1999년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 1999. 7.19-21

이산시간 강인 필터링 문제를 위한 통합 설계기법

⁰나원상†, 진승희†, 윤태성‡, 박진배†
†연세대학교 전기·컴퓨터 공학과, ‡창원대학교 전기공학과

A Unified Approach to Discrete Time Robust Filtering Problem

Ra Won-Sang†, Jin Seung-Hee†, Yoon Tae-Sung‡, Park Jin-Bae†
†Department of Electrical & Computer Engineering, Yonsei University
‡Department of Electrical Engineering, Changwon National University

Abstract

In this paper, we propose a unified method to solve the various robust filtering problem for a class of uncertain discrete time systems. Generally, to solve the robust filtering problem, we must convert the convex optimization problem with uncertainty blocks to the uncertainty free convex optimization problem. To do this, we derive the *robust matrix inequality problem*. This technique involves using constant scaling parameter which can be optimized by solving a linear matrix inequality problem. Therefore, the robust matrix inequality problem does not conservative. The robust filter can be designed by using this robust matrix inequality problem and by considering its solvability conditions.

1. 서론

지난 10여년간, 많은 학자들에 의해서 불확정 시스템에 대한 강인 필터링 기법들이 개발되어 왔다. 강인 필터의 설계 목적은 시스템에 유입될 수 있는 모든 불확실성에도 견실한 추정 성능을 보장하는 필터의 설계에 있다. 그러나 지금까지 개발된 강인 필터 설계 기법들은 특정한 필터 성능 지수 함수를 정의하고, 이를 만족하는 필터 설계에 치중되었다. 즉, 어느 한가지 강인 필터링 문제에 대해서는 나름대로 체계적인 설계 기법들을 제공할 수 있지만 성능 지수를 달리하는 여러 종류의 강인 필터링 문제에 대하여 동일한 기법을 적용할 수는 없었다.

본 논문의 목적은 성능 지수를 달리하는 다양한 종류의 강인 필터링 문제에 동일하게 적용할 수 있는 체계적이고, 실제적인 설계 기법을 개발하는 데 있다. 이를 위하여, *S-procedure*[1]를 이용하여 파라미터 불확실성이 포함되어 있는 이차 행렬 부등식을 불확실성이 포함되어 있지 않은 일반적인 형태의 행렬 부등식으로 변환하기 위한 강인 행렬 부등식 문제를 고려하였다. 강인 행렬 부등식 문제는 파라미터 불확실성을 상수 스케일링 파라미터로 대치함으로써 강인 필터링 문제를 컨벡스 최적화 문제로 변환하는 데 효과적으로 사용될 수 있다. 기존의 강인 필터 설계 기법들이 시변 파라미터 불확실성의 놈제한 조건을 이용함으로써 지나치게 완화된 조건들을 사용하게 되었던 것과 달리, 강인 행렬 부등식 문제에서는 불확실성을 대치하기 위해 도입된 상수 스케일링 파라미터도 최적화 할 수 있으므로 기존의 문제점들을 어느정도 해결 할 수 있을 것으로 생각된다.

강인 필터링 문제의 해는 주어진 불확정 시스템의 강인 안정도 조건과 성능 지수 함수를 스케일링 파라미터가 포함된 행렬 부등식 형태로 변환하고, 이 행렬 부등식을 만족하는 필터 행렬의 존재조건을 고려함으로써 구해낼 수 있다[4].

2. 강인 안정도 조건

다음과 같은 이산시간 선형 불확정 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+H_1\Delta(k)E)x(k)+Bw(k) \\ y(k) &= (C+H_2\Delta(k)E)x(k)+Dw(k) \\ z(k) &= Lx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(k)\in\mathcal{R}^n$은 상태변수, $y(k)\in\mathcal{R}^q$는 시스템 출력이고, 추정하고자 하는 상태 변수의 선형합을 $z(k)\in\mathcal{R}^r$라고 하자. 시스템을 구성하는 행렬 $A\in\mathcal{R}^{n\times n}, B\in\mathcal{R}^{n\times p}, C\in\mathcal{R}^{q\times n}, D\in\mathcal{R}^{q\times p}, H_1\in\mathcal{R}^{n\times i}, H_2\in\mathcal{R}^{q\times i}, E\in\mathcal{R}^{j\times n}, L\in\mathcal{R}^{r\times n}$는 주어진 행렬로 생각한다. 또한 외부 잡음 $w(k)\in\mathcal{R}^p$는 다음과 같은 공분산 행렬을 갖는 영평균 백색잡음이다.

$$\mathcal{E}(w(k)w(l)^T)=I \tag{2}$$

또한 시스템의 파라미터 불확실성을 표현하기 위해 도입한 놈제한 시변 불확실성 $\Delta(k)\in\mathcal{R}^{i\times j}$는 다음식을 만족한다.

$$\Delta(k)\Delta(k)^T\le I,\quad \forall k=0,1,\cdots \tag{3}$$

주어진 시스템의 강인 안정도 조건을 유도하기 전에 여러개의 선형행렬 부등식을 하나로 결합하는데 많이 사용되는 *S-procedure*를 소개하도록 한다.

보조정리 1 (*S-procedure*)[1] 행렬 $T_i=T_i^T, i=0,1,\cdots,p$ 에 대하여 조건 b는 조건 a의 충분조건이다.

a. $\zeta^T T_i\zeta\ge 0,\quad i=1,\cdots,p$를 만족하는 모든 $\zeta\ne 0$에 대하여 $\zeta^T T_0\zeta>0$이 만족된다.

b. $T_0-\sum_{i=1}^p \tau_i T_i>0$를 만족하는 $\tau_i\ge 0,\quad i=1,\cdots,p$이 존재한다.

만약, $\zeta_0^T T_1\zeta_0>0$을 만족하는 어떠한 ζ_0가 있다면, $p=1$인 경우에는 그 역도 성립된다.

■

강인 필터링 문제에 있어서 설계시 주어지는 대부분의 행렬부등식은 파라미터 불확실성을 포함하고 있으므로 이에 대한 해를 직접 구하는 것은 매우 어려운 문제이다. 따라서 강인 필터링 문제의 해를 구하기 위해서는 이 조건들을 여러가지 방법을 이용하여 불확실성이 포함되어 있지 않은 형태로 변환하여야 하는데, 본 논문에서는 위에서 소개한 *S-procedure*를 이용하여 불확실성을 포함한 이차 행렬 부등식(*QMI:Quadratic Matrix Inequalities*)을 파라미터 불확실성이 포함되어 있지 않은 형태의 행렬 부등식으로 변환하기 위한 다음 정리를 유도해내고 이를 통하여 강인 필터링 문제를 해결하기 위한 체계적 설계기법을 제시한다.

정리 1 (강인 행렬 부등식 문제(*Robust Matrix Inequality Problem*)) 파라미터 불확실성을 포함하지 않은 형태의 행렬 부등식 (5)을 만족하는 양의 스칼라 τ의 존재조건은 파라미터 불확실성 $\Delta(k)$를 포함한 이차 행렬 부등식 (4)가 만족되기 위한 필요 충분 조건이다.

$$T_1+T_2\Delta T_3+T_3^T\Delta^T T_2^T+T_2\Delta T_4\Delta^T T_2^T>0,\quad \|\Delta\|\le I \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} T_1-\tau T_2T_2^T & T_3^T \\ T_3 & T_4+\tau I\end{bmatrix}>0 \tag{5}$$

증명.

보조정리 1의 *S-procedure*를 이용하면 위의 정리를 쉽게 증명할 수 있다. 식 (5)는 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & T_4\end{bmatrix}-\tau\begin{bmatrix} T_2T_2^T & 0 \\ 0 & -I\end{bmatrix}>0 \tag{6}$$

$\zeta_0=[\eta^T\ 0]^T$라고 하면,

$$\zeta_0^T\begin{bmatrix} T_2T_2^T & 0 \\ 0 & -I\end{bmatrix}\zeta_0>0$$

이고, $p=1$인 경우이므로 보조정리 1의 조건 b와 조건 a의 상등관계로부터 다음이 성립된다. 즉,

$$\zeta^T \begin{bmatrix} T_2T_2^T & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \zeta = a^T T_2 T_2^T a - b^T b \geq 0 \tag{7}$$

을 만족하는 모든 $\zeta = [a^T b^T]^T \neq 0$에 대해 다음 행렬 부등식이 만족된다.

$$\zeta^T \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \zeta > 0 \tag{8}$$

이제 $\Delta\Delta^T \leq I$이라고 하면, 식 (7)은 $T_2^T a = \Delta^{-T} b$과 서로 상등이므로 이를 식 (8)에 대입하여 정리하면, (4)를 얻을 수 있다. 즉, 조건 (4) = 조건 (5)이다.

■

불확정 시스템에 대한 강인 필터링 문제를 구성하기 이전에, 필터 설계시 필요한 불확정 시스템의 강인 안정도 조건과 성능 지수 함수를 정리 1을 이용하여 구할 수 있다. 일반적으로 불확정 시스템의 강인 안정도에 대한 필요충분 조건을 구하는 것은 매우 어려운 문제로 알려져 있으나, 위의 결과를 이용하면 파라미터 불확실성을 포함한 불확정 시스템의 강인 안정도에 대한 필요충분 조건을 손쉽게 구할 수 있다.

정의 1 (강인 안정도)[4, 6] 다음 두 조건은 서로 상등이다.

a. *Lyapunov*관점에서 불확정 시스템

$$x(k+1) = (A + H_1\Delta E)x(k)$$

이 점근적으로 안정하다.

b. 다음 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 P가 존재한다.

$$(A + H_1\Delta E)P(A + H_1\Delta E)^T + BB^T < P \tag{9}$$

■

위의 강인 안정도에 대한 정의는 파라미터 불확실성을 포함하고 있으므로 이를 직접 필터 설계에 사용할 수 없다. 따라서 강인 필터링 문제를 다루기 위해서는 식 (9)를 앞서 소개한 *S-procedure*를 이용하여 파라미터 불확실성이 포함되어 있지 않은 형태의 강인 행렬 부등식 문제(*Robust LMI Problem*)로 바꾸어야 한다.

정리 2 (강인 안정 조건) 불확정 시스템이 *Lyapunov* 관점에서 점근적으로 안정하기 위한 필요충분 조건은 다음 행렬 부등식을 만족하는 양의 스칼라 τ의 존재조건과 같다.

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tau I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B & H \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & E^T \\ B^T & 0 \\ H^T & 0 \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

증명.

불확정 시스템에 대한 강인 안정도 조건 (9)는 다음 대응관계에 의해 강인 행렬 부등식 문제로 변환된다.

$$T_1 = P - APA^T - BB^T \quad T_2 = H_1$$
$$T_3 = -EPA^T \quad T_4 = -EPE^T$$

위의 식을 정리 1의 식 (8)에 대입하면 식 (10)을 얻을 수 있다. 즉, 불확실성을 포함한 강인 안정도 조건 (9)는 정리 2의 강인 안정 조건과 서로 상등이다.

■

이제, 불확정 시스템에 대한 성능지수 함수들, 즉 $\mathcal{H}_2$, *Generalized* $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ 성능지수 함수를 정의하고, 이 조건들을 불확실성을 포함하지 않은 행렬부등식으로 표현하도록 한다. 각 성능지수 함수는 다음 정리들을 통해 정의된다. (강인 안정도 조건에서와 마찬가지로 정리 1에 의해 쉽게 증명할 수 있으므로 별도의 설명은 생략한다.)

정리 3 (불확정 시스템의 $\mathcal{H}_2$ 성능지수) 불확정 시스템에 유입되는 외부잡음 w으로부터 시스템 출력 y로의 전달함수를 T_{yw}라고 할 때, 시스템의 $\mathcal{H}_2$ 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & minimize \parallel T_{yw} \parallel_2^2 \\ = \;& minimize\ trace((C + H_2\Delta E)P(C + H_2\Delta E)^T + DD^T) \end{aligned}$$

여기에서 P는 *Lyapunov* 부등식 (9), 다시말해 강인 안정도 조건 (10)을 만족하는 양한정 행렬이다. 위의 $\mathcal{H}_2$ 성능지수는 매개변수 Q를 도입하면 다음과 같이 불확실성이 포함되어 있지 않은 형태로 변환할 수 있다. 즉, 강인 $\mathcal{H}_2$ 성능 지수는 양의 스칼라 τ_2와 양한정 행렬 Q에 대하여 다음과 같은 컨벡스 최적화 문제로 정의된다.

$$\begin{aligned} & minimize \quad trace(Q) \\ & such\ that \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C & H_2 & D \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & E^T \\ H_2^T & 0 \\ D^T & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tau_2 I \end{bmatrix} \tag{11}$$

■

정리 4 (불확정 시스템의 *Generalized* $\mathcal{H}_2$ 성능지수) 주어진 시스템 (2)에 대한 *Generalized* $\mathcal{H}_2$ 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & minimize \parallel T_{yw} \parallel_{g2}^2 \\ = \;& minimize \sup_{w \in l_2 - \{0\}} \frac{\parallel y \parallel_{l_\infty}^2}{\parallel w \parallel_{l_2}^2} \\ = \;& minimize \\ & \lim_{k\to\infty} trace[((C + H_2\Delta E)P(C + H_2\Delta E)^T + DD^T)^k]^{1/k} \end{aligned}$$

여기에서 Ps는 강인 안정도 조건 (10)을 만족하는 양한정 행렬이다. 시스템의 *Generalized* $\mathcal{H}_2$ 놈이 양의 스칼라 γ_{g2} 보다 작다고 하면, *Generalized* $\mathcal{H}_2$ 성능 지수는 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉, 다음 행렬 부등식을 만족하는 양의 스칼라 τ_{g2}에 대하여,

$$\begin{aligned} & minimize \quad \gamma_{g2} \\ & such\ that \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C & H_2 & D \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & E^T \\ H_2^T & 0 \\ D^T & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \gamma_{g2}^2 I & 0 \\ 0 & \tau_2 I \end{bmatrix} \tag{12}$$

■

정리 5 (불확정 시스템의 $\mathcal{H}_\infty$ 성능지수) 주어진 시스템 (2)에 대한 $\mathcal{H}_\infty$ 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$minimize \parallel T_{yw} \parallel_\infty^2 = minimize \sup_{w \in l_2 - \{0\}} \frac{\parallel y \parallel^2}{\parallel w \parallel^2} \tag{13}$$

γ_∞가 양의 스칼라라고 할때, $\parallel T_{yw} \parallel_\infty^2 < \gamma_\infty^2$이고 주어진 시스템이 강인 안정하다면 다음 부등식을 만족하는 양한정 행렬 P와 양의 스칼라 τ_∞가 존재한다.

$$\begin{aligned} & minimize \quad \gamma_\infty \\ & such\ that \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A^T & C^T & E^T \\ B^T & D^T & 0 \\ H_1^T & H_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\infty I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & H_1 \\ C & D & H_2 \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\infty I \end{bmatrix} \tag{14}$$

■

3. 강인 필터링 문제

정상 상태에서의 강인 필터링 문제는 주어진 불확정 시스템에 대하여 다음과 같은 필터 구조를 가정했을때

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= G\xi(k) + Hy(k) \\ \hat{z}(k) &= J\xi(k) + Ky(k) \end{aligned} \tag{15}$$

불확정 시스템 (2)과 필터식 (15)를 결합한 오차 시스템 (16)이 점근적으로 안정하다는 가정하에, 설계시 주어지는 필터의 성능지수를 만족하는 필터 행렬을 찾아내는 것이다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= (\bar{A} + \bar{H}_1\Delta\bar{E})\bar{x}(k) + \bar{B}w(k) \\ e(k) &= (\bar{C} + \bar{H}_2\Delta\bar{E})\bar{x}(k) + \bar{D}w(k) \end{aligned} \tag{16}$$

여기에서

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} \qquad e(k) = z(k) - \hat{z}(k)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ HC & G \end{bmatrix} \qquad \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ HH_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{E} = [E \quad 0] \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ HD \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [L - KC \quad -J] \quad \bar{H}_2 = -KH_2 \qquad \bar{D} = -KD$$

일단, 필터 설계를 위한 조건들이 필터 행렬을 포함한 행렬 부등식 형태로 표현되면, 이 부등식의 해가 존재할 조건으로부터 필터 행렬 이외의 변수를 구할 수 있다. 그 다음 단계로, 구해진 변수들을 원래의 조건에 대입, 필터 행렬을 변수로 하는 기본 행렬 부등식의 해를 구함으로써 강인 필터링 문제를 해결할 수 있다.

다음 보조정리는 이차 행렬 부등식을 만족하는 해의 존재조건에 관한 정리($Elimination Lemma$)이다[3].

보조정리 2 (이차 행렬 부등식을 만족하는 해의 존재조건) Θ, Γ, Λ와 $R > 0, Q > 0$이 주어진 행렬들이라고 하자.

$$(\Theta + \Gamma F \Lambda)^T R (\Theta + \Gamma F \Lambda) < Q \tag{17}$$

그러면, 위의 이차 행렬 부등식 (17)을 만족하는 행렬 변수 F가 존재하기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같다.

$$\Lambda^{T\perp}(Q - \Theta^T R \Theta)\Lambda^{T\perp T} \;\; > \;\; 0 \tag{18}$$

$$\Gamma^{\perp}(R^{-1} - \Theta Q^{-1} \Theta^T)\Gamma^{\perp T} \;\; > \;\; 0 \tag{19}$$

■

3.1 강인 $\mathcal{H}_2$ 필터링

강인 $\mathcal{H}_2$ 필터링 문제는 불확정 시스템 (2)에 대하여 (16)에서 정의된 상태 추정 오차 $e(k)$의 분산(혹은 $\mathcal{H}_2$ 성능지수)을 최소화하는 필터 (15)를 찾아내는 것이다. 정리 2와 3에 의하여 강인 $\mathcal{H}_2$ 필터링 문제를 다음과 같은 컨벡스 최적화($convex\ optimization$)문제로 바꿀 수 있다.

$$minimize \quad trace(Q)$$
$$such \ \ that$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{H}_1 \\ \bar{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^T & \bar{E}^T \\ \bar{B}^T & 0 \\ \bar{H}_1^T & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tau I \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{H}_2 & \bar{D} \\ \bar{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}^T & \bar{E}^T \\ \bar{H}_2^T & 0 \\ \bar{D}^T & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tau_2 I \end{bmatrix} \tag{21}$$

필터 행렬을 포함한 이차 행렬부등식 (20), (21)의 해가 존재할 조건은 다음과 같다.

정리 6 (강인 $\mathcal{H}_2$ 필터의 존재조건) 다음 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 $0 < X \leq Z$와 $\tau_2 > 0, \tau > 0$의 존재조건은 강인 $\mathcal{H}_2$ 필터의 존재조건과 상등이다.

$$\begin{bmatrix} X - A^T A X - \frac{1}{\tau}E^T E & -A^T X B & -A^T X H_1 \\ * & I - B^T X B & -B^T X H_1 \\ * & * & \frac{1}{\tau}I - H_1^T H_1 \end{bmatrix} > 0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ H_2^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} Z - A^T Z A - \frac{1}{\tau}E^T E & -A^T Z B & -A^T Z H_1 \\ * & I - B^T Z B & -B^T Z H_1 \\ * & * & \frac{1}{\tau}I - H_1^T Z H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ H_2^T \end{bmatrix}^{\perp T} > 0 \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H_2^T \\ D^T \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z - \frac{1}{\tau_2}E^T E & 0 & 0 & L^T \\ * & \frac{1}{\tau_2}I & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H_2^T \\ D^T \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T > 0 \tag{24}$$

$$X - \frac{1}{\tau_2}E^T E > 0 \tag{25}$$

증명.

먼저 (20)에 보조정리2을 적용하기 위하여, 강인 안정도 조건 (10)을 만족하는 양한정 행렬 P를 다음과 같이 분해한다.

$$P = \begin{bmatrix} Y & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix},$$
$$X = Y^{-1}, \quad W = Z^{-1}$$

보조정리 2에서,

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} A^T & 0 & E^T \\ 0 & 0 & 0 \\ B_1^T & 0 & 0 \\ H_1^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ I & 0 \\ 0 & D^T \\ 0 & H_2^T \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = [0 \quad I \quad 0]$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tau I \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau I \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} G^T \\ H^T \end{bmatrix}$$

라고 하면, (18)에 의해서 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \tau I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B & H_1 \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & E^T \\ B^T & 0 \\ H_1^T & 0 \end{bmatrix} > 0 \tag{26}$$

위의 식에 $Schur\text{-}complement$를 적용하면, 식 (22)를 얻을 수 있다. 또한 식 (23)는 (19)를 적용, 정리하면 쉽게 유도된다. 마찬가지 방법으로 보조정리 2.1에서,

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} L^T & E^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ I & 0 \\ 0 & H_2^T \\ 0 & D^T \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = [-I \quad 0]$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tau_2 I \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} J^T \\ K^T \end{bmatrix}$$

라고 하면, (18), (19)에 의해서 각각 행렬 부등식 (25), (24)를 얻을 수 있다.

■

앞서 언급한 바와 같이 강인 $\mathcal{H}_2$ 필터를 구성하는 필터 행렬을 구하기 위해서는 정리 2.1의 조건, 즉 강인 $\mathcal{H}_2$ 필터의 존재조건을 만족하는 P, τ_2, τ를 구해내고, 이를 (20), (21)에 대입, 기본 선형 행렬 부등식의 해 F_1, F_2를 구하면된다. 이때 각각의 행렬 부등식들은 최근에 개발된 $Interior\text{-}point\ Algorithm$[2]을 이용하여 효과적으로 풀 수 있다.

3.2 강인 $Generalized$ $\mathcal{H}_2$ 필터링

강인 $Generalized$ $\mathcal{H}_2$ 필터링 문제[5]는 불확정 시스템 (2)에 대하여, 에너지가 제한되어 있는 외부 잡음 $w(k)$로부터 추정 오차 $e(k)$ 피크치로의 게인, 즉 $l_2 - l_\infty$ 게인을 최소화 하는 필터 (15)를 찾아내는 것이다. 따라서 오차 시스템 (16)에 정리 1.2와 1.4를 적용하여 강인 $Generalized$ $\mathcal{H}_2$ 필터문제를 컨벡스 최적화 문제로 변환하면,

$$minimize \quad \gamma_{g2}$$
$$such \ \ that$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{H}_1 \\ \bar{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^T & \bar{E}^T \\ \bar{B}^T & 0 \\ \bar{H}_1^T & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tau I \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{H}_2 & \bar{D} \\ \bar{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{g2} I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}^T & \bar{E}^T \\ \bar{H}_2^T & 0 \\ \bar{D}^T & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \gamma_{g2}^2 I & 0 \\ 0 & \tau_{g2} I \end{bmatrix} \tag{28}$$

와 같이 되고, 이때 필터 행렬을 포함한 이차 행렬 부등식 (27), (28)의 해가 존재할 조건은 다음과 같다.

정리 7 (강인 *Generalized* $\mathcal{H}_2$ 필터의 존재조건) 다음 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 $0 < X \le Z$와 $\tau_{g2} > 0$, $\tau > 0$의 존재조건은 (27), (28)을 만족하는강인 *Generalized* $\mathcal{H}_2$ 필터의 존재조건과 상등이다.

$$\begin{bmatrix} X - A^TAX - \frac{1}{\tau}E^TE & -A^TXB & -A^TXH_1 \\ * & I - B^TXB & -B^TXH_1 \\ * & * & \frac{1}{\tau}I - H_1^TH_1 \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ H_2^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} Z - A^TZA - \frac{1}{\tau}E^TE & -A^TZB & -A^TZH_1 \\ * & I - B^TZB & -B^TZH_1 \\ * & * & \frac{1}{\tau}I - H_1^TZH_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ H_2^T \end{bmatrix}^{\perp T} > 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H_2^T \\ D^T \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z - \frac{1}{\tau_2}E^TE & 0 & 0 & L^T \\ * & \frac{1}{\tau_2}I & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{g2}^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H_2^T \\ D^T \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T > 0 \quad (31)$$

$$X - \frac{1}{\tau_{g2}}E^TE > 0 \quad (32)$$

증명.

위의 정리는

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{g2}^2 I & 0 \\ 0 & \tau_2 I \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (33)$$

라고 하면, 강인 $\mathcal{H}_2$ 필터에 대한 정리 6과 동일한 방법으로 증명할 수 있다. 자세한 내용은 참고 문헌 [5]에 정리되어 있는 유사한 증명을 참고하도록 한다. 또한 위의 조건들을 만족하는 변수들을 구할 수 있다면, 필터를 구성하는 필터 행렬들도 2.1절에서와 같은 방법으로 찾아낼 수 있다. ■

3.3 강인 $\mathcal{H}_\infty$ 필터링

강인 $\mathcal{H}_\infty$ 필터링 문제는 불확정 시스템 (2)에 대하여, 에너지가 제한되어 있는 외부 잡음 $w(k)$로부터 추정 오차 $\epsilon(k)$로의 에너지 게인을 최소화하는 필터 (15)를 찾아내는 것이다. 정리 1.5를 이용하면 강인 $\mathcal{H}_\infty$ 필터링 문제를 다음 컨벡스 최적화 문제로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad \gamma_\infty \\ &\textit{such that} \\ &\begin{bmatrix} \bar{A}^T & \bar{C}^T & \bar{E}^T \\ \bar{B}^T & \bar{D}^T & 0 \\ \bar{H}_1^T & \bar{H}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\infty I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & \bar{H}_1 \\ \bar{C} & \bar{D} & \bar{H}_2 \\ \bar{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\infty I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

정리 8 (강인 $\mathcal{H}_\infty$ 필터의 존재조건) 이차 행렬 부등식 (14)를 만족하는 강인 $\mathcal{H}_\infty$ 필터가 존재하기 위한 필요충분 조건은 다음 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 $0 < W \le Y$와 스칼라 $\tau_\infty > 0$의 존재 조건과 같다.

$$\begin{bmatrix} W - A^TWA - \tau_\infty E^TE & -A^TWB & -A^TWH_1 \\ * & \gamma_\infty^2 I - B^TWB & -B^TWH_1 \\ * & * & \tau_\infty I - H_1^TWH_1 \end{bmatrix} > 0 \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} C^T \\ H_2^T \\ D^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} Y - AY^TA - L^TL - \tau_\infty E^TE & -A^TYB & -A^TYH_1 \\ * & \gamma_\infty^2 I - B^TYB & -B^TYH_1 \\ * & * & \tau_\infty I - H_1^TYH_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H_2^T \\ D^T \end{bmatrix}^{\perp T} > 0 \quad (36)$$

증명.

주어진 조건 (34)을 (17)형태로 바꾸면 다음과 같은 대응관계가 성립한다.

$$\Theta = \begin{bmatrix} A & 0 & B & H_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ C & 0 & D & H_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\infty I \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \tau_\infty I \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} G & H \\ J & K \end{bmatrix}$$

위의 행렬들을 (18), (19)에 대입하고, 정리 6에서와 마찬가지로 적절히 변환하면 식 (35), (36)을 얻을 수 있다. ■

위의 행렬 부등식으로 표현된 필터 존재조건을 만족하는 $P, \tau_\infty, \gamma_\infty$를 구하고 이를 (14)에 대입, 기본 선형 행렬 부등식의 해를 구하면 강인 $\mathcal{H}_\infty$ 필터링 문제를 해결 할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 강인 필터링 문제를 위한 통합 설계 기법을 제안하였다. 일반적으로 강인 필터링 문제를 컨벡스 최적화 문제로 변환하여 푸는 경우, 설계시 주어지는 행렬 부등식에 파라미터 불확실성이 포함되게 되므로 이를 파라미터 불확실성이 포함되지 않은 형태의 행렬 부등식으로 바꾸어야 강인 필터를 설계할 수 있다. 본 논문에서는 우선 강인 필터링 문제에서 주어지는 두 조건, 즉 파라미터 불확실성이 포함되어 있는 강인 안정도 조건과 강인 성능 지수를 강인 행렬 부등식 문제를 이용 파라미터 불확실성을 제거한 행렬 부등식으로 변환하고, 이 행렬 부등식에 대한 필터 행렬의 존재 조건을 고려함으로써 강인 필터링 문제의 해를 얻을 수 있었다. 제안된 설계 기법은 필터의 성능 지수가 다양하게 주어지는 경우에도 동일하게 사용될 수 있으므로, 이러한 의미에서 강인 필터링 문제를 해결하기 위한 통합 설계 기법이라고 할 수 있다. 또한 기존의 강인 필터 설계 기법과 달리 놈 제한 파라미터 불확실성을 최적화가 가능한 상수 스케일링 파라미터로 변환하는 방식을 취함으로써 보다 실제적인 필터 설계가 가능할 것으로 기대된다.

References

[1] S.P. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, Mathworks, Inc., 1995.

[3] K.M. Grigoriadis, and J.T. Watson JR., *"Reduced Order H_∞ and $L_2 - L_\infty$ Filtering via Linear Matrix Inequalities"*, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System, Vol. 33, No. 4, pp.1326-1338, 1997.

[4] T. Iwasaki, *A Unified Matrix Inequality Approach to Linear Control Design*, PhD Dissertation, Purdue University, 1993.

[5] W.S. Ra, S.H. Jin, T.S. Yoon, and J.B. Park, *"Suboptimal Robust Generalized $\mathcal{H}_2$ Filtering using Linear Matrix Inequalities"*, Submit to ICASE.

[6] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali, *"Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization"*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911, 1997.