1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19~21

포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계

조현철, 김진훈
충북대학교 제어계측공학과

H_∞ Controller Design of Linear Systems with Saturating Actuators

Hyun-Chol Cho, Jin-Hoon Kim
Dept. of Control and Instrumentation Engineering, Chungbuk National Univ.

Abstract- In this paper, we consider the design of a state feedback H_∞ controller for linear systems with saturating actuators. We consider a general saturating actuator and employ the multiplicative decomposition to deal with it effectively. Based on Linear Matrix Inequality (LMI) techniques, we present a condition on designing a controller that guarantees the L_2 gain, from the noise to the output, is not greater than a given value. A controller is obtained by checking the feasibility of three LMI's, and this can be easily done by well-known control package. Finally, we show the usefulness of our result by a numerical example.

1. 서 론

실제 제어 시스템에서 구동기는 필수적이며, 대부분의 구동기는 입력 값에 무관하게 일정한 출력이 나오는 포화 특성을 가진다. 구동기의 선형구간을 매우 크게 하여 포화현상이 일어나지 않도록 하는 것이 바람직하나, 선형구간의 증가는 시스템의 대규모화 및 가격의 상승 등으로 이어지기 때문에 어느 이상의 선형구간은 갖지 못하는 것이 일반적이다. 이러한 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 안정성에 관한 연구들이 이어지고 있다 [1]-[3].

Bellman-Gronwall의 부등식을 이용하여 포화 구동기를 갖는 폐루프 시스템의 안정성에 대한 충분 조건이 시간 영역 관점에서 유도되었다[1]. Semiglobal 접근법으로 입력에 부가되는 외란이 제거된 안정화와 정합된 비선형 불확정성의 존재에 강인 안정화를 포함하는 구동기 한계가 제어 설계 이전에 구체화하는 것을 갖게 되는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 설계를 다뤘고[2], functional 미분 방정식의 안정성에 대한 Razumikhin 접근법을 사용하여 입력행렬과 상태에서 노음의 바운드된 파라미터 불확정성을 갖는 지연된 상태 방정식에 의하여 특성화되는 포화 구동기를 수반하는 불확정성 시간지연 시스템이 고려되었다[3].

강인제어의 핵심이 되는 분야 중의 한 가지인 H_∞ 제어이론은 1980년대부터 많은 관심을 받으면서 큰 발전을 보았으며 지금도 연구가 계속되어지고 있다[4]-[7].

두 개의 대수 Riccati 방정식(algebraic Riccati Equation)을 기초로 하여 상태공간에서 H_∞ 제어기를 설계하는 방법을 제안되었고[4], 세 개의 선형 행렬 부등식(LMI)으로 임의 차수를 갖는 H_∞ 제어기가 존재할 필요충분조건을 제시하여 일반적인 H_∞ 제어 문제의 해결 방법을 제시되었다 [5],[6]. 선형 행렬 부등식을 바탕으로 상태에 시간지연을 갖는 시스템에 대하여 출력궤환을 이용한 H_∞ 제어기가 설계되었다[7].

본 논문에서는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템에서 외란(disturbance)으로부터 출력의 H_∞ 노옴이 주어진 값 이하 또는 같도록 하는 제어기를 설계하는 문제를 다룬다. 일반적인 포화 특성과 그 비선형성인 포화 특성을 효과적으로 다루기 위해 곱분해 접근법(Multiplicative Decomposition Approach)을 사용하였다[8]. 제어기는 H_∞ 이론을 바탕으로 얻어진 LMI 조건들을 만족하는 해를 구하면 곧바로 얻게되며, 또한 이들 조건은 MATLAB™을 이용하면 쉽게 확인된다. 마지막으로 수치 예제를 통해 제시된 결과의 유용성을 보인다.

이 논문에서는 $|\cdot|$는 절대치를 $\|\cdot\|$는 L_2 노옴을 의미한다. 또한 $\lambda_{\max}(\cdot)$는 대칭(symmetric)행렬의 최대 고유치(maximum eigenvalue)이고 두 개의 대칭행렬 $V, W\in R^{n\times n}$에 대하여 $V<W$ 또는 $V\le W$는 각각 행렬 $W-V$ 가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 끝으로 I는 적당한 차수의 항등(identity)행렬이다.

2. 문제기술

다음의 포화 구동기를 포함하는 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 sat(u(t)) + B_2 w(t)\\ z(t) &= Cx(t), \qquad x(0)=0\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$는 상태이고 $u(t)\in R^m$는 제어를 나타내며 외란은 $w^T w\le w_{\max}^2$ 를 만족한다. 또한 포화 함수는 다음과 같다.

$$sat(u) = [\,sat(u_1), sat(u_2), \cdots, sat(u_m)]^T$$

여기서

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^{\lim}, & \text{if } u_i > u_i^{\lim}\\ u_i, & \text{if } |u_i|\le u_i^{\lim}\\ -u_i^{\lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{\lim}\end{cases}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

이다. 그리고 다음의 상태궤환 제어

$$u(t) = -Kx(t) \tag{3}$$

를 생각한다.

시스템(1)에 제어(3)을 적용하여 정리하면 다음이 된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 \Phi Kx(t) + B_2 w(t)\\ z(t) &= Cx(t)\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\Phi = \Phi(x) = Diag\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$이고, 또한

$$\phi_i = \phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{sat(K_i x)}{K_i x}, & \text{if } |K_i x|\ne 0\\ 1, & otherwise\end{cases}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

이다.

본 논문의 주요 목적은 제어(3)을 갖는 시스템(1)에 대하여 w로부터 z까지 L_2 이득이 γ보다 크지 않은 즉, $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}\le\gamma$를 보장하는 제어(3)을 찾는 것이다.

먼저 다음의 집합(reachable set)을 정의하자.

$$\Omega = \{x : x^T Q^{-1} x \le w_{\max}^2\} \tag{6}$$

여기서 $Q=Q^T>0$ 이다.

다음의 보조정리들은 앞으로 제시되는 주요 결과의 증명에 사용된다.

보조정리1: ϕ_i를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi_i = \left(\frac{1}{K_iQK_i^T}\right)^{1/2}\left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right) \quad , i=1,2,\cdots,m \qquad (7)$$

그러면, $x\in\Omega$ 하에서 다음이 성립한다.

$$\min[1,\phi_1]\le\phi_i \quad , i=1,2,\cdots,m$$

그리고, $\theta_i\in[0,1]$가 다음을 만족한다고 하고

$$\theta_i\le\phi_i\le 1 \quad , i=1,2,\cdots,m \qquad (8)$$

$Y=KQ$라 하면, 다음이 성립한다.

$$\theta_i^2 1_i^T YQ^{-1}Y^T 1_i \le \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right)^2 \quad , i=1,2,\cdots,m \qquad (9)$$

여기서 1_i는 n-column 벡터로서 i번째 요소만 1이고 모든 다른 요소는 0인 벡터이다.

증명: 먼저 식(6)에서 $x\in\Omega$일 때 스칼라인 K_ix의 상한(upper bound)을 구한다. $Q^{-1/2}x=y$라 하면 다음이 된다.

$$\lambda_{\max}(yy^T)=\lambda_{\max}(y^Ty)=y^Ty=x^TQ^{-1}x\le w_{\max}^2$$

그러면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\|K_ix\|^2=(K_ix)(K_ix)^T=K_ixx^TK_i^T=K_iQ^{1/2}yy^TQ^{1/2}K_i^T$$
$$\le\lambda_{\max}(yy^T)K_iQK_i^T\le K_iQK_i^Tw_{\max}^2$$

이때에 다음을 얻는다.

$$|K_ix|\le(K_iQK_i^T)^{1/2}w_{\max} \quad , i=1,2,\cdots,m \qquad (10)$$

다음은 $x\in\Omega$에 대해 ϕ_i의 바운드를 구한다. 식(2)에서 다음 두 가지의 경우를 생각한다.

경우1: $|sat_i(K_ix)|<u_i^{\lim}$

경우2: $|sat_i(K_ix)|=u_i^{\lim}$ $\quad , i=1,2,\cdots,m$

그리고 식(5)에서 다음을 얻는다.

$$\phi_i(x)=\frac{sat(K_ix)}{K_ix}=\left|\frac{sat(K_ix)}{K_ix}\right| \qquad (11)$$

경우1에서 $\phi_i(x)=1$을 얻게 되며 경우2에서는 식(10)과 식(11)을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\phi_i(x)=\left|\frac{sat(K_ix)}{K_ix}\right|$$
$$\ge\frac{|sat(K_ix)|}{(K_iP^{-1}K_i^T)^{1/2}w_{\max}}=\frac{u_i^{\lim}}{(K_iP^{-1}K_i^T)^{1/2}w_{\max}}=\phi_i$$

두 가지의 경우를 조합하고 $0<\phi_i\le 1$에 의하여 다음을 얻는다.

$$\min[1,\phi_1]\le\phi_i\le 1 \quad , i=1,2,\cdots,m$$

또한 식(9)에서 θ_i로부터 $\theta_i\le\min[1,\phi_1]$, $i=1,2,\cdots,m$가 됨을 알 수 있다. 그러므로 식(8)을 얻는다. 그리고 $K_i=1_i^TK$와 $KQK^T=YQ^{-1}Y^T$를 이용하면 식(9)로부터 식(7)은 쉽게 얻을 수 있다. ■■■

보조정리2: $S\in R^{n\times m}, T=T^T\in R^{m\times m}$ 이고 $X=\{x_{ij}\}=\{x_{ij}\in[x_{ij}^-,x_{ij}^+]\}$인 $X\in R^{n\times n}$는 interval 행렬이라 하자. X_i, $i=1,2,\cdots N$는 X의 vertex 행렬이라 가정하면 다음이 된다.

$$\begin{bmatrix} X+X^T & S \\ S^T & T\end{bmatrix}\le 0 \quad \text{if} \begin{bmatrix} X_i+X_i^T & S \\ S^T & T\end{bmatrix}\le 0 \quad , i=1,2,\cdots N$$

보조정리3: 다음의 선형 시스템을 고려할 때

$$\dot{x}=Ax+Bw \quad , w^Tw\le w_{\max}^2$$

만약 다음 식을 만족하는 $V(x)=x^TPx, P>0$와 $a>0$ 가 존재한다면

$$\frac{dv(x)}{dt}+aV-aw^Tw\le 0$$

$\Omega=\{x:x^TPx\le w_{\max}^2\}$는 reachable set이다.

증명: 위 식으로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{dv(x)}{dt}+aV\le aw^Tw\le aw_{\max}^2$$

이때에 $\frac{dv(x)}{dt}+aV=aw_{\max}^2-a(t)$을 만족하는 $a(t)\ge 0$가 존재한다. Laplace 변환을 적용하면 다음을 얻는다.

$$x^TPx=V=(1-e^{-at})w_{\max}^2-e^{-at}a(t)\le(1-e^{-at})w_{\max}^2\le w_{\max}^2$$

이것은 Ω가 reachable set임을 의미한다. ■■■

보조정리4[9]: 임의의 행렬 S와 대칭 행렬 Q,R에 대하여 다음이 만족된다면

$$R>0, \quad Q-SR^{-1}S^T>0$$

필요충분 조건으로 다음에 오는 행렬 부등식

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R\end{bmatrix}>0$$

을 만족하는 것이다.

3. 주요결과

다음의 정리1은 제어(3)을 갖는 시스템(1)에 대하여 w로부터 z까지 L_2 이득이 γ보다 크지 않음을 보장하는 제어(3)의 조건을 나타낸다.

정리1: $0<\theta_i\le 1$, $i=1,2,\cdots,m$라 가정하고 $\gamma>0$은 주어진다. 만약 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Q\in R^{n\times n}=Q^T>0$, $Y\in R^{m\times n}$와 스칼라 $a>0$가 존재한다면

1) $$\begin{bmatrix} QA^T+AQ-B_1X_iY-Y^TX_iB_1^T+aQ & B_2 \\ B_2^T & -aI\end{bmatrix}\le 0 \quad , i=1,2,\cdots,m \qquad (12)$$

2) $$\begin{bmatrix} QA^T+AQ-B_1X_iY-Y^TX_iB_1^T & QC^T & B_2 \\ CQ & -I & 0 \\ B_2^T & 0 & -\gamma^2I\end{bmatrix}\le 0 \quad , i=1,2,\cdots,m \qquad (13)$$

3) $\theta_i\le 1$일 때 $$\begin{bmatrix} \left(\frac{u_i^{\lim}}{w_{\max}}\right)^2 & \theta_i 1_i^T Y \\ \theta_i Y^T 1_i & Q\end{bmatrix}\ge 0 \ , i=1,2,\cdots,m \qquad (14)$$

제어

$$u(t)=-Kx(t) \ , \ K=YQ^{-1} \qquad (15)$$

는 γ보다 크지 않는 w로부터 z까지 L_2 이득을 보장한다.

여기서 X_i, $i=1,2,\cdots N$는 $X=\{x_{ij}\}=\{x_{ij}\in[x_{ij}^-,x_{ij}^+]\}$의 vertex 행렬이고 $i-1=0,0,\cdots,0$와 $n-i=0,0,\cdots,0$인 $1_i=[i-1,1,n-i]^T$이다.

증명: 먼저 만약 식(12)와 식(14)를 만족한다면 $w^Tw\le w_{\max}^2$를 갖는 $\forall x\in\Omega$임을 보이고 다음으로 만약 식(13)과 식(14)를 만족한다면 $x\in\Omega$일 때 주어진 γ가 L_2 이득보다 크지 않음을 보인다. 여기서 제어는 식(15)를 사용하고 식(14)는 보조정리4에 의하여 식(9)와 같음을 알 수 있다. 이와 같은 절차로 증명을 보인다.

먼저 보조정리1로부터 $x\in\Omega$일 때 제어(15)를 사용하여 만약 식(14)가 성립되면 $\theta_i\le\phi_i\le 1$, $i=1,2,\cdots,m$임을 알 수 있다. 이것을 사용하여 제어(15)를 갖는 시스템(1)에 대해 식(6)에서 Ω가 reachable set임을 보장하는 조건을 찾는다. 보조정리3으로부터 만약 다음을 만족하는 $V(x)=x^TPx, P>0$와 $a>0$가 존재한다면

$$\frac{dv(x)}{dt}+aV-aw^Tw\le 0$$

Ω는 reachable set이다.

위 식에 $P=Q^{-1}$를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$x^T[A^TQ^{-1}+Q^{-1}A-Q^{-1}B_1\Phi K-K^T\Phi B_1^TQ^{-1}+\alpha Q^{-1}]x + 2x^TQ^{-1}B_2w-\alpha w^Tw\le 0$$

위 식은 보조정리4와 $Y=KQ\in R^{n\times n}$를 이용하면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} QA^T+AQ-B_1\Phi Y-Y^T\Phi B_1^T+\alpha Q & B_2 \\ B_2^T & -\alpha I\end{bmatrix}\le 0$$

위 식은 보조정리2와 식(14) 즉, $x\in\Omega$일 때 $\theta_i\le\phi_i\le 1$를 적용하면 식(12)와 같음을 알 수 있다.

다음은 [9]로부터 만약 다음을 만족하는 2차 함수 (quadratic function) $V(\xi)=\xi^TP\xi, P>0$와 $\gamma>0$가 존재한다면 L_2 이득이 γ보다 크지 않음을 알 수 있다.

$$\frac{dv(x)}{dt}+z^Tz-\gamma^2w^Tw\le 0$$

위 식에 $P=Q^{-1}$를 이용하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$x^T[A^TQ^{-1}+Q^{-1}A-Q^{-1}B_1\Phi K-K^T\Phi B_1^TQ^{-1}+C^TC]x + 2x^TQ^{-1}B_2w-\gamma^2w^Tw\le 0$$

위 식은 보조정리 4와 $Y=KQ\in R^{n\times n}$를 이용하면 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} QA^T+AQ-B_1\Phi Y-Y^T\Phi B_1^T & QC^T & B_2 \\ CQ & -I & 0 \\ B_2^T & 0 & -\gamma^2 I\end{bmatrix}\le 0$$

위 식은 보조정리2와 식(14) 즉, $x\in\Omega$일 때 $\theta_i\le\phi_i\le 1$를 적용하면 식(13)과 같음을 알 수 있다.

■■■

Remark1: 식(12)에서 행렬 부등식은 스칼라 α일 때 선형이고 행렬 Q은 모든 매개 변수(parameter)이다. 그러나 이것은 특정한 스칼라 α에 대한 선형 행렬 부등식이다.

Remark2: 다음의 수치예제에서 보이는 것과 같이 1에서 가까운 θ_i는 더욱 포화가 일어나지 않도록 하는 제어를 만족하는 작은 제어기 이득 K_i를 갖는다. 그러나 0에서 가까운 θ_i는 더욱 포화가 일어날 수도 있도록 하는 제어를 만족하는 큰 제어기 이득 K_i를 갖는다.

Remark3: 많은 제어기들 중에 하나는 H_2 성능을 최소화하는 제어기를 선택하는 것이 하나의 방법이다.

4. 수치예제

시스템(1)에서 다음과 같은 포화 구동기를 갖는 간단한 선형 시스템을 고려한다.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -10\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix},\ C=[5\ \ 0]$$

여기서 $w_{\max}=1$로 주어진다고 가정하자. 개루프 시스템인 경우에 L_2 노옴은 $\gamma=3$이다.

다음의 두 가지 설계 문제를 고려하자.

문제1: 주어진 $\gamma=1$를 만족하는 최소의 $u^{\lim}$를 갖는 제어기를 설계한다. 모의 실험 결과에 의하여 최저 한계는 $u^{\lim}=1.45$이고 다음은 이득 K등을 구한 결과이다.

제어기 이득 K	α	θ
[5.571 0.4934]	1.1481	0.9999
[5.792 0.5170]	1.2839	0.9687
[8.778 0.7876]	0.8517	0.6191
[10.9989 0.9781]	1	0.5
[12.4792 1.1206]	0.875	0.4375
[14.2982 1.2834]	0.75	0.375

문제2: 주어진 $u^{\lim}$를 만족하는 최소의 γ를 갖는 제어기를 설계한다. 모의 실험 결과에 의하여 최저 한계는 $\gamma=1.2$이고 다음은 이득 K등을 구한 결과이다.

제어기 이득 K	α	θ
[4.1569 0.3943]	5.2683	1
[6.5360 0.6077]	1.1913	0.5845
[8.3185 0.7949]	3.3099	0.5
[16.3362 1.5392]	3.1768	0.25
[31.4116 2.9413]	1.1913	0.125

5. 결 론

이 논문에서는 외란(disturbance)으로부터 출력의 H_∞ 노옴이 주어진 값 이하 또는 같도록 하는 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계를 보였다. 일반적인 포화 특성과 그 비선형성인 포화 특성을 효과적으로 다루기 위해 곱분해 접근법(Multiplicative Decomposition Approach)을 사용하였다. 제어기는 H_∞ 이론을 바탕으로 얻어진 선형 행렬 부등식(LMI) 조건들을 만족하는 해를 구하여 얻어지며, 또한 이들 조건은 잘 알려진 MATLAB™을 이용하면 쉽게 구하여진다. 마지막으로 수치 예제를 통해 제시된 결과의 유용성을 보였다.

[참 고 문 헌]

[1] B. S. Chen and S. S. Wang, "The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator: Time domain approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 5, pp. 483-487, 1988.
[2] A. Saberi, Z. Lin, and A. R. Teel, "Control of linear systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 3, pp. 368-378, 1996.
[3] S. I. Niculescu, J. M. Dion and L. Dugard, "Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 5, pp. 742-747, 1996.
[4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
[5] P. Gahinet and P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol. 4, pp. 421-448, 1994.
[6] T. Iwasaki and R. E. Sskelton, " All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, no. 8, pp. 1307-1317, 1994.
[7] H. H. Choi and M. J. Chung, "An LMI approach to H_∞ controller design for linear time-delay systems," *Automatica*, vol. 33, no. 4, pp. 737-739, 1997.
[8] J. H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain systems with saturating actuators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 1, pp. 225-229, 1994.
[9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 1994.