

최적 극점 배치 기법을 이용한 비선형 시스템의 퍼지 제어기의 설계

이 남 수* 주 영 훈* 김 광 배**

* 군산대학교 공과대학 제어계측공학과 **KIST 지능제어연구센터

Fuzzy Controller Design for Nonlinear Systems Using Optimal Pole-Placement Schemes

Nam-Su Lee* Young-Hoon Joo* Kwang-Bae Kim**

* Dept. of Control & Instrumentation Eng., Kunsan Univ., Korea

** Intelligent System Control Research Center, KIST, Korea

Abstract: In this paper, we present a method for the analysis and design of fuzzy controller for nonlinear systems. In the design procedure, we represent the dynamics of nonlinear systems using a Takagi-Sugeno fuzzy model and formulate the controller rules, which shares the same fuzzy sets with the fuzzy system, using parallel distributed compensation method. Then, after the feedback gain of each local state feedback controller is obtained using the existing optimal pole-placement scheme, we construct an overall fuzzy logic controller by blending all local state feedback controller. Finally, the effectiveness and feasibility of the proposed fuzzy-model-based controller design method has been evaluated through an inverted pendulum system.

본 논문의 구성은 2장에서 TS퍼지 모델을, 3장에서 최적 극점 배치 기법을 살펴보고 4장에서는 제안한 방법의 효용성을 도입진자 시스템을 통해서 검증한다. 끝으로 5장에서 결론과 앞으로의 과제를 논한다.

1. 서 론

퍼지 논리 제어는 Zadeh에 의해 처음 소개된 퍼지 집합 이론이 가장 성공적으로 적용된 분야이다. Mamdani가 시멘트 클린의 제어에 퍼지 집합 이론을 처음으로 제어 방법으로 이용한 뒤로 많은 연구자들이 퍼지 논리 제어를 다양한 시스템에 적용하여 괄목할 만한 성능의 향상을 가져왔다. 이와같이 퍼지 제어는 최근 빠른 성장을 해왔지만 아직도 많은 기본적인 문제가 남아있다. 안정도 해석과 체계적인 설계는 퍼지 제어 시스템의 가장 중요한 논점중 하나이다.

퍼지 모델 기반 제어에 사용하는 퍼지 모델은 Takagi와 Sugeno가 1985년에 제시한 Takagi-Sugeno (TS) 퍼지 모델과 동적 퍼지 모델 [9]이다. TS 퍼지 모델은 퍼지 모델의 각 규칙의 후반부가 주어진 비선형 시스템의 지역적으로 선형화된 선형 상태 공간 모델을 표현하도록 한 것이다. Takagi와 Sugeno [1]는 이 모델을 이용하여 수질 청정 프로세스 (water cleaning process)와 강철 제조 공정 (steel-making process)에 적용하였다. Cao 등은 일반적인 퍼지 모델 기반 제어기에 현대 제어 이론을 사용하여, 제어기 분석을 행하였다 [2].

본 논문에서는 비선형 시스템의 최적 극점 배치 기법을 사용한 퍼지 제어기의 체계적인 설계 방법에 대해 제안한다. 설계과정으로 먼저 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현한다. TS 퍼지 모델에서 다른 상태공간 영역의 부분적인 동역학은 선형모델로 표현되고 시스템의 전체 모델은 각 선형모델의 퍼지 조합에 의해 생성 얻어진다. 퍼지 모델을 얻은 후, 소위 병렬 분산 보상 (PDC)기법을 통하여 퍼지 모델에 기반한 제어기를 설계하고 퍼지 조합에 의해 전체 제어기를 얻는다. 제어기 설계과정에서 최적의 제어 입력을 구하기 위해 최적 극점 배치 기법을 사용한다. 시스템의 안정도 해석은 LMI에 기반하며 공통의 양한정 행렬을 구하는 문제로 구성된다.

2. 퍼지 시스템의 기초

2.1 TS 퍼지 모델과 제어기 규칙

비선형 시스템은 TS 퍼지 모델로 표현할 수 있다. TS 퍼지 시스템은 퍼지 IF-THEN 규칙의 집합으로 표현되는데, 각 규칙은 상태공간의 어떤 영역에서는 입출력이 부분적으로는 선형으로 표현된다. 전체 시스템은 그러한 부분적 선형 모델의 집합이다. 이러한 시스템을 나타내기 위해 TS 퍼지 모델을 사용하며 이것은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Plant Rule } i: & \text{ IF } x(t) \text{ is } M_i^1 \text{ and } \dots \text{ and } x^{(n-1)}(t) \text{ is } M_i^n, \\ & \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (2)$$

여기서, $M_i^j(j=1, \dots, n)$ 은 i 번째 퍼지 집합이고 q 는 규칙의 수. $x(t) \in R^n$ 은 상태 벡터, $u(t) \in R^m$ 은 입력 벡터, $A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ 는 전체 부 변수이고, (A_i, B_i) 는 퍼지 시스템의 i 번째 지역 모델이다. 무게 중심 비퍼지화, product 추론, single 퍼지화를 사용해서 퍼지 시스템의 최종 출력 구하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3)$$

여기서,

$$A = \sum_{i=1}^q \mu_i(x) A_i, \quad B = \sum_{i=1}^q \mu_i(x) B_i$$

$$\mu_i(x) = \frac{\omega_i(x)}{\sum_{i=1}^q \omega_i(x)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \mu_i(x) = 1,$$

$$\omega_i(x) = \prod_{j=1}^n M_j^i$$

식 (3)에서 의 영입력 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(t) A_i x(t)}{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)} \quad (4)$$

PDC기법을 사용하여 식(2)와 동일한 전체부를 갖는 FLC의 i 번째 규칙을 다음과 같이 얻는다.

Controller Rule i : IF $x(t)$ is M_i^1 and...

and $x^{(n-1)}$ is M_i^n , THEN $u(t) = -K_i x(t)$

$$(i = 1, 2, \dots, q) \quad (5)$$

여기서 $K_i = [k_{i1}, \dots, k_{in}]$ 는 i 번째 이득 벡터이다. 퍼지 제어기 식 (5)의 최종 출력은 다음과 같이 표현된다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(x(t))(-K_i x(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i(x(t))}$$

$$= - \sum_{i=1}^q \mu_i(x(t)) K_i x(t) = -K(\mu) x(t) \quad (6)$$

식(2)와 식(6)을 조합해서 얻어지는 전체 페루프 퍼지 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i \mu_j (A_i - B_j K_j) x(t) \quad (7)$$

2.2 LMI에 기반을 둔 안정도 해석

퍼지시스템 식(7)의 안정조건은 다음과 같다.

정리1[1]: 퍼지 제어 시스템 식(7)은 다음 두 개의 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 가 존재한다면 넓은 의미에서 점근적으로 안정하다.

$$\{A_i - B_j K_j\}^T P + P \{A_i - B_j K_j\} < 0$$

for $i=1, 2, \dots, q$ (8)

여기서,

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0 \quad \text{for } i < j \leq q \quad (9)$$

$$G_{ij} = \frac{A_i - B_j K_j + A_j - B_i K_i}{2}$$

3. 극점 배치 계획을 가진 최적 제어

3.1 서론

다음 식(10)으로 표현되는 i 번째 부분공간의 1차 가제어 연속시간 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (10) \\ y(t) &= C_i x(t) \end{aligned}$$

식(10)의 성능기준은 다음과 같다.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (11)$$

여기서, Q 는 $n \times n$ 양반한정(positive semi definite)대칭행렬이고 R 는 $m \times m$ 양한정(positive definite) 대칭행렬이다. 성능기준을 최소화하는 궤환 제어 규칙은 다음과 같이 표현된다.

$$u(t) = -K_i x(t) = -R^{-1} B_i^T P_i x(t) \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (12)$$

여기서, K_i 는 i 번째 부분공간의 궤환 이득이다. P_i 는 구할 수 있는 (Q, A_i) 를 가진 Riccati 방정식의 양반한정(positive semi-definite) 대칭 행렬 해이다.

$$P_i B_i R^{-1} B_i^T P_i - P_i A_i - A_i^T P_i - Q = 0_n \quad (13)$$

이 해를 사용해서, 전체 페루프 시스템을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A_i - B_i K_i) x(t) \quad (14)$$

여기서, $K_i = R^{-1} B_i^T P_i$ 이고 $A_i - B_i K_i$ 의 고유값은 복소 s -평면의 개방 좌반면에 위치한다. 우리의 목적은 페루프 시스템 식(14)의 고유값이 그림 1의 사선이나 그 안쪽에 위치하도록 하는 Q, R, K_i 를 구하는 것이다.

보조정리 1 [4]: (A_i, B_i) 는 식(10)에 주어진 가제어 시스템을 나타낸다. 또한, $h \geq 0$ 은 그림 1에서 보이는 것처럼 미리 설정된 상대 안정도를 나타낸다. 페루프 시스템 전달 행렬 $A_i - B_i R^{-1} B_i^T P_i$ 의 고유값은 수직선 $-h$ 의 좌측에 놓여진다. 행렬 P_i 는 다음의

Riccati 방정식의 해이다.

$$P_i B_i R^{-1} B_i^T P_i - P_i (A_i + hI_n) - (A_i + hI_n)^T P_i = 0_n \quad (15)$$

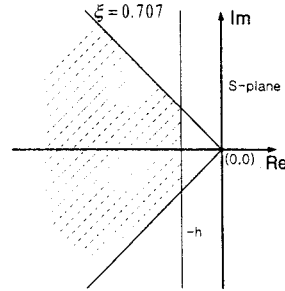


그림 1 S-평면의 관심 영역

보조정리 2 [8]: 식(14)에서 주어진 안정한 시스템 행렬 $A_i \in R^{n \times n}$ 은 그림 1의 개방된 사선이 그려진 영역에 위치한 고유값 $\lambda_j^- (j=1, \dots, \hat{n}^-)$ 과 그 영역 밖에 위치한 고유값 $\lambda_j^+ (j=1, \dots, \hat{n}^+)$ 를 가지고 있다. 여기서 $\hat{n} = \hat{n}^- + \hat{n}^+$ 이다.

$R > 0$ 을 가진 다음 두 Riccati 방정식을 보자. :

$$\hat{Q} B_i R^{-1} B_i^T \hat{Q} - \hat{Q} (-A_i^2) - (-A_i^2)^T \hat{Q} = 0_n \quad (16)$$

$$P_i B_i R^{-1} B_i^T P_i - P_i A_i - A_i^T P_i - \hat{Q} = 0_n \quad (17)$$

최적의 페루프 시스템 전달 행렬

$$A_c = A_i - B_i K_i = A_i - B_i (\gamma R^{-1} B_i^T P_i) \quad (18)$$

을 불변하는 고유값 $\lambda_j^- (j=1, \dots, \hat{n}^-)$ 을 포함할 것이고 식(18)에서의 상수 이득 γ 가 다음 식을 만족하면 그림 1의 개방된 영역 내부에 위치한 적어도 하나의 추가된 복소쌍 고유값이 존재한다.

$$\gamma \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a} \right\} \quad (19)$$

여기서, $a = tr[(B_i R^{-1} B_i^T P_i)^2]$, $b = tr[B_i R_i B_i^T P_i A_i]$, $c = tr[B_i R^{-1} B_i^T \hat{Q}] / 2$ 이고, $tr[\cdot]$ 는 행렬의 trace이다. $c = 0$ 이라면, A_c 의 고유값이 그림 1의 목적인 개방 영역 안에 최적으로 위치하게 된다.

시스템의 극이 사선으로 그려진 영역 안에 위치하기 때문에, 설계된 시스템은 지정된 상대 안정도를 갖게 되며 시스템의 응답은 적당한 속도에 수렴한다.

3.2 지역적 제어기의 연속-시간 설계 과정

연속-시간에서의 지역적 제어기의 설계 과정은 다음과 같다.

단계 1: (A_i, B_i) 를 식(10)에서 주어진 시스템 행렬이라 한다. h 와 가중 행렬 $R > 0$ 의 값을 정한다. $j=0$ 으로 정하고 $j=0$ 에 대해서 $A_j = A_i$ 와 $\gamma_j = 1$ 로 나타낸다. 페루프 시스템 $A_{j+1} = A_j - B_j K_j$ 를 구하기 위해 식(11)을 만족하는 P_j (P_j 로 나타내는)에 대해서 식(15)을 푼다. $K_j = \gamma_j R^{-1} B_j^T P_j$ 이다.

단계 2: $j = j+1$ 로 정하고 \hat{Q} (\hat{Q}_j 로 나타내는)를 구하기 위해 $A_i = A_j$ 를 갖는 식(16)을 푼다. 만일

$$c = \frac{tr[B_i R^{-1} B_i^T \hat{Q}_j]}{2} = 0 \text{이면 단계 4로 간다.}$$

단계 3: P_i (P_i 로 나타내는)를 결정하기 위해, 페루프 시스템 $A_{j+1} = A_j - B_j K_j$ 를 구하기 위해 $A_j = A_j$ 와 $\hat{Q} = \hat{Q}_j$ 를 갖는 식 (17)을 푼다. $K_j = \gamma_j R^{-1} B_j^T P_j$ 이며 γ_j 는 식(19)로부터 결정된다. 단계2로 간다.

단계 4: 식 (8)을 만족하는 공통 양한정 행렬 P를 구한다. 만약 존재하지 않으면 그림 1에 있는 h 를 Δh 만큼 증가시킨후 단계 1로 간다.

단계 5: i 번째 부분공간에 대한 바람직한 최적 제어는 다음과 같이 구한다.

$$u(t) = -K_i x(t) \quad (20)$$

여기서, $K_i = \sum_{j=0}^{i-1} K_j$ 은 i 번째 부분공간의 상태피환 이득벡터이다.

4. 독립 진자의 퍼지 모델링

본 논문에서 독립 진자 시스템을 예로 든다. 이 시스템의 동역학식은 다음과 같다 [7].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} \end{aligned}$$

여기서, x_1 은 수직축과 펜듈럼이 이루는 각(라디안)이고, x_2 는 각속도, $g=9.8m/s^2$ 는 중력가속도이며, $m=2.0kg$ 은 펜듈럼의 질량, $M=8.0kg$ 은 수레의 질량이고, $2l=1.0m$ 는 펜듈럼의 길이, 그리고 u 는 수레에 가해지는 힘이다. 또한 $a=1/(m+M)$ 이다. 이 시스템을 근사화하기 위한 TS퍼지 모델은 다음과 같다 [7].

Rule 1 : IF x_1 is about 0, THEN $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$

Rule 2 : IF x_1 is about $\pi/2$, THEN $\dot{x} = A_2 x + B_2 u$

여기서,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

이고 $\beta = \cos(88^\circ)$ 이다. Rule 1과 Rule 2에 대한 멤버십 함수는 그림 2와 같다.

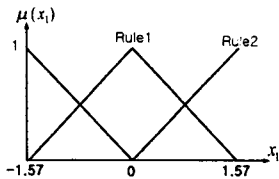


그림 2 멤버십 함수

3.1절에서 제시한 최적의 극점배치 계획을 사용하여 얻은 제한 이득은 다음과 같다.

$$K1 = (-337.3930 \quad -81.1310)$$

$$K2 = (-7081.2599 \quad -2314.5796)$$

PDC의 안정도를 보장하는 공통 행렬 P는 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.4389 & 0.0119 \\ 0.0119 & 0.0053 \end{bmatrix}$$

이때의 안정도 여유 $h = 3$ 이다. 그림 3과 그림 4는 초기치 45도 (0.7854rad)인 경우 독립진자의 출력 응답이다. 실선이 제안된 제어기의 응답이다.

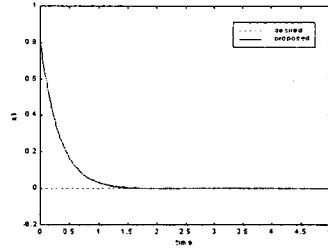


그림 3 제안된 제어기의 출력응답(x1)

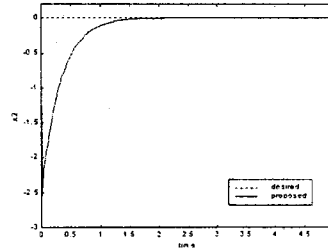


그림 4 제안된 제어기의 출력응답(x2)

5. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템의 제어를 위해 최적 극점 배치 기법을 사용한 퍼지 모델 기반 제어기 설계 기법을 제시하였다. 비선형 시스템을 모델링하는데 TS퍼지모델을 사용하였고 퍼지 모델 기반의 제어기를 설계하는데 PDC기법을 사용하였다. 또한, 최적 극점 배치 기법을 확장하여 다중 지역 선형 상태 공간 모델을 구축하기 위해 안정도 조건과 함께 적용하였다. 향후 본 연구는 추종문제의 해결을 위한 EPDC의 도입이 될 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Stability Analysis and Design for a Class of Continuous-time Fuzzy Control Systems", Int. J. Control, Vol. 64, No. 6, pp. 1069-1087, 1995.
- [3] L.K.Wong, F.F.Leung, and P.K.S.Tam, "Stability of TS Model Based Fuzzy Systems", IEEE-FUZZ pp. 83-86, 1997.
- [4] C. Li, P. C. Chen, and C.K. Chen, "Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", Fuzzy Sets and Systems, pp. 125-140, 1993.
- [5] F.H.F.Leung, L.K.Wong and P.K.S.Tam, "Fuzzy Based Controller for an Inverted Pendulum", Elec Letters, Vol. 32, pp. 1683-1685, 1996.
- [6] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy System Design via LMIs", ACC'97, pp. 2861-2873, 1997.
- [7] L.S.Shieh, H.M.Dib and S.Ganeson, "Continuous quadratic regulator and pseudo-continuous-time quadratic regulator with pole placement in a specific region Proceedings(D), Vol. 134(5), pp. 338-346, 1987.
- [8] H. Ying, "Design of a General Class of Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems", ACC '97, Proceedings of American Control Conference, pp. 3746-3750, 1997.
- [9] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, 1985.