

Manabe표준형을 이용한 제어기 설계에 관한 연구

강 환 일, 정 요 원

명지대 전기정보제어공학부 email:hwan@wh.myongji.ac.kr

A Study on the Design of a Controller with the Manabe Standard Form

Hwan Il Kang, Yo Won Jung

Division of the Electrical & Information Control Eng. Myongji University

Abstract - When dealing with a controller design in the two parameter configuration, there are some situations when neither a known pseudo inverse technique nor the inverse method can be applicable. In this case, we propose two methods of designing a controller by the gradient algorithm and the new pseudo inverse method such that the designed closed loop polynomial may be equal to or nearly equal to the desired closed loop polynomial. We compare the proposed methods with the known methods. We use the Manabe standard form as a desired closed loop characteristic polynomial.

1. 서 론

명세(specification)에 의하여 제어기의 계수의 일부와 원하는 페루프 다항식의 계수를 설정한 후 이를 이용하여 나머지 제어기의 계수를 결정하기 위해 계수도를 이용하여 설계할 수 있다[2,3]. 계수도란 계수의 로그값을 y축에 표시하고 그 계수와 상응한 차수는 x축에 표시하여 제어기설계에 이용할 수 있는 그래프를 의미한다. 계수도법(Coefficient diagram methods: CDM)[2,3]이란 계수도를 이용하여 제어시스템을 설계하고자 하는 방법이다. 제어기의 전체 계수가 알려지지 않을 때 pseudo inverse 방법을 이용하여 자동적으로 제어기를 설계하려는 시도는 논문[1]에서 볼 수 있다. 물론 Sylvester행렬이 정방(square)인 경우 역행렬을 이용하여 제어기의 계수를 구할 수 있다.[4,5,6] 그러나 제어기의 계수의 갯수가 페루프다항식의 차수+1보다 크면 기존의 pseudoinverse 방법[1]을 이용할 수 없다.

이 논문에서는 이 경우, 새로운 역행렬방법을 이용할 수 있음을 보인다. 또 다른방법은 경사알고리즘(Gradient algorithm)을 이용하여 반복적으로 제어기의 계수를 변화시켜 전체 페루프다항식이 원하는 페루프다항식과의 오차가 줄어 들도록 제어기를 설계하는 방법을 제시한다. 다른 기존의 방법에 의해 설계된 제어기에 의해 얻는 단위계단응답과 제어입력을 새로운 방법의 그것과 비교한다. 원하는 페루프 다항식은 Manabe가 제안한 표준형 다항식을 이용한다. 이와 관련하여 3절에서 설명한다.

2. 두변수 구성 및 기존의 제어기 설계법

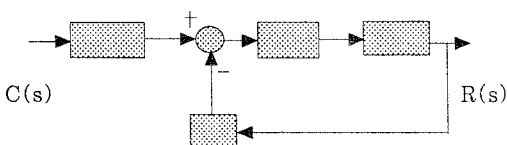


그림1: 두변수 구성 제어 시스템

두변수 구성 제어시스템은 임의의 극점과 영점을 설정할 수 있는 구조이다. 전체적인 페루프시스템의 전달함수는

$$\frac{R(s)}{C(s)} = \frac{F(s)D(s)}{A(s)C(s) + B(s)D(s)}$$

로 주어지며 주어진 플랜트는 서로 소(coprimeness)를 만족하고 진분수(strictly proper)라고 가정한다. 플랜트 다항식 $C(s) = \sum_{i=0}^m C_i s^i$, $D(s) = \sum_{i=0}^m D_i s^i$ 이며 제어기다

항식 $A(s) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i s^i$, $B(s) = \sum_{i=0}^k B_i s^i$ 이라고 가정하자.

이때 전체적인 페루프시스템의 특성방정식 $Y_d(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ 을 만족하도록 설계하고자 한다. 따라서

$$A(s)C(s) + B(s)D(s) = Y_d(s)$$

이 성립되도록 제어기의 계수를 구하기 위해

$$X_d^T W = Y_d(s)$$

로 표현하면 여기서

$$w = [A_{\ell}, A_{\ell-1}, \dots, A_0, B_k, B_{k-1}, \dots, B_0]^T;$$

$$Y_d = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_0]^T;$$

$$X_d = \begin{bmatrix} C_j & C_{j-1} & \dots & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & & & & 0 & C_j & C_{j-1} & \dots & C_0 \\ 0 & & & & D_m & \dots & D_1 & D_0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_m & D_{m-1} & \dots & D_0 \end{bmatrix}$$

이며 X_d 는 $(\ell + k + 2) \times (j + \ell + 1)$ 의 차수를 가지며 이때 $(\ell + k + 2) < (j + \ell + 1)$ 이면 다음 사실이 성립한다.

사실1(1): $X_d^T W = Y_d(s)$ 의 해로서

$W = (X_d X_d^T)^{-1} X_d Y_d$ 로 주어지며 이때 W^* 는 $\|Y_d - X_d^T W\|$ 를 최소화 한다.

또한 $(\ell + k + 2) = (j + \ell + 1)$ 인 경우 직접 역행렬을 이용하여 제어기의 계수를 구할 수 있다.

3. Manabe 표준형

원하는 페루프다항식의 특성방정식은 Manabe 표준형에서 얻도록 하는데 이 특성방정식의 특징은 만약 페

푸르다항식의 영점이 없다고 가정하면 계단응답곡선을 보면 overshoot가 발생하지 않는다는 특징이 있다. 어떤 선형 시불변 시스템의 특성방정식 $\sum_{i=0}^n a_i s^i$ ($a_n > 0$)이 주어질 때 안정지수 γ_i 를

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

로 정의한다. 다음은 안정지수를 이용한 사실을 제시한다. 사실2는 Lipatov & Sokolov[7]나 Lo[3]을 보면 쉽게 얻는다. 사실2에서 다항식의 차수는 3차 이상으로 한다.

사실 2: 특성 다항식이 좌반평면 안정할 충분조건은 모든 i 에 대하여 부등식 $\gamma_i > 1.4656$ ($i=1, 2, \dots, n-1$)이 성립하는 것이다.

정의1[2]: 2차이상의 n 차특성다항식에서 $\gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = 2$ 이고 $\tau = a_1/a_0$ 를 파라미터로 이용하면 Manabe표준형이라 한다.

설명: 다항식 $\sum_{i=0}^n a_i s^i$ 에서

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{\gamma_{i-1} \gamma_{i-2} \dots \gamma_2 \gamma_1} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

4. 새로운 결과

만약 $(l+k+2) > (j+l+1)$ 이 성립하면 제어기의 계수에 대한 해는 무수히 많으며 다음 정리를 얻는다.

보조정리1[8]: $X_d^T W = Y_d(s)$ 의 해로서 $W = X_d (X_d^T X_d)^{-1} Y_d$ 로 주어지며 이때 W 는 $\|W\|$ 를 최소화 한다.

설명: 보조정리1을 이용할 때 제어기의 계수의 갯수가 원하는 페루프다항식의 차수+1보다 큰 경우이다. 외란 제거나 감도함수의 감소에 이용할 수 있도록 하기위해 제어기의 계수의 갯수를 증가시킬 경우에 보조정리1를 이용할 수 있다.

다음정리는 X_d 의 열(column)이 클 경우나 혹은 빠른 연산을 위해 역행렬을 이용하지 않을 경우 경사알고리즘을 이용하여 제어기의 계수를 구할 수 있다.

보조정리2[8]: $X_d^T W = Y_d(s)$ 의 반복 해로서 $W^{k+1} = W^k + \alpha_k X_d e^k$ 의 형태로 표시할 수 있고 $e^k = Y_d - X_d^T W^k$ 가 되며 이 경우 k 가 증가할수록 $\|Y_d - X_d^T W^k\|^2$ 의 값이 감소한다.

이제 보조정리2또는 보조정리3을 이용하여 제어기를 설계하는 알고리즘을 제시한다.

설계알고리즘: 단계1: 설계하고자 하는 시스템의 단위계단응답특성에서 overshoot를 요구하는 경우 안정지수를 조정하여 overshoot가 나타나는 안정지수를 이용하여 페루프다항식 계수를 선정한다. 만약 단위계단응답 특성에서 overshoot가 없는 경우에는 Manabe표준형을 이용하여 페루프다항식을 구성한다. 단계2: 명세에서 주어진 정착시간(settling time)을 고려하여 정착시간을 $2.5 \sim 3\tau$ 로 설정하는데 페루프 다항식이 영점을 가지고 있는 경우는 τ 를 더 작게 설정할 수 있다. 단계3: 보조정리1또는 보조정리2을 이용하여 제어기를 구성한 후 페루프 시스템의 단위계단응답특성을 조사한다. 이때 두 변수 구성 제어 시스템의 $F(s)$ 를 조정하여 정상상태 오차를 조절할 수 있고 영점을 임의로 배치할 수 있다. 보조정리2를 이용할 때 제어기의 초기치를 잘 선정하여 보조정리2가 수렴해 를 갖도록 하며 반복적으로 페루프 시스템의 단위계단응답특성을 조사하여 원하는 특성을 갖추면 멈춘다. 이때 τ 를 조정하여 원하는 정착시간을

같도록 설계한다.

5. Manabe표준형을 이용한 제어기결정방법의 예

보기1: 두변수구성시스템에서 플랜트

$$\frac{D(s)}{C(s)} = \frac{0.1s+1}{s(0.25s^2+1.25s+1)}$$

가 주어지고 98% 정착시간을 3.3 sec 이하로 유지하도록 제어기를 설계하도록 하고 $F(s)=1$ 로 가정한다. 그리고 제어기의 분모분자가 각각 3차가 되도록 설계한다. 또한 제어기의 형태를 2차/3차 와 1차/3차로 구성하여 위의 경우와 비교한다.

결론적으로 정착시간을 표1에서 보면 보조정리2의 경우 3.4sec로 나타난다. 따라서 $\tau=2.66667$ 에서 $\tau=2.3430$ 으로 줄어 정착시간이 2.8sec로 되어 명세를 만족시킬 수 있었다. 보조정리1를 사용하면 정착시간(2.5sec)이 명세를 만족한다. 그림2a-e는 단위계단응답과 플랜트의 제어입력을 여러방법에 따라 표시하였다. (그림2a-e참조)

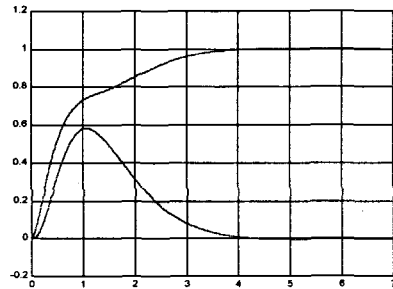


그림2-a :보조정리2를 이용하여 500번 반복한후의 계단 응답 특성: $\tau=2.66667$, 98% $T_s=3.4sec$

$$C(s) = \frac{0.4144s^3 + 1.143s^2 + 1.7155s + 1}{0.005s^3 + 0.1932s^2 + 0.4659s + 0.8512}$$

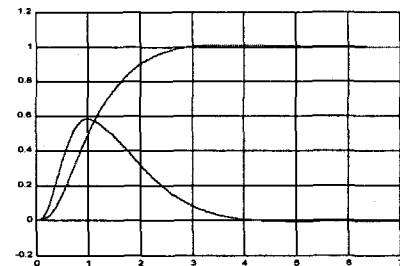


그림2-b. 역행렬을 이용한 2차/3차 제어기에 의한 계단응답특성: $\tau=2.66667$, 98% $T_s=2.6sec$

$$C(s) = \frac{0.4962s^2 + 1.4796s + 1}{0.0144s^3 + 0.1438s^2 + 0.8415s + 1.0871}$$

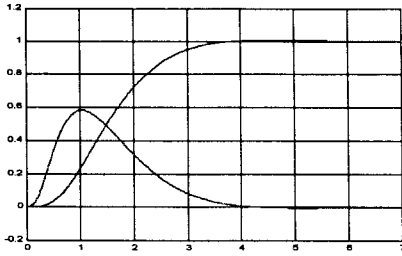


그림2-c. 의역행렬을 이용한 1차/3차 제어기에 의한 계단응답특성; $\tau = 2.66667, 98\%$ $T_s = 3.4\text{sec}$

$$C(s) = \frac{0.9846s + 1}{0.0111s^3 + 0.161s^2 + 0.7684s + 1.5821}$$

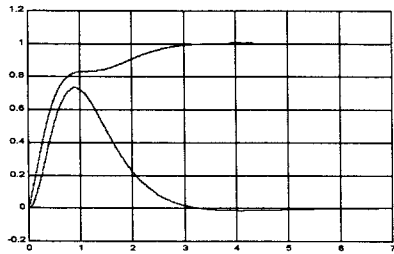


그림2-d: 보조정리2를 이용하여 500번 반복한 후의 계단 응답 특성: $\tau = 2.3430, 98\%$ $T_s = 2.8\text{sec}$

$$C(s) = \frac{0.34255s^3 + 1.0149s^2 + 1.6321s + 1}{5.1259e - 6s^3 + 0.11456s^2 + 0.25413s + 0.61091}$$

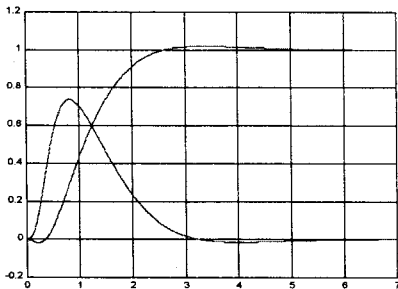


그림2-e: 보조정리1를 이용한 제어기설계: $\tau = 2.3430, 98\%$ $T_s = 2.5\text{sec}$

$$C(s) = \frac{-0.0413s^3 + 0.0958s^2 + 1.0945s + 1}{0.0066s^3 + 0.0799s^2 + 0.555s + 1.1485}$$

6. 결론

두 변수 구조를 갖는 제어시스템에서 제어기의 계수 설계시 Sylvester 행렬이 정방(square)이 아니고 기존의 의역행렬 (pseudo inverse)방법[1]으로 해결할 수 없는 경우 새로운 의역행렬방법과 경사알고리즘을 이

용하여 제어기 계수를 설계하여 기존의 방법과 비교하여 이 방법들의 유용성을 보였다. 원하는 페루프 다항식은 Manabe 표준형을 선택하였다.

표1: 제어기설계의 여러방법의 비교

제어기의 종류	방법	τ	98%정착시간	참조
3차/3차	보조정리2	2.6667	3.4sec	그림2-a
2차/3차	역행렬	2.6667	2.6sec	그림2-b
1차/3차	의역행렬	2.6667	3.4sec	그림2-c
3차/3차	보조정리2	2.3430	2.8sec	그림2-d
3차/3차	보조정리1	2.3430	2.5sec	그림2-e

참고문헌

- [1] 허명준, 고종문 "고차플랜트를 위한 CDM," pp. 792-794, Korea Automatic Control Conference, Pusan, 1998.
- [2] S. Manabe, "Coefficient Diagram method," 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, pp. 199-210, August, 1998.
- [3] Lo Jason, *An algebraic approach to control system design*, M.S. thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1996.
- [4] 김영철, 김한실, 허명준, 주성준, 강환일, "계수도법: 개설," pp. 772-775, Korea Automatic Control Conference, Pusan, 1998.
- [5] 이은호, 김영철, "비교적 접근방식에 의한 계수도법의 강인성 해석," pp. 776-779, Korea Automatic Control Conference, Pusan, 1998.
- [6] 정계운, 김한실, "CDM을 이용한 역진자 제어기설계," pp. 788-791, Korea Automatic Control Conference, Pusan, 1998.
- [7] A. V. Lipatov & N. I. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems", *Avtomatika I Telemekhanika*, no. 9, pp. 30-37, 1978.
- [8] E. K. P. Chong & S. H. Zak, "An introduction to Optimization", p. 177-179, p. 198, John Wiley & Sons, 1996.

본 연구는 과학기술부 특정연구개발사업과제 연구비에 의해 연구되었습니다. (과제제목: 고정밀 산업용 강인제어 설계 기술 개발, 연구기간: 97년9월-2000년8월, 과제번호: 97-I-01-03-A-101)