

상태궤환행렬을 이용한 안정한 Fuzzy 제어기의 설계

최승규*, 흥대승, 고재호, 유창완, 임희영
광운대학교 제어계측공학과

Design of The Stable Fuzzy Controller Using State Feedback Matrix

Seung-Gyu Choi*, Dae-Seung Hong, Jae-Ho Ko, Chang-Wan Ryu, Wha-Yeong Yim
Dept. of Control and Instrumentation Eng. Kwangwoon Univ.

Abstract - Fuzzy Systems which are based on membership functions and rules, can control nonlinear, uncertain, complex systems well. However, Fuzzy logic controller(FLC) has problems; It is difficult to design the stable FLC and FLC depends mainly on individual experience. Although FLC can be designed using the error back-propagation algorithm, it takes long time to converge into global, optimal parameters. Well-developed linear system theory should not be replaced by FLC, but instead, it should be suitably used with FLC. A new methodology is introduced for designing THEN-PART membership functions of FLC based on its well-tuned state feedback controller. A example of inverted pendulum is given for demonstration of the robustness of proposed methodology.

1. 서 론

퍼지 제어시스템은 소속함수와 규칙을 기반으로 비선형성이 강하고 불확실하며 복잡한 시스템을 쉽게 제어할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 퍼지 제어기 설계시 다음과 같은 문제점들에 봉착하게 된다.

(1) 개인적인 경험에 의존하므로 성능상에 문제점의 우려가 있고.^[4]

(2) 설계상에 명백한 이론적 배경이 없으므로 전체 시스템을 안정화시키는 다수의 파라미터를 설정하기 어려우며.^[4]

(3) 역전파 알고리즘을 적용하더라도 글로벌한 최적의 파라미터로의 수렴에는 장시간이 걸리는 단점을 가지고 있다. 그러므로 비교적 정확하며 손쉽게 안정한 퍼지 제어기를 설계할 수 있는 방법이 요구된다.

퍼지 제어기의 안정도 판단이나 기준들의 연구가 계속되어져 왔다.^{[4], [5], [6], [7]} 이러한 연구들 중 특히 [6]은 잘 조정된 선형의 대응부(counterpart)를 기초로 하여 퍼지 제어시스템을 설계하고, 조정하는 방법을 제시하고 있다. 이처럼 선형의 시스템이론이 퍼지 제어시스템에 대처될 수는 없지만 적당히 적용될 수는 있다.^[4] 본 논문에서는 앞에서 제시한 퍼지제어기 설계상의 문제점을 해소할 수 있는 새로운 방법을 제시하자 한다. 선형의 대응부를 안정하게 하는 상태궤환행렬을 구한 후 이 상태궤환행렬을 이용하여 각각의 규칙에 합당한 결론부 파라미터를 설정하는데 이용을 하였다.

2. 본 론

퍼지 제어기를 설계하는데 있어서 제어대상의 수학적 모델이 꼭 필요한 것은 아니지만 성능기준을 보증하기 위해서라도 모델링은 필요하다. 모델링식이 도출되면, 그것의 선형 시스템의 플랜트 파라미터 A, B, C 값을 알 아낼 수 있고, 그런 파라미터들로부터 시스템을 안정하게 하는 상태궤환 제어기의 이득행렬 K 를 구할 수 있다. 이러한 선형의 대응부를 안정하게 하는 상태궤환 이득행렬로부터 퍼지 제어기의 결론부 파라미터를 결정하는 새로운 방법을 제안한다. 이해를 돋고자 먼저 상

태이득행렬에 대하여 언급한다.

2.1 상태 궤환 행렬

다음의 선형시불변 동적 식을 생각하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 여기서 x 는 $n \times 1$ 상태벡터, u 는 스칼라 제어입력, y 는 스칼라 출력, A 는 $n \times n$ 실상수 열 벡터, C 는 $1 \times n$ 실 상수 행 벡터이다. (그림 1)과 같이 상태궤환에서 모든 상태변수는 이득에 의해 곱해지고, 입력측으로 계환된다. i 번째 상태변수와 입력과의 이득을 k_i 라고 하면 K 는 다음과 같이 정의된다.

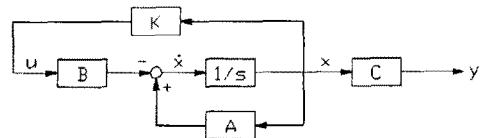


그림 1. 상태궤환 시스템

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \quad (2)$$

위의 (1)의 시스템이 제어가능하고, 고유값의 집합이 $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3, \dots, \overline{\lambda}_n$ 이라면 행렬 $(A - BK)$ 가 그것의 고유값의 집합으로서 $\{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3, \dots, \overline{\lambda}_n\}$ 을 갖게 하는 실 벡터 K ($1 \times n$)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Step 1. } & (s - \overline{\lambda}_1)(s - \overline{\lambda}_2) \cdots (s - \overline{\lambda}_1) \\ & = s^n + \overline{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \overline{a}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Step 2. } & \det(sI - A + BK) \\ & = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

$$\text{Step 3. } \overline{a}_1 = a_1, \overline{a}_2 = a_2, \dots, \overline{a}_n = a_n \text{을 만족하게 하는 } K$$

2.2 상태 궤환 행렬을 이용한 퍼지제어기의 설계

입력에 대한 소속함수로는 complete하고, normal하며, consistent한 삼각함수를 구간 $[a_i, b_i]$ 에서 정의하였다. 예로서 간단한 2차계의 퍼지 시스템을 고려한다면 $i=1, 2$ 인 그림 2와 같이 퍼지 집합을 표현할 수 있다. 그러면, 각각의 상태의 소속정도를 나타내는 소속함수의 값은

$$\mu_{A_i}(x_i) = \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2) \quad (3)$$

$$\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}) \quad (4)$$

여기서, $j = 2, 3, \dots, N_i - 1$

$$\mu_{A_i^N}(x_i) = \mu_{A_i^N}(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i+1}) \quad (5)$$

과 같이 정의된다^[1]. 위의 식 (3), (4), (5)는 상태의

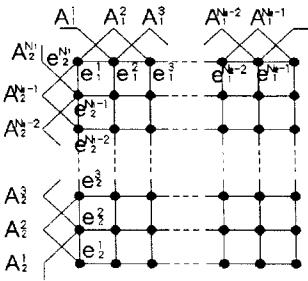


그림 2. 퍼지 집합의 예

입력에 대한 소속정도를 나타내는 소속함수 값을 나타내며, 여기서 e_i^j 는 함수들의 중심값이고, 다음의 조건을 만족한다.

$$a_i = e_i^1 \cdot e_i^2 \cdot \dots \cdot e_i^{N_i} = \beta_i \quad (6)$$

위와 같이 정의한 소속함수에 대한 $M (M=N_1 \times N_2)$ 개에 해당하는 퍼지규칙은 다음과 같은 구조를 갖는다.

$$Ru^{i_1 i_2} : \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^{i_1} \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^{i_2} \text{ THEN } y \text{ is } B^{i_1 i_2} \quad (7)$$

여기서, $i_1 = 1, 2, \dots, N_1$, $i_2 = 1, 2, \dots, N_2$ 이

고, 퍼지집합 $B^{i_1 i_2}$ 를 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 라고 나타내면 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 와 입력 측의 소속함수의 파라미터와의 관계는 다음과 같다.

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) \quad (8)$$

예를 들어 위의 그림 2의 예라면 $M (M=N_1 \times N_2)$ 개에 해당하는 점은 점에서 어립한 $g(x)$ 와 $B^{i_1 i_2}$ 의 중심값은 동일한 것이다. 그림 2의 퍼지 제어기의 출력값은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} (\mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2))}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (\mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2))} \quad (9)$$

기존의 퍼지제어 설계기법에서는 시스템 전문가적 견지에서 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 를 결정하였고, 학습의 과정을 통하여 입력의 소속함수의 파라미터 뿐만 아니라 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 값을 오차를 줄이는 방향으로 변경하게 된다. 하지만 서론에서 언급한 것과 같이 기존의 방법은 여러 가지의 난점들을 가지고 있는 것이 사실이다. 따라서 본 논문에서는 2.1절의 시스템을 안정하게 하는 상태궤환 행렬의 이득들인 k ,를 이용하여 결론부에 해당하는 파라미터들 M 개를 다음과 같은 방법으로 결정할 것을 제안한다.

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$$

$$= K [e_1^{i_1} \ e_2^{i_2}]^T = k_1 e_1^{i_1} + k_2 e_2^{i_2} \quad (10)$$

위와 같이 제안된 퍼지 제어기를 설계방법을 고려하여 다수의 규칙으로 구성된 하나의 퍼지제어기로 설계할 것을 소수의 규칙으로 구성된 2개의 퍼지제어기로 분리하여 설계가 가능하므로(2.3절 참조) 다음과 같은 바람직한 효과를 기대 할 수 있다.

첫째, 상태공간적 해석이 가능하다는 것이다. 앞에서 설명한 바와 같이 시스템의 저차화가 가능하므로 상태공간적 해석으로 더 강건한 시스템을 설계할 수 있다.^[2] 둘째, 규칙의 수가 상당히 감소된다는 것이다. 예를 들어서 도립진자의 경우 4가지 상태입력에 대한 소속함수 가 각각 N 개라고 가정할 때 만약 위와 같은 제안된 퍼지 제어기 설계방법을 이용하여 각도에 관한 퍼지 제어기와 위치에 대한 퍼지 제어기로 나누면 하나의 제어기로 구성할 때 보다 $N^2(N^2-2)$ 만큼의 규칙의 수가 줄어드는 효과가 나타나게 된다.

$g(x)$ 즉, 결론부의 소속함수의 중심값을 결정짓는 일은 안정한 퍼지 시스템을 설계하는 가장 중요한 것 중 하나이다. 이러한 결론부 파라미터를 전문가적 견지나

역전파 알고리즘에 의존하는 것이 아니라, 명확한 이론적 배경에 의하여 정하기 때문에 좀더 안정한 퍼지 제어기를 위와 같이 쉽게 설계 할 수 있다. 다음의 예를 통하여 이상과 같은 퍼지 제어기 설계방법의 타당성을 확인한다.

2.3 도립 진자에의 적용

제어기의 성능판단에 가장 많이 이용되는 비선형적인 플랜트인 도립진자에 이상에서 기술한 퍼지 제어기 설계 방법을 다음과 같이 적용하였다.

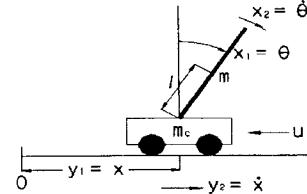


그림 3. 도립진자 시스템

위의 그림 3과 같은 도립진자 시스템의 모델링 수식을 상태 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{m_l x_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{m_c + m}}{l(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m})} - \frac{\frac{\cos x_1}{m_c + m}}{l(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m})} \cdot u$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \frac{m_l x_2^2 \sin x_1 - m_l \dot{x}_2 \cos x_1}{m_c + m} + \frac{1}{m_c + m} \cdot u$$

여기서 x_1 은 진자의 각도, x_2 는 진자의 각속도, y_1 은 cart의 기준으로부터의 위치, y_2 는 cart의 속도를 나타내는 상태변수이다. 위의 상태방정식을 리아프노프 선형화^[3]를 거친 후 상태 방정식을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g(m_c+m)}{m_c l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{m_c} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_c l} \\ 0 \\ \frac{1}{m_c} \end{bmatrix} u \quad (11)$$

X 및 \dot{X} 은 $X = [x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2]^T$, $\dot{X} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{y}_1 \ \dot{y}_2]^T$ 이다.

예로서, 식(11)에 시스템 파라미터 g (중력가속도) = 9.8 m/s^2 , l (진자의 조인트로부터 무게 중심간 거리) = 0.3 m , m_c (cart의 질량) = 0.186 kg , m (진자의 질량) = 0.127 kg 를 대입 한 후 퍼지 제어기를 설계하기 이전에 상태궤환 시스템의 극점을 $-30, -5, -2+2j, -2-2j$ 에 위치시키는데 필요한 K 를 구하면 다음과 같다.

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

$$\cong [-21.75 \ -3.68 \ -6.83 \ -5.01] \quad (12)$$

이제부터 상태 궤환 행렬 이득을 이용한 퍼지 제어기

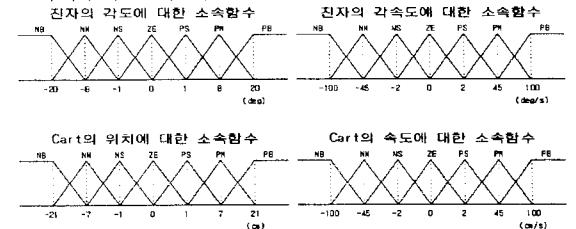


그림 4. 네가지 상태입력에 대한 소속함수

를 설계하겠다. 먼저 네가지 상태입력에 대한 소속함수를 그림 4와 같이 정의한다.

퍼지 제어기는 다수의 규칙을 가진 하나의 제어기로 설계하지 않고, 그림 5와 같이 소수의 규칙을 가진 2개의 제어기 즉, 진자의 각도에 대한 퍼지제어기(이하 각도 퍼지제어기)와 cart의 위치에 대한 퍼지제어기(이하 위치 퍼지제어기)로 구성되고, 각각의 퍼지제어기는 49개의 규칙을 갖도록 설계를 하였다.

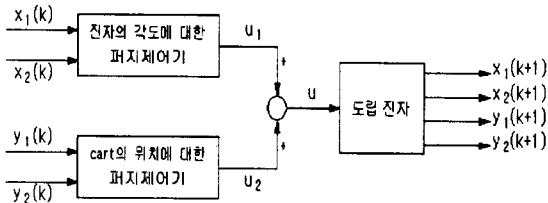


그림 5. 퍼지 제어기의 블럭도

이제부터 제안한 퍼지제어기 설계의 마무리이자 중요한 단계인 규칙의 결론부 파라미터를 정하도록 하겠다. E_1 을 각도에 대한 소속함수의, E_2 를 각속도에 대한 소속함수의, E_3 를 위치에 대한 소속함수의, E_4 를 각속도에 대한 소속함수의 각각의 중심값의 행렬이라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_1 = [-20 \ -8 \ -1 \ 0 \ 1 \ 8 \ 20]$$

$$E_2 = [-100 \ -45 \ -10 \ 0 \ 10 \ 45 \ 100]$$

$$E_3 = [-21 \ -7 \ -1 \ 0 \ 1 \ 7 \ 21]$$

$$E_4 = [-100 \ -45 \ -2 \ 0 \ 2 \ 45 \ 100]$$

각도 퍼지제어기의 규칙의 결론부 파라미터의 행렬을 \bar{Y}_X , 위치 퍼지제어기의 규칙의 결론부 파라미터를 \bar{Y}_Y 라고 하면 \bar{Y}_X , \bar{Y}_Y 는 다음과 같이 표현 가능하고,

$$\bar{Y}_X = [\bar{y}_x^{-11} \ \bar{y}_x^{-12} \ \dots \ \bar{y}_x^{-17} \ \bar{y}_x^{-21} \ \dots \ \bar{y}_x^{-n}]$$

$$\bar{Y}_Y = [\bar{y}_y^{-11} \ \bar{y}_y^{-12} \ \dots \ \bar{y}_y^{-17} \ \bar{y}_y^{-21} \ \dots \ \bar{y}_y^{-n}]$$

각각의 원소들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{y}_x^{ij} = k_1 e_1^i + k_2 e_2^j, \quad \bar{y}_y^{ij} = k_3 e_3^i + k_4 e_4^j \quad (13)$$

$$(i=1,2,\dots,7, \ j=1,2,\dots,7)$$

여기서, $e_1^i \in E_1$, $e_2^i \in E_2$, $e_3^i \in E_3$, $e_4^i \in E_4$ 이고, k_1, k_2, k_3, k_4 는 식(12)에서 구한 상태궤환행렬의 원소.

위와같이 퍼지 제어기를 설계하여 이를 두가지의 초기 상태 $(x_1(0), x_2(0), y_1(0), y_2(0)) = (-10^\circ, 0, 5cm, 0)$,

$(-15^\circ, 0, -10cm, 0)$ 에 대해 시뮬레이션을 시행하였다. 그림6은 식(12)에서 구한 상태궤환 제어기를 이용하여 그림3의 도립진자가 각각의 초기상태에 대해 잘 제어됨을 보여주는 그림이다. 그림 7은 본 논문에서 제안한 퍼지제어기가 상태궤환 제어기와 마찬가지로 도립진자를 잘 제어함을 보여주는 그림이다. 궤적의 약간의 차이점만 있을 뿐 상태궤환 제어기와 대동소이함을 볼 수 있다.

그림 8은 제어기의 강인성을 비교 평가하고자 시스템의 파라미터중 진자의 길이와 질량을 모두 이전보다 5.5배 줄였을 때의 상태궤환 제어기와 제안된 퍼지제어기에 의한 도립진자의 각도를 나타낸 시뮬레이션 결과이다. 상태궤환 제어기는 각도, 거리 모두 발산하는 반면, 이것을 이용한 퍼지제어기는 진자의 각도의 경우 $\pm 1.3(\text{deg})$ 정도로 진동함을 볼 수 있고, 본 논문에 나타내지는 않았으나 거리의 경우 $\pm 0.5(\text{cm})$ 내로 제어 되었다. 이것으로부터 상태궤환 행렬을 이용한 퍼지제어기가 상태궤환 제어기보다 더 강건함을 알 수 있다.

——: 초기상태 $(-10^\circ, 0, 5cm, 0)$

——: 초기상태 $(15^\circ, 0, -10cm, 0)$

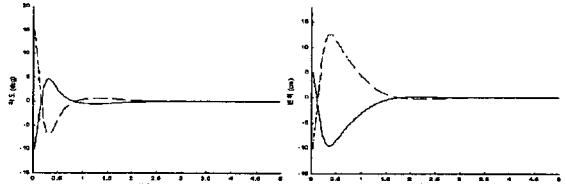


그림 6. 상태궤환 제어기를 이용한 도립진자 제어
진자의 각도 cart의 위치

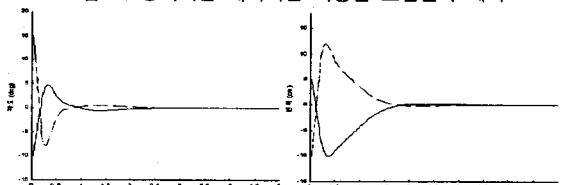


그림 7. 제안한 퍼지 제어기를 이용한 도립진자 제어
진자의 각도 cart의 위치

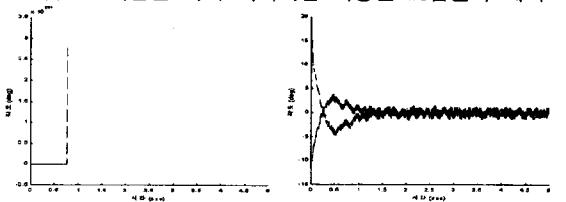


그림 8. 진자의 길이와 질량을 모두 5.5배 줄였을 때 퍼지 제어기와 상태궤환 제어기의 진자의 각도

3. 결 론

이상에서 본 바와 같이 선형의 대응부를 안정하게 하는 상태궤환이득을 이용하여 결론부 파라미터를 결정함으로써 기존의 퍼지 설계기법보다 간단하고, 안정한 제어기를 쉽게 설계할 수 있으며, 성능은 선형의 대응부보다 더 강건함을 알 수 있다. 또한 개인적인 경험에 따른 의존을 하지 않고, 타당한 이론적 배경에 의해 설계하므로 기존의 퍼지제어기 설계상의 문제점을 해소할 수 있다고 생각한다.

(참 고 문 헌)

- [1] Li-Xing Wang, "A Course In Fuzzy Systems & Control", Prentice Hall PTR Prntice-Hall Inc., 1997
- [2] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, "An Introduction To Fuzzy Control", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996
- [3] J. J. Slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall Inc., 1991
- [4] G. Feng, S. G. Cao, N. W. Rees, "Design of Fuzzy Control Systems with Guaranteed Stability", Fuzzy Sets & Systems, no. 85, 1-10, 1997
- [5] Javier Aracil, Anibal Ollero, Alfonso Garcia-Cerezo, "Stability Indices for the Global Analysis of Expert Control Systems", IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern., Vol. 19, no. 5, 998-1007, 1987
- [6] Han-Xiong Li, "A Comparative Design and Tuning for conventional Fuzzy Control", IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern. PART B: Cybern., Vol. 27, no. 5, 884-889, 1997
- [7] K. C. Sio, C. K. Lee, "Stability of Fuzzy PID Controllers", IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern. PART A: Sys., Vol. 28, no. 4, 490-495, 1998