

도립 진자의 궤적 제어를 위한 적응 제어기의 설계

민현기*, 유창완, 심재철, 임화영
 광운대학교 제어계측공학과

Design of Adaptive Fuzzy Controller to
 Inverted Pendulum Tracking

Min Hyun-Ki*, Ryu Chang-Wan, Shim Jae-Chul, Yim Hwa-Yeoung
 Dept. of Control & Inst. Eng. Kwangwoon Univ.

Abstract - An adaptive fuzzy controller is constructed from a set of fuzzy IF-THEN rules whose parameters are adjusted on-line according to some adaptation law for the purpose of controlling the plant to track a given trajectory. Adaptive fuzzy controller of this paper is designed based on the Lyapunov synthesis approach. The adaptive fuzzy controller is designed through the following steps: first, construct an initial controller based on linguistic descriptions(in the form of fuzzy IF-THEN rules) about the unknown plant from human experts; then, develop an adaptation law to adjust the parameters of the fuzzy controller on-line. the adaptive fuzzy controllers are used to control the inverted pendulum to track a given trajectory.

1. 서 론

도립 진자는 강한 비선형성으로, 제어 대상으로서 널리 사용되고 있다. 본 논문은 이러한 도립진자의 진자 각도가 주어진 궤적을 따라 움직이도록 제어하는 적응 퍼지 제어기를 설계하고자 한다.

가변이득 PID는 선형화 과정을 거치므로 비선형 시스템에 적용이 힘들고, 신경망 적응 제어는 언어적 지식을 결합하기 어렵다. 시스템이나 제어에 관한 전문가의 지식은 대부분 언어적 정보이고 이것은 학습 속도와 직결된다. 적응 퍼지 제어기는 이러한 언어적 지식을 결합하기 용이하고, 적응성이 좋으며, 비선형 시스템에도 적용이 가능하다.

본 논문에서는 진자가 주어진 궤도를 따라 움직이도록 제어하는 페루프 적응 퍼지 제어기를 설계하였다. 대상에 대한 파라미터를 퍼지 시스템으로 근사하는 간접 적응 퍼지 제어 기법을 사용하였고, Lyapunov 함수 V를 최소화하는 Lyapunov Synthesis 접근방법을 학습 규칙으로 사용하였다.

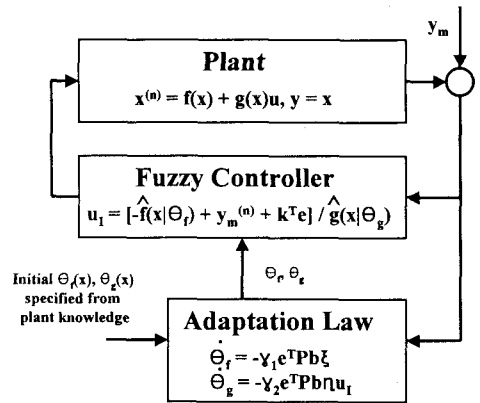
2. 본 론

2.1 퍼지 시스템

퍼지 시스템은 전문가의 지식을 언어적 표현을 사용하여 구체화하는 것으로, 정량적인 입력을 퍼지화하는 퍼지화기(Fuzzifier), 퍼지값을 추론하는 추론 엔진(Inference Engine), 추론 과정에서 이용되는 규칙 기반(Rule Base), 규칙 기반을 구성하는 IF-THEN 규칙, 퍼지값을 다시 정량적인 값으로 바꾸어주는 비퍼지화기(Defuzzifier)로 나누어진다. 퍼지화기, 추론 엔진, 비퍼지화기는 여러 가지가 있으나 Singleton 퍼지화기, Product 추론 엔진, Center Average 비퍼지화기가 보편적이다.

2.2 적응 퍼지 제어

적응 퍼지 제어기는 기본적인 구성과 원리, 수학적 접근 방법이 고전적인 적응 제어기와 유사하다. 그러나 적응 퍼지 제어기는 특별한 비선형 시스템을 다룰 수 있으며, 제어에 필요한 정보를 적용하기에 적합하다. 이러한 정보는 사람의 언어적 정보가 일반적인데, 크게 대상체와 제어에 대한 정보라는 두 범주로 나눌 수 있다. 이러한 정보에 따라 적응 퍼지 제어를 분류한다. 대상체에 대한 모델처럼 퍼지 시스템을 사용하는 간접 적응 퍼지 제어(indirect adaptive fuzzy control)와 제어기처럼 퍼지 제어 시스템이 사용하는 직접 적응 퍼지 제어(direct adaptive fuzzy control)가 있다. 또한, 이 두 가지를 조합한 직·간접 조합 퍼지 제어(combined indirect/direct fuzzy control)가 있다. 본 논문에서는 <그림 1>과 같이 대상체의 모델을 퍼지 시스템으로 구성한 indirect adaptive fuzzy control을 사용하였다.



<그림 1> The indirect adaptive fuzzy control system

2.2.1 비선형 대상체

제어 대상체가 n차의 비선형 시스템이라고 가정하였을 때, 미분 방정식은 다음과 같다.

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u$$

$$y = x \tag{1}$$

f, g는 알지 못하는 함수이고, u ∈ R, y ∈ R는 대상체의 입력과 출력이다. 우리는 제어가능하기 위하여 g(x) ≠ 0이고, x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})^T ∈ R^n 이 측정 가능하다고 가정한다.

2.2.2 퍼지 제어기

제어의 목적은 출력 y 가 이상적인 출력 y_m 을 따라 움직이도록, $e = y_m - y = y_m - x$ 를 최소화하기 위한 파라미터 벡터 θ 를 변경하는 적응 규칙을 가진 폐환 퍼지 제어기 $u(x|\theta)$ 를 설계하는 것이다.

퍼지 IF-THEN 규칙의 집합으로 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 입·출력 움직임을 파라미터 집합 θ_f, θ_g 을 포함시키고, (1)식과 (2)식을 이용해 다시 쓰면 다음과 같다.

$$u = u_f = \frac{1}{\hat{g}(x|\theta_g)} [-\hat{f}(x|\theta_f) + y_m^{(n)} + k^T e] \quad (2)$$

$$\hat{f}(x|\theta_f) = \theta_f^T \xi(x) \quad (3)$$

$$\hat{g}(x|\theta_g) = \theta_g^T \eta(x)$$

$$\xi_{i_1, \dots, i_n}(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^5 \dots \sum_{i_n=1}^5 (\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j))} \quad (4)$$

$$\eta_{i_1, \dots, i_n}(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{B_j^i}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^5 \dots \sum_{i_n=1}^5 (\prod_{j=1}^n \mu_{B_j^i}(x_j))}$$

2.2.3 학습 규칙

Lyapunov 함수 V 를 최소화하는 Lyapunov Synthesis 기법을 적응 규칙으로 사용하였다. 퍼지 시스템의 폐환 운동 방정식은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_n & k_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & k_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\dot{e} = -Ae + b[\hat{f}(x|\theta_f) - f(x)] + [\hat{g}(x|\theta_g) - g(x)]u_f \quad (6)$$

A 가 안정한 벡터($|sI - A| = s^n + k_1s^{(n-1)} + \dots + k_n$)일 때, Lyapunov equation을 만족하는 유일한 positive definite n 차 대칭 행렬 P 를 구할 수 있다.

$$A^T P + P A = -Q \quad (7)$$

θ_f^* , θ_g^* 를 최적의 파라미터라고 하였을 때, 최소 근사 오차를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\omega = [\hat{f}(x|\theta_f^*) - f(x)] + [\hat{g}(x|\theta_g^*) - g(x)]u_f \quad (8)$$

그래서 폐환 시스템의 V 의 도함수를 나타내면,

$$V = -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b \omega + \frac{1}{\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T [\theta_f^* + \gamma_1 e^T P b \xi(x)] + \frac{1}{\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T [\theta_g^* + \gamma_2 e^T P b \eta(x) u_f] \quad (9)$$

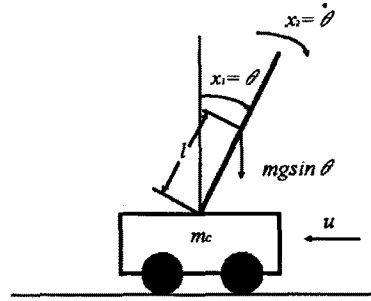
이 된다. 최소 근사 오차 ω 를 최소화하는 적응 규칙은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\dot{\theta}_f = -\gamma_1 e^T P b \xi(x) \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_g = -\gamma_2 e^T P b \eta(x) u_f$$

2.3 도립 진자 시스템

도립 진자 시스템은 비선형 시스템의 전형적인 예로서 제어 이론의 성능을 입증하는 플랫폼으로 많이 이용되고 있다.



〈그림 2〉 도립 진자 시스템

시스템의 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} - \frac{\cos x_1}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} u \end{aligned} \quad (11)$$

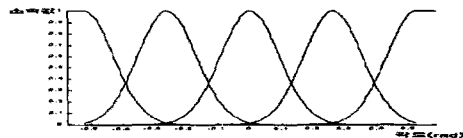
x_1	진자의 각도	θ degree
x_2	진자의 각속도	$\dot{\theta}$ degree/sec
u	제어 입력	Newton
m	진자의 질량	0.127 kg
g	중력 가속도	9.8 m/s ²
m_c	수레의 질량	0.186 kg
l	진자 길이의 반	0.3 m

〈표 1〉

2.4 제어기의 설계

2차 시스템으로 설정하여, $k_1=2, k_2=1(s^2 + k_1s + k_2)$ 가 안정하므로로 설정한다. 하나의 입력 상태 변수를 5개의 MF로 설정하면, $p1=5, p2=5, q1=5, q2=5$ 가 되고, MF를 아래 식처럼 같게 설정하면,

$$\begin{aligned} \mu_{A_1^1}(x_1) &= \exp\left[-\left(\frac{x_1 + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right], & \mu_{A_1^2}(x_1) &= \exp\left[-\left(\frac{x_1 + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right], \\ \mu_{A_1^3}(x_1) &= \exp\left[-\left(\frac{x_1}{\pi/24}\right)^2\right], & \mu_{A_1^4}(x_1) &= \exp\left[-\left(\frac{x_1 - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right], \\ \mu_{A_1^5}(x_1) &= \exp\left[-\left(\frac{x_1 - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (12)$$



〈그림 3〉 Membership function

$$\begin{aligned} \xi_{i_1, i_2}(x) &= \frac{\prod_{j=1}^2 \mu_{A_j^i}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^5 \sum_{i_2=1}^5 (\prod_{j=1}^2 \mu_{A_j^i}(x_j))} \\ \eta_{i_1, i_2}(x) &= \frac{\prod_{j=1}^2 \mu_{B_j^i}(x_j)}{\sum_{i_1=1}^5 \sum_{i_2=1}^5 (\prod_{j=1}^2 \mu_{B_j^i}(x_j))} \end{aligned} \quad (13)$$

이 되고, 이상적인 출력 y_m 을 다음과 같이 정의하였다.

$$y_m(t) = \frac{\pi}{30} \sin(t) \quad (14)$$

퍼지 시스템의 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 이고, $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ 로 설정하면 식 (6)에 의해 $P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ 이 된다. 결국, 학습규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_f &= -\gamma_1 [e \ \dot{e}] \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xi(x) \\ \theta_g &= -\gamma_2 [e \ \dot{e}] \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \eta(x) u_i \end{aligned} \quad (15)$$

$f(x)$ 의 영역이 $g(x)$ 보다 더 크기 때문에, $\gamma_1=50$, $\gamma_2=1$ 로 정했다.

2.5 초기 파라미터 설정

식 (11)에 따라 IF-THEN 규칙은 다음과 같다.

IF $x_1 = F_1^1$ and $x_2 = F_2^1$ THEN $f(x_1, x_2) = \text{near } F_{11}$

IF $x_1 = F_1^1$ and $x_2 = F_2^2$ THEN $f(x_1, x_2) = \text{near } F_{12}$

⋮

IF $x_1 = F_1^5$ and $x_2 = F_2^5$ THEN $f(x_1, x_2) = \text{near } F_{55}$

IF $x_1 = G_1^1$ and $x_2 = G_2^1$ THEN $g(x_1, x_2) = \text{near } G_{11}$

IF $x_1 = G_1^1$ and $x_2 = G_2^2$ THEN $g(x_1, x_2) = \text{near } G_{12}$

⋮

IF $x_1 = G_1^5$ and $x_2 = G_2^5$ THEN $g(x_1, x_2) = \text{near } G_{55}$

F_{ij} 와 G_{ij} 의 값은 모델링식 (10)에 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

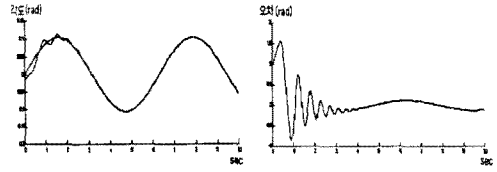
		$f(x_1, x_2)$				
		F_2^1	F_2^2	F_2^3	F_2^4	F_2^5
x_1	F_1^1	-15,414	-8,570	0	-8,570	-15,414
	F_1^2	-15,758	-8,784	0	-8,784	-15,758
	F_1^3	-15,873	-8,855	0	-8,855	-15,873
	F_1^4	-15,758	-8,784	0	-8,784	-15,758
	F_1^5	-15,414	-8,570	0	-8,570	-15,414

〈표 2〉

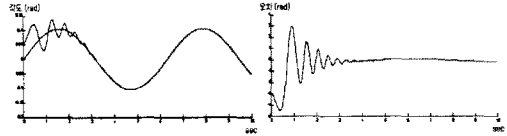
		$g(x_1, x_2)$				
		G_2^1	G_2^2	G_2^3	G_2^4	G_2^5
x_1	G_1^1	8,963	10,774	11,481	10,774	8,963
	G_1^2	8,963	10,774	11,481	10,774	8,963
	G_1^3	8,963	10,774	11,481	10,774	8,963
	G_1^4	8,963	10,774	11,481	10,774	8,963
	G_1^5	8,963	10,774	11,481	10,774	8,963

〈표 3〉

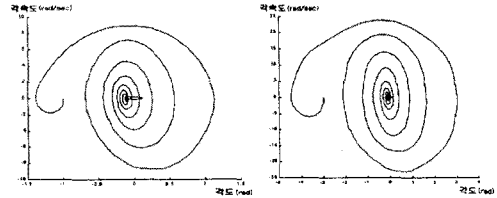
2.6 시뮬레이션 결과



〈그림 4〉 초기각 -1도



〈그림 5〉 초기각 3도



〈그림 6〉 초기각 1도, 3도에서의 위상 공간

3. 결 론

제어 대상체의 모델을 퍼지 시스템으로 구성한 간접 적응 퍼지 제어기를 통해 비선형 대상체인 도립 진자의 각도를 주어진 궤적을 따라 제어하였다. 플랜트에 대한 정보를 퍼지 시스템으로 구성하였기 때문에 초기에 플랜트에 대한 정보를 적용함으로써 빠른 수렴 속도를 얻을 수 있었다. 추후 과제도, 실험을 통한 온라인 학습 기법의 적용과 함께, Lyapunov Synthesis 이외의 다양한 적응 알고리즘과의 성능 평가가 수반되어야 하겠다.

(참 고 문 헌)

- [1] Li-Xin Wang, "A Course in Fuzzy and Control", Prentice-Hall, 1997
- [2] Li-Xin Wang, "Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis", Prentice-Hall, 1994
- [3] Li-Xin Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Pendulum Tracking", IEEE Tran. Syst., Man, Cybern., vol. 26, no. 5, pp. 57-70, 1996.
- [4] Li-Xin Wang, "Design and Analysis of Fuzzy Identifiers of Nonlinear Dynamic Systems", IEEE Tran. Auto. Con. vol. 40, No. 1, January, page 11-23, 1995
- [5] Jean-Jacques E. Slotine Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, 1991
- [6] J. S. Jang, C. T. Sun, E. Mizutani, "Neuro-Fuzzy and Soft Computing", Prentice Hall, 1997
- [7] Lefteri H. Tsoukalas, Robert E. Uhrig, "Fuzzy and Neural Approaches in Engineering", John Wiley & sons, 1997