

유전 알고리즘을 이용한  $H_\infty$  제한 조건을 갖는  $H_2$  제어기 설계

이종성, 강기원, 박기현  
 성균관대학교 전기·전자·컴퓨터 공학부

Design of the  $H_2$  Controllers with  $H_\infty$  Constraints Using Genetic Algorithms

Jong-Sung Lee, Kiwon Kang, Kiheon Park  
 The School of Electrical & Computer Eng., Sung-Kyun-Kwan Univ.

**Abstract** - In this paper, the genetic algorithm is used to design a mixed  $H_2/H_\infty$  controller. Two kinds of controller forms, Youla's form and the general form, are considered to design a mixed  $H_2/H_\infty$  controller. Efficient searching methods are sought to minimize the given  $H_2$  cost function under the  $H_\infty$  constraint. It is verified by an example that the developed algorithm can provide stable results in the region where unstable results are shown by the conventional gradient method.

1. 서 론

$H_2/H_\infty$  혼합 기법은 1989년에 Bernstein과 Haddad[1]에 의해 처음 제시되었으며, 1990년대 초에는 볼록(convex) 최적화 접근법을 이용하여  $H_2/H_\infty$  최적화 문제를 다루는 연구들이 시도되었다. 그러나 이러한 방식으로 구한 제어기는 차수가 매우 높기 때문에 실제 구현에는 어려움이 있었다. Chen과 Wen[2]은 Youla 제어기의 자유 매개 변수에  $L_1$  근사화를 취한 후, 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequalities) 기법을 적용하여 저차의  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기를 구하였으며, Szaiaier의 2인[3]은 Youla 제어기를 이용하여 고차의  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기를 근사화 기법으로 구한 후 제어기 축소 기법을 이용하여 저차의 고정 차수 제어기를 구하였다. 이러한 기법들은 Youla 제어기의 매개변수에 대한 근사화 기법을 쓰고 있기 때문에 최종적인 제어기의 성능은 더 검증되어야 할 것으로 보인다(본 논문의 중요한 내용중의 하나가 이러한 검증 작업이다). 한편, Ridgely[4]는 일반 제어기의 형태에서 제어기의 차수를 제한하여 고정 차수의 제어기를 구하였는데, 문제의 해를 찾기 위해서 비선형 프로그래밍 방법[5]을 이용하기 때문에 수학적 전개가 어려울 뿐만 아니라 경사도(gradient) 값이 급격히 증가하는 지점부터는 정확한 해를 구해내지 못하는 단점을 가지고 있다.

Youla 매개 변수를 이용하는 근사화 기법이나 경사도 값에 의존하는 비선형 프로그램 기법등의 단점을 극복하는 확실한 방법은 직접 탐색법을 이용하는 것이다. 그러나 이 방법 역시 탐색 구간이 커지거나 플랜트의 차수가 커지게 되면 연산 시간이 감당할 수 없이 커지게 되는 문제점을 가지고 있다. 본 논문에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 지능형 탐색 알고리즘인 유전 알고리즘을 이용하여 고정 차수의  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기를 구하는 효율적인 적용 방법을 제시하고 있으며, 안정도가 보장되는 Youla 제어기와 안정도가 보장되지 않는 일반 제어기에 적용할 경우의 장단점을 비교하였다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

$H_2/H_\infty$  혼합 문제를 다루기 위해 그림 1과 같이 두 개의 입출력 채널이 있는 시스템을 고려해 보자.

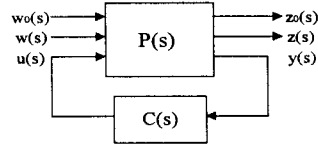


그림 1.  $H_2/H_\infty$  혼합형 모델의 제어 시스템

본 논문에서 다루는  $H_2/H_\infty$  혼합 문제는 주어진  $\gamma$  값에 대해  $\|T_{z_0, w_0}\|_\infty \leq \gamma$ 의 조건을 만족하면서  $\|T_{z, w}\|_2$ 을 최소화시키는 내부 안정화 제어기  $C(s)$ 를 구하는 문제로 설정된다. 이 때 제어기  $C(s)$ 의 차수를 미리 주어진 값으로 제한한다면  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기 설계 문제는 다음 조건을 만족하는 제어기  $C(s)$ 를 찾는 문제로 정의된다;

- a. i)  $C(s)$ 는 전체 폐환 시스템을 내부적으로 안정화시켜야 한다.
- a. ii)  $C(s)$ 의 차수는 고정 차수이며 미리 지정된다.
- a. iii) 주어진  $\gamma$ 값에 대하여  $\|T_{z_0, w_0}\|_\infty \leq \gamma$ 이 만족되어야 한다.
- a. iv)  $\|T_{z, w}\|_2$ 을 최소화시켜야 한다.

일반적으로 시스템의 공칭 안정도와 성능 문제는 서로 상충(trade-off) 관계가 있음을 알 수 있고, 제어기의 차수가 고정된 조건하에서 a.iii)의 주어진  $\gamma$ 값에 대한 a.iv)의  $\min \|T_{z, w}\|_2$  값을  $\alpha$ 로 표시하는 경우 전형적인  $H_2/H_\infty$  혼합 모델의  $\alpha$ 와  $\gamma$ 간의 관계는 그림 2와 같이 표시된다. 이때  $\alpha - \gamma$  그래프는 두 개 노음 값의 분포를 통해 가장 적절한 성능 절충점에 대한 정보를 주며, 이 정보로부터 최종적인 제어기의 결정을 가능케 한다.

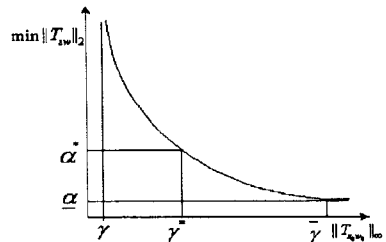


그림 2.  $H_2/H_\infty$  혼합 시스템의  $\alpha - \gamma$  값과의 관계  
 그림 2에서 사용된 기호들의 내용은 다음과 같으며, 앞

으로의 내용 전개에도 계속 사용된다.

$$\gamma \equiv \min_C \|T_{z_0 w_0}\|_\infty, \alpha \equiv \min_C \|T_{zw}\|_2 \quad (1)$$

$$\tilde{C}(s) \equiv \|T_{zw}\|_2 = \alpha \text{ 가 되게 하는 최적 } H_2 \text{ 제어기} \quad (2)$$

$$\bar{\gamma} \equiv \text{제어기가 } \tilde{C}(s) \text{ 일 때의 } \|T_{z_0 w_0}\|_\infty \text{ 의 값} \quad (3)$$

$$C(s) \equiv \gamma > \bar{\gamma} \text{ 인 경우의 } H_2/H_\infty \text{ 혼합제어기} \quad (4)$$

$$\gamma^* \equiv C(s) \text{ 를 사용할 때의 } \|T_{z_0 w_0}\|_\infty \text{ 값} \quad (5)$$

$$\alpha^* \equiv C(s) \text{ 를 사용할 때의 } \min \|T_{zw}\|_2 \text{ 값} \quad (6)$$

앞에서 정의된  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기로서 일반 형태의 제어기와 Youla 매개변수화된 제어기를 설계하여 유전 알고리즘에 적용하고 그 결과를 통해 어떤 제어기 형태가 적합한지를 비선형 프로그램을 이용한 경사도 탐색 방법[5]의 결과와 비교하여 보았다.

## 2.2 $H_2/H_\infty$ 혼합 제어기의 설계

그림 1에서 시스템 입, 출력 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w_0 \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad u(s) = C(s)y(s) \quad (7)$$

또한 플랜트  $P(s)$ 의 상태공간 계수가

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{00}(s) & P_{01}(s) & P_{02}(s) \\ P_{10}(s) & P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{20}(s) & P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G_0 & G_1 & G_2 \\ H_0 & J_{00} & J_{01} & J_{02} \\ H_1 & J_{10} & J_{11} & J_{12} \\ H_2 & J_{20} & J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

으로 주어질 때 다음과 같은 표준 가정을 하자[6].

- i)  $J_{11} = 0, J_{22} = 0$ 이다.
- ii)  $(F, G_2, H_2)$ 는 가제어, 가관측하다.
- iii)  $J_{12}$ 와  $J_{21}$ 는 각각 열과 행계수를 갖는다.
- iv)  $\begin{bmatrix} F - j\omega I & G_2 \\ H_1 & J_{12} \end{bmatrix}$ 와  $\begin{bmatrix} F - j\omega I & G_1 \\ H_2 & J_{21} \end{bmatrix}$ 은 모든  $\omega$ 값에서 각각 전열(full column) 계수와 전행(full row) 계수를 갖는다.

### 2.2.1 Youla 제어기를 이용한 설계법

잘 알려진 바와 같이 (7)의 제어기  $C(s)$ 에 Youla 제어기를 사용하면 전달 행렬  $T_{z_0 w_0}, T_{zw}$ 는 다음과 같은 표준형으로 표시된다[8];

$$T_{z_0 w_0} = T_{00}(s) - T_{01}(s)Q(s)T_{02}(s) \quad (9)$$

$$T_{zw} = T_{10}(s) - T_{11}(s)Q(s)T_{12}(s) \quad (10)$$

여기서  $T_{ij}(s), i = 0, 1, j = 0, 1, 2$ 는 안정하며,  $Q(s)$ 는 Youla 제어기의 안정한 임의의 매개변수이다. 이 때 제어기  $C(s)$ 의 차수(McMillan degree)는 플랜트  $P(s)$ 의 차수와  $Q(s)$ 의 차수의 합이 된다는 것은 잘 알려져 있다. 따라서 Youla 제어기 사용시, 고정 차수 제어기를 구하는 문제는 다음 조건을 만족하는 문제로 전환된다.

- b. i)  $Q(s)$ 는 안정하고 고정 차수이다.
- b. ii)  $\|T_{00} - T_{01}QT_{02}\|_\infty < \gamma$ 를 만족한다.
- b. iii) 위의 조건하에서  $\|T_{10} - T_{11}QT_{12}\|_2$ 를 최소화시키는  $Q$ 를 찾는다.

자유 매개변수  $Q(s)$ 의 상태공간 계수가

$$Q(s) = H_q(sI - F_q)^{-1}G_q \quad (11)$$

로 주어질 때  $T_{z_0 w_0}$ 와  $T_{zw}$ 의 상태공간 계수는 다음과 같이 된다[7];

$$T_{zw}(s) = \begin{bmatrix} F_L & G_{L2} \\ H_{L2} & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{z_0 w_0}(s) = \begin{bmatrix} F_L & G_{L\infty} \\ H_{L\infty} & J_{00} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$F_L = \begin{bmatrix} F - G_2 K_1 & -G_2 R_1^{-1/2} H_q & K_2 H_2 \\ 0 & F_q & G_q R_2^{-1/2} H_2 \\ 0 & 0 & F - K_2 H_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$G_{L2} = \begin{bmatrix} K_2 J_{21} \\ G_q R_2^{-1/2} J_{21} \\ G_1 - K_2 J_{21} \end{bmatrix}, \quad G_{L\infty} = \begin{bmatrix} K_2 J_{20} \\ G_q R_2^{-1/2} J_{20} \\ G_0 - K_2 J_{20} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$H_{L2} = [H_1 - J_{12} K_1 \quad -J_{12} R_1^{-1/2} H_q \quad H_1] \quad (15)$$

$$H_{L\infty} = [H_0 - J_{02} K_1 \quad -J_{02} R_1^{-1/2} H_q \quad H_0] \quad (16)$$

$$R_1 = J_{12}^T J_{12}, \quad R_2 = J_{21} J_{21}^T \quad (17)$$

식(13)의 행렬  $K_1, K_2$ 는 각각  $F - G_2 K_1, F - K_2 H_2$ 를 안정하게 하는 임의의 행렬이다.  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기를 설계하는 과정은  $Q(s)$ 를 변화시키며 (12)의  $T_{zw}$ 의 2-노름과 (13)의  $T_{z_0 w_0}$ 의  $\infty$ -노름을 관찰하면서 조건 b)를 만족시키는  $Q$ 를 유전 알고리즘을 통해 찾은 것이다.

제어기의 매개변수 부분인  $Q(s)$ 의 상태공간 행렬  $F_q, G_q, H_q$ 의 형태는 (18), (19)와 같이 설정하며,  $F_q$ 는 중근도까지 동시에 고려할 수 있는 Jordan 표준 형태를 취했으며, 탐색 범위도 음의 구간으로 제한하여 페루프 시스템의 안정화 조건이 항상 만족되도록 하였다.

$$F_q = \begin{bmatrix} f_1 & c & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & f_{n-1} & c \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & f_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서  $f_1, f_2, \dots, f_n < 0$ 인 임의의 상수,  $c$ 는 0 또는 1

$$G_q = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{(n-1)1} & g_{(n-1)2} & \dots & g_{(n-1)m} \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nm} \end{bmatrix}, \quad H_q = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{(r-1)1} & h_{(r-1)2} & \dots & h_{(r-1)n} \\ h_{r1} & h_{r2} & \dots & h_{rn} \end{bmatrix} \quad (19)$$

유전 알고리즘 적용에 필요한 염색체를 형성하는 변수들은 (18), (19)와 같으며 이들은 2진수의 정해진 다음의 비트 수로 나열된다.

$$S_q = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n \ g_{11} \ g_{12} \ \dots \ g_{nm} \ h_{11} \ h_{12} \ \dots \ h_{rn}] \quad (20)$$

위와 같이 염색체를 일정한 개수로 만들어 제1세대로서 모집단을 형성하고 이를 (21)과 같은 적합도 함수로 평가하여 그 값이 높은 것은 다음 세대에서 반영될 수 있도록 하였다. 이러한 과정을 미리 설정된 세대수만큼 수행한 후 가장 높은 적합도 값을 가지는 (20)의 염색체가  $F_q, G_q, H_q$ 를 구성하는 입자가 된다.

$$\text{Fitness} = -W * \text{주어지는 } H_\infty \text{ 제한값} - \|T_{z_0 w_0}\|_\infty - \|T_{zw}\|_2 \quad (21)$$

여기서  $W$ 는 가중치인데 주어진  $H_\infty$  노름의 제한 값에 따라 조정해야 하며, 시뮬레이션 결과 그림 2의  $\gamma$ 에 가까워질수록 가중치를 증가시켜야만 제한 조건이 만족되는 것을 알 수 있었다.

### 2.2.2 일반 형태의 제어기를 이용한 상태공간 계수 직접 탐색 접근법

그림 1의 모델에서  $H_2$ 와  $H_\infty$  문제와 관련되는 상태공간 모델은 다음과 같이 각각 쓸 수 있다.

$$P_2(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G_1 & G_2 \\ H_1 & J_{11} & J_{12} \\ H_2 & J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$P_\infty(s) = \begin{bmatrix} P_{00}(s) & P_{02}(s) \\ P_{20}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G_0 & G_2 \\ H_0 & J_{00} & J_{02} \\ H_2 & J_{20} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

또한, 제어기의 상태공간 모델이

$$C(s) = \left[ \frac{F_C}{H_C} \mid \frac{G_C}{0} \right] \quad (24)$$

로 주어진다면 전달 행렬

$$T_{zw}(s) = P_{11} + P_{12} C (I - P_{22} C)^{-1} P_{21} \quad (25)$$

$$T_{z_0 w_0}(s) = P_{00} + P_{02} C (I - P_{22} C)^{-1} P_{20} \quad (26)$$

의 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$T_{zw} = \left[ \frac{F \quad G_2 H_C}{G_C H_2 \quad F_C} \mid \frac{G_C J_{21}}{H_1 \quad J_{12} H_C} \right], \quad T_{z_0 w_0} = \left[ \frac{F \quad G_2 H_C}{G_C H_2 \quad F_C} \mid \frac{G_0}{H_1 \quad J_{02} H_C} \right] \quad (27)$$

이 때 제한조건인  $\|T_{z_0, w_0}\|_\infty$  값을 만족하면서  $\|T_{zw}\|_2$  값을 최소화시키는 제어기의 상태공간 계수를 구하는 것이  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기 설계 문제이다.

제어기 상태공간 계수를 효과적으로 탐색하기 위해서 우리가 사용하는 제어기의  $F_C$  행렬의 형태는 다음과 같이 수정된 Jordan 표준형[8]으로 잡는다. 이러한 형태의 장점은 변수의 개수를 줄이면서도 실 극점 및 복소 극점까지 고려할 수 있다는 것이다.

$$F_C = \begin{bmatrix} f_1 & f_{n+1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -f_{n+1} & f_2 & f_{n+2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -f_{n+2} & f_3 & f_{n+3} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & f_{n-1} & f_{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -f_{2n-1} & f_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$G_C = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{(n-1)1} & \dots & \dots & g_{(n-1)m} \\ g_{n1} & \dots & \dots & g_{nm} \end{bmatrix}, H_C = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{(r-1)1} & \dots & \dots & h_{(r-1)n} \\ h_{rm} & \dots & \dots & h_{rm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

또한, 염색체를 형성하는 (28), (29)의 변수들은 (30)과 같이 2진수의 정해진 비트 수로 나열된다.

$$S_C = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{2n-1} \ g_{11} \ g_{12} \ \dots \ g_{nm} \ h_{11} \ h_{12} \ \dots \ h_{rm}] \quad (30)$$

위와 같이 염색체들을 구성하여 제1세대로서의 모집단을 형성하고 이를 (31)과 같은 적합도 함수로 평가하여 그 값이 높은 것은 다음 세대에서 선택될 수 있도록 하였다. 이러한 과정을 미리 설정된 세대수만큼 수행하여 전체 세대를 통하여 수행하여 가장 높은 적합도 값을 가질 때 (30)의 염색체를 구성하는 인자가 제어기의 상태공간 행렬  $F_C, G_C, H_C$ 로 선택된다.

$$Fitness = -W \|T_{z_0, w_0}\|_\infty - \|T_{zw}\|_2 - P \quad (31)$$

단, 여기서  $W$ 는 가중치이고  $P$ 는 벌점(Penalty)값으로서  $T_{z_0, w_0}, T_{zw}$ 가 내부적으로 안정하면 0, 그렇지 않으면  $P$ 값을 가진다.

이와 같이 주어진  $\alpha^*$ 와  $\gamma^*$ 가 상충(trade-off)인 경우, 다음 과정을 통해 탐색하는 것이 효과적이었다.

- ① 주어진 고정 차수의 제어기 상태공간 계수를 구성하는 초기값 집단을 구하기 위해 Youla 매개변수화된 고정 차수 제어기를 이용하여  $\gamma^*$ 값에 관계없이  $\alpha^*$ 값을 최소화하는 제어기 상태공간 계수를 구한다.
- ② ①에서 구한 Youla 매개변수화된 고정 차수 제어기의 상태공간 계수를 고정 차수의 modal 표준형으로 변환시키고 이를 다시 Jordan 표준형으로 대입하여 제어기 상태공간 계수를 구한다.
- ③ ②에서 구한 일반 형태의 제어기 상태공간 계수를 유전 알고리즘의 초기값으로 하여  $\gamma$ 값을 만족하고 (31)의 값을 최대화시키는 과정을 정해진 세대수만큼 반복 수행한다.
- ④ 세대가 증가되면서 적합도 값이 개선될 때에는 초기에 설정된 탐색 구간을 점차적으로 축소하여 결과적으로 최적값이 존재할 수 있는 구간까지 축소시켜 결국 원하는 결과 값에 수렴될 수 있게 한다.

### 2.3 적용예

다음과 같은 상태공간 모델을 갖는 시스템을 고려하자.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -0.11 & -0.12 & 0 \\ 376.99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.19 & -0.42 & -27.42 \\ 0 & -7.31 & 20.84 & -50 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 27.42 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$H_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0], H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (34)$$

$$J_{00} = 0, J_{02} = 0, J_{20} = 1,$$

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, J_{21} = [0 \ 1], J_{22} = 0 \quad (35)$$

이 시스템에 대해 최적  $H_2$  제어기를 적용할 경우  $\alpha$  값, 이 때 대응되는  $\bar{\gamma}$  값, 최적  $H_\infty$  제어기를 적용할 경우  $\alpha$  값은 각각 다음과 같다.

$$\alpha = 12.2188, \bar{\gamma} = 4.1243, \alpha = 0.8359 \quad (36)$$

이제  $\gamma^*$  값이 주어졌을 때 이 값을 만족하는 최소  $H_2$  노음 값인  $\alpha^*$ 가 되게 하는 매개변수  $Q(s)$ 의 상태공간 계수  $F_q, G_q, H_q$ 와 제어기  $C(s)$ 의 상태공간 계수  $F_C, G_C, H_C$ 를 유전 알고리즘을 통해 탐색한 결과는 표 1과 같다. 여기서 사용되는 유전 연산자와 탐색을 위한 조건들은 여러 번의 조정을 거쳐 다음과 같이 설정되었으며 MATLAB의 GA toolbox[9]를 이용하여 탐색을 실시하였다.

- 모집단의 수:100, 세대 수:100, 교배 확률:0.3, 돌연변이 확률:0.03
- 각 변수의 탐색 구간(Youla 매개변수 접근법인 경우)  $-500 \leq F_q \leq -0.1, -250 \leq G_q \leq 250, -250 \leq H_q \leq 250$
- 각 변수의 탐색 구간(일반 제어기 형태인 경우)  $-250 \leq F_C \leq 250, -250 \leq G_C \leq 250, -250 \leq H_C \leq 250$
- 각 변수의 비트 수 : 16 비트
- 탐색시 정밀도

$$\frac{\text{탐색구간의 상한} - \text{탐색구간의 하한}}{2^{\text{비트수}}} = \frac{500}{2^{16}} = 0.007629$$

Walker[5]가 제시한 비선형 프로그래밍 방법인 경사도 기법은 MATLAB의 MXTOOLS[10]를 이용하여 구했으며 이를 본 논문의 연구 결과인 일반 형태의 제어기를 이용한 탐색 결과와 비교하였을 때  $\gamma$ 가 1.5까지는 거의 같게 나타나고 있음을 알 수 있다.

표 1. 경사도 기법과 유전 알고리즘의 결과 비교

고정 차수	경사도 방법		유전 알고리즘을 이용한 방법					
	$\gamma^*$ 값	$\alpha^*$ 값	Youla 매개변수화된 제어기	$Q(s)$ 의 차수	$\alpha$ 값	일반 형태의 제어기	$C(s)$ 의 차수	$\alpha$ 값
4.0	4.0	12.22	4.0000	1	14.0110	4.0000	4	12.2310
			4.0002	2	13.9527	4.0000	5	12.2279
			4.0000	3	12.9227	4.0000	6	12.2256
			4.0000	4	12.7641	4.0000	7	12.2255
3.0	3.0	12.6	3.0000	1	43.2036	3.0000	4	12.6871
			2.9999	2	27.4680	2.9999	5	12.6697
			3.0000	3	18.7509	3.0000	6	12.6333
			2.9999	4	18.4830	3.0000	8	12.6169
2.0	2.011	16.18	N/A	1	N/A	2.0000	4	18.1235
			2.0153	2	38.5511	1.9943	5	19.1158
			2.0076	3	28.0567	1.9998	6	16.4810
			2.0032	4	28.0096	2.0004	8	16.2789
1.5	1.508	28.45	N/A	1	N/A	1.5015	4	29.1863
			1.7000	2	48.1945	1.5074	5	29.1394
			1.7296	3	39.2469	1.5005	6	29.0370
			1.7117	4	38.0900	1.5019	8	28.5729
1.0	1.39	48.81	N/A	1	N/A	1.1763	4	137.0683
			1.6756	2	52.9570	1.1770	5	132.7861
			1.6059	3	121.0780	1.1776	6	131.6823
			1.6095	4	115.4263	1.1563	8	174.5610

※ N/A : Not Available

표 1의 결과에서 Youla 매개변수화된 제어기를 이용하는 경우 다른 두가지 탐색 방법에 비하여 현격한 차이를 보이는데, 그 원인을 분석해 보기 위해 본 논문의 적용예에서 다루는 시스템에 대해서 그림 4의 Youla 매개변수화된 제어기를 비교해보자.

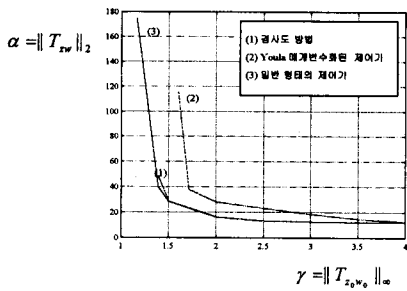


그림 3. 3가지 탐색 방법의 결과 비교

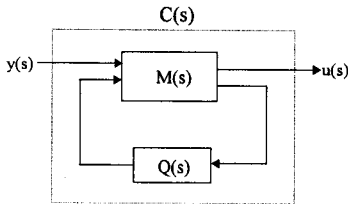


그림 4. Youla 매개변수화된 제어기

그림 4에서 제어기  $C(s)$ 와 매개변수 부분인  $Q(s)$  사이에는 LFT(Linear Fractional Transform)의 관계가 있고 이를 수식으로 나타내면

$$C(s) = M_{11} + M_{12} Q(I - M_{22} Q)^{-1} M_{21} \quad (37)$$

이 되고 이를 다시 homographic 변환을 이용하면

$$C(s) = V(s) \square Q(s) \triangleleft (V_{11} Q + V_{12}) (V_{21} Q + V_{22})^{-1} \quad (38)$$

으로 표시되므로 결국

$$Q(s) = V(s)^{-1} \square C(s) \quad (39)$$

이 되고, 식(12)에서 사용된 상태공간 변수를 사용하면  $V^{-1}$ 의 상태공간 변수는 다음과 같다.

$$V(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{F - G_2 K_1}{K_1} & \frac{G_2}{I} & \frac{K_2}{0} \\ -H_2 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (40)$$

따라서 플랜트  $C(s)$ 가 주어지면 (39)와 (40)을 이용하여 대응되는  $Q(s)$ 를 구할 수 있다. 본 논문의 적용 예에서 주어진 4차 플랜트에 대해 아래와 같은 5차의 안정화 제어기  $C(s)$ 가 주어졌을 때 이에 해당하는 그림 4의  $Q(s)$ 를 구해보았다.

$$C(s) = \begin{bmatrix} -1.2654 & 9.2754 & 0 & 0 & 0 & 2.2227 \\ -9.2754 & -32.9050 & -0.4703 & 0 & 0 & -0.7384 \\ 0 & 0.4703 & -2.3081 & 5.7770 & 0 & -1.9190 \\ 0 & 0 & -5.7770 & -0.4284 & 4.4680 & 3.1581 \\ 1.2457 & 4.1465 & -1.9582 & 5.7235 & 2.4701 & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

식(39)를 이용하여 그림 4의 제어기에서 Youla 매개변수화 부분인  $Q(s)$ 의 영점과 극점을 구해보자.

$$\text{영점} : -31.0160, -4.2697, -23.0850 \pm j 2.4076, 7.5470 \pm j 8.3363, -0.8073 \pm j 6.2704 \quad (42)$$

$$\text{극점} : -31.0140, -29.8420, -20.6460, -4.2770, -2.7186, -0.4612 \pm j 7.5767, -0.4148 \pm j 6.9542 \quad (43)$$

이 경우 영점, 극점 상쇄가 일어나지 않았기 때문에  $Q(s)$ 의 극점은 9개 즉, 9차의  $Q(s)$ 가 나오게 된다. 이와 같이 일반 형태의 제어기  $C(s)$ 가 5차로 주어질 때, 그림 4와 같은 구조의 제어기로 표현할 경우, 플랜트가 4차이므로 Youla 매개변수화 부분인  $Q(s)$ 는 1차로 나타날 것으로 예상됐지만 실제 결과는 위와 같이  $Q(s)$ 가 9차인 결과가 나왔다. 이는 1차의  $Q(s)$ 로는 그림 4의 일반 제어기 형태에 대응되는 5차의 모든 제어기를 1:1 대응하여 구현할 수 없다는 것을 의미한다. 즉, 일반 형태의 제어기가 Youla 매개변수화된 제어기에 비

해 같은 차수의 제어기로 탐색할 수 있는 해의 공간이 넓다는 것을 보여주는 것이다.

### 3. 결 론

표 1에서 보는 바와 같이 제한 조건으로  $H_\infty$  노음 값인  $\gamma^*$ 가 주어질 때, 이에 대응되는 최소  $H_2$  노음 값인  $\alpha^*$ 의 결과를 보면 일반 형태의 제어기가 Youla 매개변수화된 제어기에 비해 더 작은  $H_2$  노음 값을 나타내는 것을 볼 수 있었다. 따라서, 일반 형태의 제어기 구조를 유전 알고리즘에 적용하는 것이 유리하며, Youla 제어를 이용한 Chen[2]와 Sznaier[3] 방식으로 고정 차수 제어기를 구하는 것은 성능에 제한이 있게 됨을 알 수 있었다. 또한, 기존의 탐색 방법인 경사도 기법에 있어서 제한 값 2.0이하부터는 탐색 조건을 완화시켜야지만 주어진  $\gamma^*$  값을 근사적으로 따라가며, 경사도가 급격히 증가하기 시작하는 부분에서는 탐색 조건을 완화하여도 결과 값을 구하지 못함을 알 수 있었다. 유전 알고리즘과 비교해 볼 때 주어진  $\gamma^*$  값이 1.0에서는 경사도 방법이 더 많은 차이를 나타내고 있다. 이러한 점을 볼 때 그림 3의  $\alpha - \gamma$  곡선에 있어서 경사도 방법과 유전 알고리즘이 거의 비슷한 결과를 보여주다가  $\gamma$ 에 가까워지는 무릎(knee) 지점의  $\gamma^*$  값에 대해서는 경사도 방법보다 유전 알고리즘이 보다 나은 결과를 보여주어 개선의 여지가 많다는 점을 알 수 있었다.

### [참 고 문 헌]

- [1] D. S. Bernstein and W. H. Haddad, "LQG Control with an  $H_\infty$  Performance bound : A Riccati Equation Approach", IEEE Trans. Auto. Control, AC-34(3):293-305, March 1989.
- [2] X. Chen and J. T. Wen, "A Linear Matrix Inequality Approach to the General Mixed  $H_2/H_\infty$  Control Problem", Proceedings of the American Control Conference Seattle, pp. 1443-1447, Washington, June 1995.
- [3] M. Sznaier, H. Rotstein and J. Bu, "An Exact Solution to Continuous-Time Mixed  $H_2/H_\infty$  Control Problems", Proceedings of the American Control Conference Albuquerque, pp. 3500-3504, New Mexico, June 1997.
- [4] D. B. Ridgely, C. P. Mracek and L. Valavani, "Numerical Solution of the General Mixed  $H_2/H_\infty$  Optimization Problem", In Proceeding of the American Control Conference, pp. 1353-1357, Chicago IL, June 1992.
- [5] D. E. Walker, " $H_2$  Optimal Control with  $H_\infty$ ,  $\mu$  and  $L_1$  Constraints", Ph. D. thesis, Air Force Institute of Technology, WPAFB, OH, June 1994.
- [6] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems", IEEE Trans. on Auto. Control, AC-34(8):831-847, August 1989.
- [7] 박기현, " $H_\infty$  제한 조건을 갖는 2자유도  $H_2$  제어기 설계", 핵심 전문 연구 과제 보고서, 한국 과학 재단, 1999.
- [8] Peter S. Maybeck, "Stochastic Models, Estimation, and Control, Volume 1", Academy Press, 1979.
- [9] Andrew F. Potvin, "Genetic Algorithm Toolbox", The MathWorks, Inc., 1994.
- [10] David R. Jacques, Robert A. Canfield and D. Brett Ridgely, "Mixed Norm Toolbox", The MathWorks, Inc., 1995.