

퍼지 모델을 위한 동적 상태 피드백 제어기 설계

장욱*, 주영훈**, 박진배*

* 연세대학교 전기 컴퓨터 공학과, ** 군산대 제어 계측 공학과

Dynamic State Feedback Controller Synthesis for Fuzzy Models

Wook Chang*, Young Hoon Joo**, Jin Bae Park*

* Dept. of Electrical & Computer Eng., Yonsei Univ., Seodaemoonku, Seoul 120-749, KOREA
Tel: +82-2-361-2773; Fax: +82-2-392-4230; E-MAIL: jbpark@control.yonsei.ac.kr

** Dept. of Control & Instrumentation Eng., Kunsan Univ., Kunsan, Chonbuk 573-701, KOREA
Tel: +82-654-469-4706; Fax: +82-654-466-2086; E-MAIL: yhjoo@ks.kunsan.ac.kr

Abstract : This paper addresses the analysis and design of fuzzy control systems for a class of complex single input single output nonlinear systems. Firstly, the nonlinear system is represented by well-known Takagai-Sugeno (TS) fuzzy model and the global controller is constructed by compensating each linear model in the rule of TS fuzzy model. The design of conventional TS fuzzy-model-based controller usually is composed of two processes. One is to determine static state feedback gain of each local model and the other is to validate the stability of the designed fuzzy controller. In this paper, we propose an alternative of the design of TS fuzzy-model-based controller. The design scheme is based on the extension of conventional optimal control theory to the design of TS fuzzy-model-based controller. By using the proposed method the design and stability analysis of the TS fuzzy model-based controller is reduced to the problem of finding the solution of a set of algebraic Riccati equations. And we use the recently developed interior point method to find the solution of AREs, where AREs are recast as the LMI formulation. One simulation example is given to show the effectiveness and feasibility of the proposed fuzzy controller design method.

1. 서론

현대 제어 이론은 정확한 수학적인 모델을 다루는 데 있어서 매우 성공적인 결과를 보여왔다. 그러나 제어 대상 시스템이 수학적으로 모델링하기 어렵거나 강한 비선형성을 보이는 경우, 외부 환경이 불확실한 경우에 기존 제어 방법으로 원하는 제어 성능을 얻는 것은 매우 어려운 일이다. 이에 반해 퍼지 제어기는 앞서와 같은 상황에서 기존 제어기에 비해 우수한 성능을 보인다 [1]. 최초의 퍼지 제어기는 Mamdani에 의해 제안된 것으로 전문가의 경험을 퍼지 논리를 이용하여 언어 규칙으로 표현하고 이와 같이 이루어진 규칙들로 제어기를 구성하기 때문에 제어 대상 플랜트의 정확한 수학적인 모델을 알지 못한다 하더라도 좋은 결과를 얻을 수 있고 강인한 성질을 지니고 있으며 그 구현도 간단하다. 최근에 Takagi 와 Sugeno에 의해 제안된 Takagi - Sugeno (TS) 퍼지 모델을 이용한 제어 방법은 비선형 시스템을 여러 운영 점에서 선형 시스템으로 만들고 이들을 퍼지 추론을 이용하여 연결해 대상 비선형 시스템을 표현한다. 이러한 TS 퍼지 모델에 기반한 제어 방법은 앞서 언급한 퍼지 제어기의 장점과 기존 제어 방법의 엄밀한 수학적 성능 및 안정성 증명이 가능함으로써 최근 많은 연구가 이루어지고 있다. 제어 시스템의 성능을 평가하는데 가장 중요한 것은

시스템의 안정성이다. TS 퍼지 모델 기반 제어기는 통상 PDC의 형태로 퍼지 모델의 각 선형 시스템을 안정화하는 제어기를 설계하고 공통 리아프노프 행렬을 구해 전체 시스템의 안정성을 증명한다. 본 논문에서는 최적 제어 방법을 사용해 시스템의 설계 및 안정성을 동시에 해결한다. 제안된 방법을 도립 전자 시스템에 적용하여 그 효용성을 보인다.

2. 퍼지 모델 기반 제어기

식 (1)과 같은 단일 입력 단일 출력 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

여기서 스칼라 x 는 출력, 스칼라 u 는 제어 입력, $x = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T$ 는 상태 벡터이다. 식 (1)에서 비선형 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 정확히 알려진 x 의 연속 함수이다. 식 (1)의 비선형 시스템은 식 (2)와 같은 TS 퍼지 모델로 표현 가능하다.

Plant Rule i :

$$\text{IF } x(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)}(t) \text{ is } F_n^i \tag{2}$$

$$\text{THEN } \dot{x}(t) = \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t) \quad (i = 1, 2, q)$$

여기서 Rule i 는 i 번째 퍼지 추론 규칙, F_j^i ($j = 1, 2, \dots, n$)는 퍼지 집합, $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수 벡터, $u(t) \in R^1$ 는 제어 입력, $\mathbf{A}_i \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in R^{n \times 1}$, q 는 퍼지 IF-THEN 규칙의 수이다. 원 비선형 시스템 (1)의 TS 퍼지 모델을 이용한 제어기는 다음과 같은 병렬 분산 제어기 (PDC; Parallel Distributed Compensator)를 사용한다.

Controller Rule i :

$$\text{IF } x(t) \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)}(t) \text{ is } F_n^i \tag{3}$$

$$\text{THEN } u = -\mathbf{K}_i x \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

여기서 $\mathbf{K}_i = [k_1^i, \dots, k_n^i]$ 는 피드백 이득 벡터이다. 전체 페루프 퍼지 시스템의 해석적인 수식은 식 (4)와 같다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^q \mu_i \mu_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) x \tag{4}$$

페루프 시스템 (4)에 대한 안정성 분석은 []에 자세히 보여진다.

3. LMI를 이용한 퍼지 제어기의 최적 설계

본 절에서는 LMI 기법을 사용하여 TS 퍼지 모델을 최적 제어하는 기법을 제안한다. 먼저 bounded real lemma를 다음에 보인다.

정리 1. (Bounded real lemma) 주어진 전달 함수 $G(\sigma)$ 에 대해 다음 두 문장은 등가이다.

1. A 는 안정하고 $\|D + C(\sigma I - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$
2. 다음의 행렬 부등식을 만족하는 해 x 가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

기본적인 최적화 문제는 식 (6)과 같은 성능 지수를 최소화하는 것이다.

$$V = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(T) M x(T) \quad (6)$$

여기서 퍼지 시스템 (2)는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^q \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ &= A(\mu(x(t)))x(t) + B(\mu(x(t)))u(t) \end{aligned} \quad (7)$$

성능 지수 (6)을 최소화하는 제어 입력은 식 (8)과 같은 ARE를 풀어 얻을 수 있으며 그 제어 입력은 식 (9)와 같다.

$$A(\mu(x(t)))^T P + PA(\mu(x(t))) + Q - PB(\mu(x(t)))R^{-1}B(\mu(x(t)))^T P = 0 \quad (8)$$

식 (8)은 bounded real lemma에 의해 다시 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &A(\mu(x(t)))^T P + PA(\mu(x(t))) + Q \\ &- PB(\mu(x(t)))R^{-1}B(\mu(x(t)))^T P < 0 \\ &\sum_i \mu_i(x(t)) A_i^T P + P \sum_i \mu_i(x(t)) A_i + Q \\ &- P \sum_i \mu_i(x(t)) B_i R^{-1} \sum_j \mu_j(x(t)) B_j^T P < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)를 만족하는 충분 조건은 식 (10)과 같다.

$$A_i^T P + PA_i + Q - PB_i R^{-1} B_i^T P < 0 \quad (10)$$

for $i, j = 1, 2, \dots, q$

위의 부등식 (10)을 만족하는 공통 행렬 P 와 R 을 구하면 제어 입력은 식 (11)과 같이 주어진다.

$$u = -K(\mu(x(t)))^T P \quad (11)$$

$$K(\mu(x(t))) = R^{-1} B(\mu(x(t)))^T P$$

여기서

$$K(\mu(x(t))) = R^{-1} \sum_i \mu_i(x(t)) B_i^T P = \sum_i \mu_i(x(t)) R^{-1} B_i^T P$$

식 (11)을 PDC 형태로 쓰면 다음과 같다.

Controller Rule i :

$$\text{IF } x(t) \text{ is } F_i^1 \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)}(t) \text{ is } F_i^n \quad (12)$$

THEN $u = -K_i x \quad (i = 1, 2, \dots, q)$

따라서 우리는 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 2. TS 퍼지 모델 (2)는 식 (10)을 만족하는 행렬 P

및 R 이 존재하는 경우 식 (12)의 퍼지 제어기에 의해 안정해진다.

그러나 식 (10)은 퍼지 제어 규칙의 수가 많은 경우 그해를 구하는 것이 어렵다. 따라서 식 (10)을 선형 행렬 부등식의 형태로 표현하고 이를 최근에 개발된 interior point method를 사용하여 수치적으로 해를 구할 수 있다. 식 (10)의 선형 행렬 부등식 형태는 입력 행렬 B_i 의 형태에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어질 수 있다.

Case 1 $B_i = B$ 인 경우

Shur complement를 사용하여 부등식 (11)은 다음의 선형 행렬 부등식 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} -A_i^T P - PA_i - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

Case 2 $B_i \neq B_j$ 인 경우

Shur complement를 사용하여 부등식 (11)은 다음의 선형 행렬 부등식 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} -A_i^T P - PA_i - Q & P \\ P & B_j^T R B_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

식 (12)와 식 (13)에 표현된 LMI를 수치적으로 해석하여 우리는 식 (10)의 해를 구할 수 있다.

4. 모의 실험

제안된 방법을 식 (14)에 표현된 도립 진자의 제어에 적용하여 효용성을 보이고자 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - aml x_2^2 \sin(2x_1) / 2 + a \cos(x_1) u}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 x_1 은 수직축으로부터 측정된 진자의 각도 (rad)이며 x_2 는 각속도 (rad/s)이다. $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 는 중력 가속도, $m = 2.0 \text{ kg}$ 은 진자의 질량, $a = (m + M)^{-1}$, $M = 8.0 \text{ kg}$ 은 차량의 질량, $2l = 1.0 \text{ m}$ 은 진자의 길이이며 u 는 차량에 가해지는 힘이다. 위의 TS 퍼지 모델은 다음과 같이 표현 가능하다.

Plant Rules:

Rule 1: IF x_1 is about 0, THEN $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$

Rule 2: IF x_1 is about $\pi/2$, THEN $\dot{x} = A_2 x + B_2 u$

여기서

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ a\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

또한 $\beta = \cos(88^\circ)$ 이다. Rule 1과 Rule 2의 소속 함수를 그림 1에 보인다.

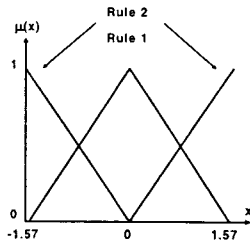


그림 1 소속 함수
Fig. 1 Membership functions

제어기 규칙은 다음과 같다.

Controller Rules:

Rule 1: IF x_1 is about 0, THEN $u = -K_1x$

Rule 2: IF x_1 is about $\pi/2$, THEN $u = -K_2x$

퍼지 제어기의 각 규칙의 상태 피드백 이득을 구하기 위해 3절에서 제안한 방법을 사용하여 공통 P 를 구하면 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} -3.9828 \times 10^3 & -0.9648 \times 10^3 \\ -0.9648 \times 10^3 & -0.2049 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이에 의한 상태 피드백 이득은 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_1 = [170.2671 \quad 36.1626], \quad K_2 = [5.0519 \quad 1.0730]$$

그림 2는 초기치 20도 (0.35 rad)인 경우 도립 진자의 상태 변수 x_1 의 궤적이며 그림 3은 상태 변수 x_2 의 궤적이다. 그림에서 보듯이 제안된 방법은 비선형 시스템인 도립 진자를 매우 성공적으로 제어할 수 있음을 알 수 있다.

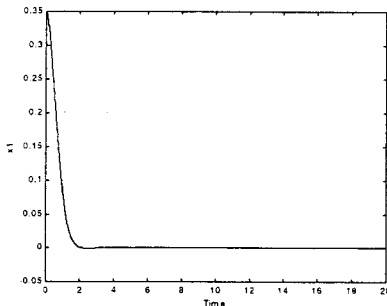


그림 2. 상태 변수 x_1 의 궤적
Fig. 2 Trajectory of state variable x_1

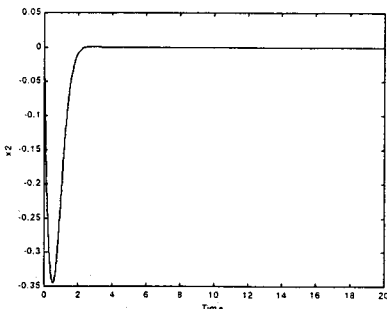


그림 4. 상태 변수 x_2 의 궤적
Fig. 4 Trajectory of state variable x_2

5. 결론

본 논문에서는 복잡한 비선형 시스템의 제어를 위해 최근 광범위하게 연구되고 있는 TS 퍼지 모델 기반 제어를 설계에 관한 연구를 수행하였다. TS 퍼지 모델은 비선형 시스템을 전체 상태 공간 내의 지역적으로 선형화하고 이를 퍼지 논리에 의해 융합하여 주어진 시스템을 표현한다. 이러한 방법을 통해 구성된 동적 퍼지 모델은 기존의 선형 제어 이론에 의해 확고한 이론적 기반을 갖는 각종 제어 기법을 적용하는 것이 가능하다. 본 논문에서 제안하는 방법은 최적 제어와 방법 및 LMI 기법을 사용하여 안정한 퍼지 제어 시스템의 설계를 수행하였다. 제안된 제어기는 인간의 정성적인 지식을 사용 가능한 퍼지 제어 이론의 장점과 확고한 이론적 기반을 갖는 선형 제어 이론의 장점을 동시에 취할 수 있다. 제안된 방법의 우수성과 유효성을 보기 위해 도립 진자의 모의 실험을 수행하였다.

참고문헌

- [1] Tomohiro Takagi and Michio Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, January/February 1985.
- [2] Kazuo Tanaka and Michio Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [3] Hua O. Wang, Kazuo Tanaka, and Michael F. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 14-23, February 1996.
- [4] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Analysis and Design for a Class of Complex Control Systems Part II: Fuzzy Controller Design," *Automatica*, Vol. 33, No. 6, pp. 1029-1039, June 1997.
- [5] W. Chang, Y. H. Joo, J. B. Park and G. Chen, "Design of Robust Fuzzy-Model-Based Controller with Application to Inverted Pendulum Tracking Control," *ITC-CSCC'98*, pp. 1621-1624, 1998.
- [6] W. Chang, Y. H. Joo, J. B. Park and Guarong Chen, "Design of Robust Fuzzy-Model-Based Controller for a Class of SISO Nonlinear Systems," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics*, 1998. (submitted)
- [7] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1991.
- [8] Y. H. Joo, H. S. Hwang, K. B. Kim and K. B. Woo, "Linguistic Model Identification for Fuzzy System," *IEE on Electronics Letters*, Vol. 31, No. 4, p. 330-331, Feb. 1995.
- [9] Y. H. Joo, H. S. Hwang, K. B. Kim and K. B. Woo, "Fuzzy System Modeling by Fuzzy Partition and GA Hybrid Schemes," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 86, No. 3, pp. 279-288, 1997.
- [10] Y. H. Joo, L. S. Shieh and G. Chen, "Hybrid state-space fuzzy-model-based controller with dual-rate sampling for the digital control of chaotic systems", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, (to be printed)