control & Instrumentation Eng., Kunsan Univ.

**Abstract**-In this paper, we develop intelligent digitally redesigned PAM and PWM fuzzy controllers for nonlinear systems. Takagi-Sugeno fuzzy model is used to model the nonlinear systems and a continuous-time fuzzy-model-based controller is designed based on the extended parallel-distributed-compensation method. The digital controllers are determined from existing analogue controllers. The proposed method provides an accurate and effective method for digital control of continuous-time nonlinear systems and enables us to efficiently implement a digital controller via pre-determined continuous-time TS fuzzy-model-based controller. We have applied the proposed method to the balancing problem of the inverted pendulum to show the effectiveness and feasibility of the method.

1. 서론

퍼지 논리 제어는 시스템을 수학적으로 모델링하기 어렵거나 심한 비선형성을 나타내는 경우, 또는 외부의 환경이 복잡하게 변하는 경우에 매우 우수하면서도 강인한 성능을 보장한다. 전문가의 지식을 기반하여 언어적인 표현인 IF-THEN 규칙의 구조로 설계되는 퍼지 논리는 시행 착오적인 방법으로 설계할 수 밖에 없다. 따라서 최근의 퍼지 제어의 연구 동향은 유전 진화 알고리즘등의 소프트 컴퓨팅 기법을 사용하여 체계적인 설계 기법을 연구하는 추세이다 [1]. 한편, 선형 시스템 분야에서 개발된 이론을 TS 퍼지 모델에 적용하여 비선형 시스템의 제어 이론을 개발하려는 시도가 널리 행해지고 있다 [2, 10].

산업계에서 실제로 가동되는 시스템이나 공정은 연속적인 시간상에서 운용되므로 연속 시간으로 표현되는 제어기를 사용하여 시스템을 제어하는 것이 당연하다. 현대의 컴퓨터 산업 분야의 급속한 발전으로 매우 저렴한 비용으로 강력한 성능의 디지털 제어기의 설계가 가능해졌다. 따라서 고급 제어 이론을 디지털 제어기로 구현하여 시스템에 적용한다면, 성능을 향상시킬 수 있다. 디지털 재설계 기법이라 불리는 방법은 아날로그 제어기를 설계한 후, 이를 변환하여 디지털 제어기를 설계하는 기법이다 [4-6].

Pulse-width-modulation(PWM)제어기는 일반적인 디지털 제어기로서, 고정된 폭과 가변적인 크기로 나타나는 신호를 발생시킨다[4]. 본 논문에서는 비선형 시스템의 제어를 위해 디지털적으로 재설계된 지능형 PAM 제어기를 제안한다. 이를 위하여 TS 퍼지 모델을 사용한다. 또한, 제안된 기법의 우수성을 입증하기 위하여 혼돈 시스템 제어의 컴퓨터 도의 실험을 보인다.

2. 퍼지 모델 기반 제어기

다음과 같은 비선형 동적 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}^{(n)}(t) = f(x) + g(x)u(t) \tag{1}$$

$x^{(n)}$  은 시스템의 출력이고,  $u$  는 제어 입력이며

$x = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T$  는 상태 변수 벡터이다. (1)의 형태로 나타나는 비선형 시스템은 퍼지 추론 시스템과 몇 개의 부분 선형 시스템의

결합으로 근사화가 가능하다[2-3]. 퍼지 추론 시스템의  $i$  번째 규칙은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

Plant Rule  $i$ :

$$\begin{aligned} \text{IF } x(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)}(t) \text{ is } F_n^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \tag{2}$$

$F_j^i (j = 1, \dots, n)$ ,  $x(t) \in R^{n \times 1}$ ,  $u(t) \in R^{1 \times 1}$  는 각각 퍼지 집합, 상태 변수 벡터, 제어 입력을 나타낸다. 무게 중심 비퍼지화, product 추론, 싱글톤 퍼지화에 의하여 퍼지 시스템의 최종 출력은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \frac{q}{i=1} \sum \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{3}$$

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n F_j^i(x^{(j-1)}(t))$$

$$\mu_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^q w_i(x(t))}$$

비선형 시스템 (1)의 제어를 위한 퍼지 시스템 (2)의 제어기를 설계하기 위하여 extended parallel distributed compensation(EPDC) 기법을 사용한다 [10]. (2)와 같은 전건부를 사용하면, EPDC 퍼지 제어기는 다음과 같은 구조를 갖는다.

Controller Rule  $i$ :

$$\begin{aligned} \text{IF } x(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)}(t) \text{ is } F_n^i \\ \text{THEN } u(t) = -K_i x(t) + E_i(t)r(t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $K_i = [k_1^i, \dots, k_n^i]$ ,  $E_i = [e_1^i \ \dots \ e_n^i]$  은 각각  $i$  번째 부분 선형 시스템의 피드백, 피드포워드 게인 벡터이다. 전체적인 퍼지 제어기는 다음과 같이 표현된다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^q w_i(x(t))(-K_i x(t) + E_i r(t))}{\sum_{i=1}^q w_i(x(t))} \tag{5}$$

$$= -\sum_{i=1}^q \mu_i(x(t))K_i x(t) + \sum_{i=1}^q \mu_i(x(t))E_i r(t)$$

(2)와 (5)를 결합한 전체 페루프 시스템은 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i(x) \mu_j(x) ((A_i - B_i K_j)x(t) + B_j E_j r(t)) \tag{6}$$

3. 디지털 재설계를 이용한 제어기 설계

디지털 제어기는 디지털 재설계 기법을 이용하여 연속 시간상에서 미리 설계되는 최적 제어 법칙으로부터 구해진다. 기존 디지털 재설계

기법은 샘플링 순간  $t = kT_s$  에서 아날로그 페루프 시스템의 상태  $\mathbf{x}_c(t)$  와 디지털 페루프 시스템의 상태  $\mathbf{x}_d(t)$  를 정합한다.  $T_s$  는 느린 샘플링 시간을 나타낸다. 이 방법은 단지 샘플링 순간만을 고려하기 때문에 샘플링 시간이 충분히 작지 않다면 시스템을 효과적으로 제어할 수 없다. 또한 샘플링 시간을 작게 한다면 제어 입력을 계산할 수 있는 시간이 충분하지 못하다. 따라서 빠른 샘플링 순간에서의 응답을 고려하면서 동시에 느린 샘플링 시간을 주기로 제어신호를 발생시키는 제어기를 설계할 필요가 있다. 본 논문에서는 이를 위하여 이중 샘플링 시간을 갖는 디지털 재설계 기법을 제안한다 [5].

$i$  번째 부분 선형 시스템을 나타내는 점자  $i$  는 편의상 생략한다. 다음과 같은 가제어성과 가관측성을 갖는 연속 시간 시스템을 고려하자.

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}u_c(t), \quad \mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}_{c0} \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_c(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}u_c(t) \quad (8)$$

$\mathbf{x}_c(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $u_c(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  이다.

가역함수를 다음과 같이 정의하면

$$J = \int_0^\infty \{[\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{Q}[\mathbf{x}_c(t) - \mathbf{r}(t)] + u_c(t)R u_c(t)\} dt \quad (9)$$

최적 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u_c(t) = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{E}_c \mathbf{r}(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_c = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)^{-T} \mathbf{Q} \quad (12)$$

$\mathbf{Q} \geq 0, R > 0$  이고,  $\mathbf{r}(t)$  은 기준 입력이다.  $\mathbf{P}$  는 (13)의 해이다.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (13)$$

아날로그 제어 법칙  $u_c(t)$  은 시간  $k_f T_f \leq t < (k_f + 1) T_f$  에서  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(k_f T_f)$  라는 가정하에 다음과 같이 근사화 시킬 수 있다.

$$u_c(t) \equiv W_{k_f} \Phi_{k_f}(t) = u_{dk_f}(k_f T_f) \quad (14)$$

$$W_{k_f} = \frac{1}{T_f} \int_{k_f T_f}^{(k_f+1)T_f} u_c(t) dt$$

$$= -\frac{\mathbf{K}_c}{T_f} \int_{k_f T_f}^{(k_f+1)T_f} \mathbf{x}_c(t) dt + \mathbf{E}_c \mathbf{r}(k_f T_f) \quad (15)$$

$\Phi_{k_f}(t)$  는 크기가 1 인 직교하는 시계열이고,  $T_f$  는  $T_s$  보다 작은 빠른 샘플링 시간이다. (7)의 아날로그 페루프 시스템은 (16)과 같이 나타내고, 이것의 이산시간 시스템은 (17)과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_{C.L} \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}\mathbf{E}_c \mathbf{r}(k_f T_f) \quad (16)$$

$$\mathbf{x}_c(k_f T_f + T_f) = \mathbf{G}_{C.C.L} \mathbf{x}_c(k_f T_f) + \mathbf{H}_{C.C.L} \mathbf{E}_c \mathbf{r}(k_f T_f) \quad (17)$$

$\mathbf{A}_{C.L} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c$ ,  $\mathbf{G}_{C.C.L} = e^{\mathbf{A}_{C.L} T_f}$ ,  $\mathbf{H}_{C.C.L} = [\mathbf{G}_{C.N} - \mathbf{I}_n] \mathbf{A}_{C.L}^{-1} \mathbf{B}$  (14)를 입력으로 하는 디지털 시스템은

$$\mathbf{x}_d(k_f T_f + T_f) = \mathbf{G}_f \mathbf{x}_d(k_f T_f) + \mathbf{H}_f u_{df}(k_f T_f) \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_f = e^{\mathbf{A} T_f}, \quad \mathbf{H}_f = [\mathbf{G}_N - \mathbf{I}_n] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \text{ 이다.}$$

디지털 재설계된 제어 입력을 다음과 같이 가정하자.

$$u_{df}(k_f T_f) = -\mathbf{K}_{df} \mathbf{x}_d(k_f T_f) + \mathbf{E}_{df} \mathbf{r}(k_f T_f) \quad (19)$$

페루프 시스템은 (20)과 같다.

$$\mathbf{x}_d(k_f T_f + T_f) = \mathbf{G}_f \mathbf{C.L} \mathbf{x}_d(k_f T_f) + \mathbf{H}_f \mathbf{C.L} \mathbf{r}(k_f T_f) \quad (20)$$

$$\mathbf{G}_f \mathbf{C.L} = \mathbf{G}_f - \mathbf{H}_f \mathbf{K}_{df}, \quad \mathbf{H}_f \mathbf{C.L} = \mathbf{H}_f \mathbf{E}_{df}$$

(20)과 연속시간 시스템의 상태를 정합하면 다음과 같은 제어 이득 벡터의 변환식을 얻는다.

$$\mathbf{K}_{df} = \mathbf{K}_c (\mathbf{A}_{C.L} T_f)^{-1} (\mathbf{G}_{C.N} - \mathbf{I}) \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_{df} = [\mathbf{I} + (\mathbf{K}_c - \mathbf{K}_{df}) \mathbf{A}_{C.L}^{-1} \mathbf{B}] \mathbf{E}_c$$

샘플링 시간 사이의 시스템 응답을 고려하면서 동시에 제어 입력 계산 시간을 확보하기 위하여, 이중 샘플링 시간 기법을 사용한다. 즉 빠른 샘플링 순간  $T_f$  에서 시스템의 상태를 정합하면서 제어 법칙은 느린 샘플링 시간에 입력되는 제어 법칙  $\bar{\mathbf{u}}_{ds}$  을 찾는다. 이중 샘플링 기법을 적용한 시스템은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_d(k_s T_s + T_s) = \mathbf{G}_s \mathbf{x}_d(k_s T_s) + \bar{\mathbf{H}}_s \bar{\mathbf{u}}_{ds}(k_s T_s) \quad (22)$$

$$= \mathbf{G}_s \mathbf{x}_d(k_s T_s) + \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{H}}_{s,i} u_{ds,i}(k_s T_s + (i-1)T_f) \quad (22)$$

$$\mathbf{G}_s = (\mathbf{G}_f)^N \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_s = [\bar{\mathbf{H}}_{s1} \quad \bar{\mathbf{H}}_{s2} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{H}}_{s,N-1} \quad \bar{\mathbf{H}}_{s,N}]$$

$$= [\mathbf{G}_f^{N-1} \mathbf{H}_f \quad \mathbf{G}_f^{N-2} \mathbf{H}_f \quad \dots \quad \mathbf{G}_f \mathbf{H}_f \quad \mathbf{H}_f] \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{ds}(k_s T_s) = -\bar{\mathbf{K}}_{ds} \mathbf{x}_d(k_s T_s) + \bar{\mathbf{E}}_{ds} \mathbf{r}(k_s T_s) \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{ds} = [\bar{\mathbf{K}}_{ds1}^T \quad \bar{\mathbf{K}}_{ds2}^T \quad \dots \quad \bar{\mathbf{K}}_{ds,N}^T]^T$$

$$= [\mathbf{K}_{df}^T \quad (\mathbf{K}_{df} \mathbf{G}_f \mathbf{C.L})^T \quad \dots \quad (\mathbf{K}_{df} \mathbf{G}_f^{N-1} \mathbf{C.L})^T]^T \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{ds}^{(N)} = [\bar{\mathbf{E}}_{ds1}^T \quad \bar{\mathbf{E}}_{ds2}^T \quad \dots \quad \bar{\mathbf{E}}_{ds,N}^T]^T$$

$$= [\mathbf{E}_{df}^T \quad (\mathbf{E}_{df} - \mathbf{K}_{df} \mathbf{H}_{df} \mathbf{C.L})^T \quad \dots \quad (\mathbf{E}_{df} - \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{K}_{df} \mathbf{G}_f^{N-1-j} \mathbf{H}_f \mathbf{C.L})^T]^T \quad (27)$$

#### 4. 컴퓨터 시뮬레이션

다음과 같은 Duffing 혼돈 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -0.1x_2 - x_1^3 + 12 \cos(t) + u(t) \quad (28)$$

(28)은 제어 입력이 없는 경우 혼돈 현상을 보인다. (28)의 TS 퍼지 모델은 몇 개의 동작점에서 선형 시스템을 구함으로써 다음과 같이 구성할 수 있다. 그림 3 은 소속함수를 나타낸다.

Plant Rule:

Rule 1: IF  $x_1$  is about 0, THEN  $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$

Rule 2: IF  $x_1$  is about  $\pm 1.5$ , THEN  $\dot{x} = A_2 x + B_2 u$

Rule 3: IF  $x_1$  is about  $\pm 3$ , THEN  $\dot{x} = A_3 x + B_3 u$

Rule 4: IF  $x_1$  is about  $\pm 4$ , THEN  $\dot{x} = A_4 x + B_4 u$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.75 & -0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -27 & -0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -48 & -0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

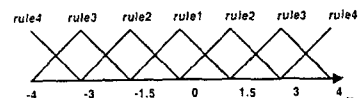


Fig. 3 Membership Functions

느린 샘플링 시간,  $T_s$  은 0.04 초이고 빠른 샘플링 시간,  $T_f$  는 0.01 초이다. 따라서  $N = T_s/T_f$  은 4이다. 초기 조건은  $\mathbf{x} = [2 \ 2]^T$  이다. 전체적인 퍼지 시스템의 안정도를 판별하기 위해 양한정 대칭 행렬  $\mathbf{P}_c$  를 다음과 같이 구하였다.

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 1.9441 & 0.0050 \\ 0.0050 & 0.0187 \end{bmatrix}$$

그림 4와 그림 5는 컴퓨터 시뮬레이션의 결과이다. 실선은 디지털 제어기에 의한 결과이고 점선은 아날로그 제어기에 의한 결과이다. 컴퓨터 시뮬레이션의 결과에서 알 수 있듯이 제안된 제어 기법과 아날로그 제어 기법이 거의 일치함을 알 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 지능형 디지털 재설계 기법을 제안했다. 비선형 시스템을 제어하기 위하여 TS 퍼지 모델을 사용하였다. 또한 퍼지 제어를 설계하기 위하여 EPDC 기법을 사용하였다. 아날로그 제어기는 최적 제어 기법에 의하여 설계되었다. 아날로그 시스템을 제어하기 위한 디지털 제어를 설계하기 위하여 디지털 재설계 기법을 사용하였다. 샘플링 시간 사이의 시스템의 응답을 고려하기 위하여 이중 샘플링 기법을 사용하여 개선된 디지털 재설계 기법을 제안하였다. 마지막으로 퍼지 추론을 이용하여 전체 시스템을 제어 할 수 있는 PAM, PWM 제어기를 설계하였다. 제안된 기법의 우수성을 입증하기 위하여 Duffing 혼돈 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 예제를 보였다.

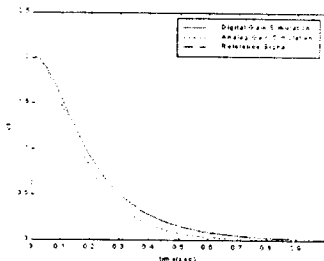


Fig. 4  $x_1(t)$  with PAM controller

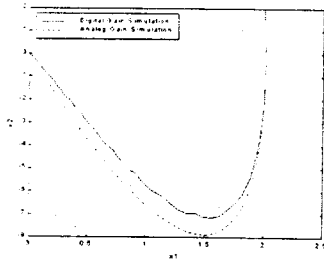


Fig. 5 Trajectories of state  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$

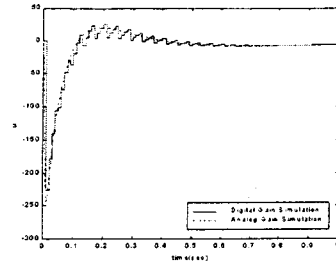


Fig. 6 Control input of the PAM controller

## [참고문헌]

- [1] Y. H. Joo, H. S. Hwang, K. B. Kim and K. B. Woo, "Fuzzy system modeling by fuzzy partition and GA hybrid schemes", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 86, No. 3, pp. 279-288, 1997.
- [2] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "An LMI approach to fuzzy controller designs based on relaxed stability conditions", Proc. of FUZZ-IEEE, pp. 171-176, 1997.
- [3] B. C. Kuo, Digital Control Systems, Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1980.
- [4] L. S. Shieh, W. M. Wang and M. K. Appu Panicker, "Design of lifted dual-rate PAM and PWM digital controllers for the X-38 Vehicle". (to be printed)
- [5] L. S. Shieh, X.M. Zhao, and J. Sunkel, "Hybrid state-space self-tuning control using dual-rate sampling", IEE Proceedings(D), Vol. 138, No. 1, pp. 50-58, 1991.
- [6] J. Xu, G. Chen and L. S. Shieh, "Digital redesign for controlling the chaotic Chua's circuit", IEEE Trans. on Aerospace and Electronics Systems, Vol. 32, No. 4, 1996.
- [7] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 45, No. 2, pp. 135-156, 1992.
- [8] H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, "Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model", Proc. of FUZZ-IEEE/IFES'95, pp. 531-538, 1995.
- [9] L. K. Wong, F. F. Leung, and P. K. S. Tam, "Stability design of TS model based fuzzy systems", IEEE Inter. Conf. on Fuzzy Systems, pp. 83-86, 1997.
- [10] Y. H. Joo, L. S. Shieh and G. Chen, "Hybrid state-space fuzzy-model-based controller with dual-rate sampling for the digital control of chaotic systems", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, (to be printed)