

내재적 경계 조건을 이용한 자유표면 유동 수치해석

Numerical Simulation on the Free Surface using implicit boundary condition

이 공회¹⁾, 백 제현²⁾

G. H. Lee, J. H. Baek

ABSTRACT : This describes a numerical method for predicting the incompressible unsteady laminar three-dimensional flows of fluid behaviour with free-surface. The elliptic differential equations governing the flows have been linearized by means of finite-difference approximations, and the resulting equations have been solved via a fully-implicit iterative method. The free-surface is defined by the motion of a set of marker particles and interface behaviour was investigated by way of a "Lagrangian" technique. Using the GALA concept of Spalding, the conventional mass continuity equation is modified to form a volumetric or bulk-continuity equation. The use of this bulk-continuity relation allows the hydrodynamic variables to be computed over the entire flow domain including both liquid and gas regions. Thus, the free-surface boundary conditions are imposed implicitly and the problem formulation is greatly simplified. The numerical procedure is validated by comparing the predicted results of a periodic standing waves problems with analytic solutions or experimental results from the literature. The results show that this numerical method produces accurate and physically realistic predictions of three-dimensional free-surface flows.

1. 개 요

자유표면과 같이 움직이는 경계면을 포함한 유동은 많은 공학 분야에서 매우 일반적인 현상으로서 물성이 다른 두 유체 경계면에서의 상호 작용에 의해서 특성지워진다. 물과 공기와 같이 밀도비가 큰 두개의 상을 가진 유체 유동은 복원력과 관성력이 중요한 특징으로 나타나며, 이러한 특징들은 potential energy와 kinetic energy 사이에 복잡한 상호작용의 결과를 낳는다. 이러한 특성을 나타내는 유동을 해석하는 경우 다음과 같은 문제점이 발생하게 된다. 즉, 시간에 대한 자유표면의 진행과 공간 상에서의 유동장의 결정이다. 문제의 복잡성은 적합한 경계조건들과 지배방정식을 만족시키고 동시에 자유표면의 위치에 대한 정보도 알아야 된다는 것이다.

Harlow와 Welch[1]는 점성, 비압축성 유체에 대한 비정상 상태의 Navier-Stokes 방정식을 해석하는 Explicit Finite Difference scheme의 MAC(Marker And Cell) method를 최초로 개발하였다. MAC method는 staggered grid, 보존형태의 운동량 방정식 그리고 자유표면의 위치를 나타내기 위한 표적 입자(marker particle)의 사용으로 특성지워진다. 그 후 Chan과 Street[2]는 "ragged surface" 개념을 도입하여 자유표면에 주어지는 경계조건을 격자 중앙에 적용시키는 MAC방법과는 달리 자유표면 자체에 적용시키는 SUMMAC(Stanford University Modified MAC) method을 개발하여 수치 계산의 불안정성을 개선하고 정확성을 증가시켰다. 또한 Hirt와 Nichols[3]는 VOF(Fractional Volume of Fluid) method을 이용한 SOLA-VOF code를 개발하였으며, Tang과 Patel[4]은 solitary wave를 해석하기 위하여 MAC방법과 FA(Finite Analytic)방법을 SIMPLER Algorithm에 적용하여 해석하였으며, Miyata[5]는 TUMMAC(Tokyo University Modified MAC)method를 개발하여 전진하는 배 주위의 자유표면 유동을 해석하였다.

일반적으로 위와 같이 과거에 행해졌던 방법들은 액체와 기체의 경계면을 포함한 액체영역에서만 해석이 이루어졌고, 자유표면에 대한 kinematic, dynamic 조건과 같은 복잡한 경계조건이 자유표면에

1) 포항공대 기계공학과 대학원

2) 포항공대 기계공학과

직접 주어졌으며, 대부분 2차원 유동에 적용되었다. 그 이유는 3차원 자유표면에 대한 수치해석은 잉여의 차원이 수반하는 계산상의 문제점 뿐만 아니라 과도한 계산 시간 및 컴퓨터 용량을 필요로 하기 때문이다. 그러나, 본 연구에서는 비압축성, 층류, 비정상 상태에서 복잡한 경계조건을 자유표면에 직접 부과하지 않고 액체와 기체를 포함한 계산 영역 전체에서 모든 변수들을 계산함으로써 자유표면에서 속도장과 압력장은 연속하고, 수치 계산 영역에서 자유표면에 대한 복잡한 경계조건은 내재적으로 부과된다는 Spalding[6]의 GALA(Gas And Liquid Analyser) 개념과 Maxwell[7]의 입자 추적 기법을 이용하여 표적입자를 자유표면상에만 위치시켜 자유표면의 형상을 표현하고 이때 자유표면 경계면에서는 대류항, 확산항 그리고 생성항에 필요한 점성과 밀도를 부분 평균하여 구하는 방법을 적용하였다. 이 방법은 이미 정 해용 [12]의 결과에서 수치해석적으로 여러가지 경우에 대하여 적용, 입증되었다. 이와 같이 지배방정식의 변화와 표적입자 추적 기법에 의해서 경계조건이 매우 단순화될 수 있고, 계산 시간 및 컴퓨터 용량을 줄일 수 있다. 그리고 이러한 해석방법의 타당성과 정확성을 검증하고자 periodic standing wave 운동을 해석하였으며, 수치해석시 각 유체의 물성치들은 각 유체내에서 일정하며 유체 경계면에서의 표면장력이나 물질전달 효과를 무시하였다. 계산 결과는 이론해와 여러 참고 문헌의 실험값과 비교하였다.

2. 지배 방정식 및 수치해석 방법

2.1 수치 지배 방정식

자유표면 유동은 액체와 기체사이에서 경계면을 이루는 유동이다. 이러한 2개의 상을 갖는 유동을 해석하기 위하여 본 연구에서는 GALA개념을 도입하여 연속방정식을 질량보존방정식에서 체적보존방정식으로 수정하였다. 수정된 체적보존방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (1)$$

여기서 ρ 의 substantial derivative 항은 비압축성 유체의 경우 영이고, 공기의 압축성은 surface wave 운동의 경우에는 중요치 않으므로 비압축성 유체로 가정하여도 무방하다. 이와 같이 액체와 기체의 경우 전체 유동장에서 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}$ 는 영이고 기체의 운동량은 액체의 운동량에 비하여 대단히 작으므로 비록 기체가 압축성이라 할지라도 운동량 방정식에서 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}$ 을 포함한 항은 영이 된다.

2.2 자유표면의 계산

2.2.1 표적입자 운동

자유표면은 질량이 없는 표적입자(marker particle)라는 일련의 입자들에 의해서 표시된다. 본 연구에서 표적입자가 상하로만 움직인다고 가정 (w_p 만을 고려)하였으며, 따라서 표적입자의 위치는 각 시간 간격 동안 아래와 같이 Lagrangian방법에 의해서 움직인다.

$$\begin{aligned} x_p &= x_p^0 \\ y_p &= y_p^0 \\ z_p &= z_p^0 + w_p \Delta t \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 (x_p, y_p, z_p) 와 (x_p^0, y_p^0, z_p^0) 는 각각 표적입자의 새로운 위치와 이전 시간에서의 위치를 나타내며, w_p 는 각각의 표적입자에 대해서 가장 가까운 8개의 속도값을 선형 보간법을 이용하여 구한 입자들이 갖는 속도를 나타낸다.

2.2.2 자유표면 형상

Fig. 1은 자유표면에 위치하는 검사체적면의 형상을 나타낸다. 이러한 형상을 가지는 검사체적면을 N, S, W, E, T, B 에 대해서 조합하면 다양한 검사체적 형상을 얻게된다. 문제는 자유표면의 형상이

복잡한 유동의 경우 검사 체적내에 포함된 유체의 양을 정확히 계산하는데 어려움이 따른다는 것이다.

2.2.3 Local density와 viscosity의 계산

표적입자들은 자유표면의 형태를 표시하는데 편리할 뿐 만 아니라 자유표면에 의해서 나누어지는 검사체적들에 대한 밀도와 점성을 계산하는데 수단을 제공한다. 이러한 검사체적의 물성치들은 각 검사체적내의 유체들이 포함된 상대적인 양에 기준한 가중치에 의해서 기체와 액체의 물성치들을 평균하여 구한다. 평균밀도 계산은 각 검사체적과 검사체적면에서 계산되어지며, 전자는 비정상항과 체적력의 계산에 이용되고 후자는 대류항의 계산에 이용된다. 또한 점성계수 μ 는 전단 응력항을 계산하기 위하여 검사체적면에서 밀도를 구하는 방법과 동일한 방법으로 다음과 같은 식을 이용하여 구한다. 여기서 β 는 액체의 백분율이다.

$$\begin{aligned} \rho_{avg} &= \beta \rho_{liquid} + (1 - \beta) \rho_{gas} \\ \mu_{avg} &= \beta \mu_{liquid} + (1 - \beta) \mu_{gas} \end{aligned} \quad (3)$$

2.2.4 표적입자 처리

자유표면에 걸쳐 있지 않은 즉, 어떠한 입자도 포함하지 않는 검사체적이 기체 또는 액체로 채워져 있는가를 Fig. 2와 같이 검사체적의 중심 m에서 가장 가까운 입자를 B, 양 옆의 입자를 A, C로 하여 $z''_{m_{AB}}, z''_{m_{BC}}, z''_{m_{AC}}, z''_{B_{AC}}$ 의 부호 조합에 의해 판별한다.

2.3 계산모델 및 경계조건

계산모델은 Fig. 3과 같은 사각 수조이며 wave amplitude (a)와 시간간격 (Δt)를 변화시켜면서 수행하였다. 수치 해석에 사용된 계산 격자는 자유표면 형상을 보다 정확하게 예측하기 위해서 자유표면 근처에서 조밀한 형태를 취하였고, 수직벽에 대해서는 균일한 격자를 사용하였다. 경계조건은 수직벽에 대해서는 slip 조건을, 바닥벽($z=0$)에서는 no slip 조건을 적용하였다.

3. 결 과

Fig. 4(a)~(h)는 1주기 동안 속도 vector의 크기와 방향이 변화하는 것을 나타낸다. Fig. 4(a)~(d)에서는 $x=2.5m, z=5.1m$ 인 지점을 중심으로 유동이 전체적으로 반시계 방향으로, Fig. 4(e)~(h)에서는 시계 방향으로 진행한다. 수직벽($x=0m, 5.0m$)에서는 수직방향 속도성분만이 나타나고, $x=2.5m$ 에서는 수평방향 속도성분만이 나타난다. 이론적으로 속도성분이 영이 되어서 모든 에너지가 potential 에너지가 되는 시간인 1/2주기($t=1.268sec$), 1주기($2.536sec$)에서는 속도의 크기가 매우 작은것을 볼 수 있다. 바닥면에서 자유표면으로 가까워짐에 따라 속도 vector의 크기가 커짐을 볼 수 있다. Fig. 5는 1주기 동안에 $x=0m, 2.5m, 5.0m$ 에서 표적입자의 수평, 수직방향 속도성분을 표시한 것이다. Fig. 4의 속도장 형상에서 개략적으로 볼 수 있듯이 1/2주기로 전체적인 유동장의 방향이 바뀌는 것을 살펴볼 수 있다. 수직벽에서 표적입자의 수평방향 속도성분은 항상 영인 반면, 수직방향 속도성분은 자유표면이 평평하게 되는 1/4주기($t=0.634sec$), 3/4주기($t=1.902sec$)에서 선형이론에 의해서 구한 최대값 $0.124m/s$ 와 거의 일치하는 값을 가진다. $x=2.5m$ 에서는 표적입자의 수평방향 속도성분은 1/4주기, 3/4주기에서 선형이론에 의해서 구한 최대값보다 다소 큰 값을 나타내고, 수직속도 성분은 거의 영에 가깝다. 시간이 지남에 따라 주기가 변하게 되어서 선형이론에 의해 구한 속도 성분이 최대, 최소값을 가지는 시간과 다소 일치하지 않음을 볼 수 있다. Fig. 6은 1주기동안 자유표면의 형상변화를 나타낸다. 유체 입자는 $x=2.5m, z=5.1m$ 인 지점을 중심으로 회전하며, 자유표면 형상들이 회전중심에서 일치하지 않고 다소 어긋나 있다. 이러한 현상은 유한 차분식이 정해진 공간영역에 걸쳐서 평균값과 관계가 있고, amplitude가 증가함에 따라 자유표면에 조금의 fluctuation이 발생하고 있어서 회전 중심에서 입자의 속도가 영이 되지 않아서 회전 중심이 다소 움직이기 때문이다. Fig. 7에서 자유표면의 형상 변화를 3차원적으로 나타내었다.

점성 유체에서 선형파 이론에 의하면 점성의 영향은 단지 wave amplitude를 감소시키는 것이며, 파장, 위상(phase)에는 영향을 미치지 않는다. 그러나 비선형해에서는 점성 영향은 모든것을 변화시킨다 [4]. 일정한 수면 높이를 가지는 wave amplitude의 감소는 벽 근처의 경계층에서 일어나는 점성 손실이 주요한 요인이 될 수 있다[9]. 여러번 주기운동 후 wave amplitude가 실제로 감소하는지 알아보기로 하자. Fig. 8은 $t=40\text{sec}$ 동안 왼쪽벽에서 자유표면의 amplitude 변화를 나타낸다. 선형 이론해와 비교해 볼 때 시간이 진행됨에 따라 amplitude는 조금씩 감소하며, 주기는 조금씩 길어지는 경향을 나타내었다.

4. 결론

본 연구에서는 자유표면을 수반한 3차원 유동을 해석하기 위하여 질량보존방정식을 체적보존방정식으로 변형시켜 자유표면에 복잡한 경계조건을 직접 부여하지 않고 내재적으로 부과하는 방법을 사용하여 해석하였으며, 자유표면 형상을 나타내기 위하여 표적입자를 자유표면상에 위치시켜 Lagrangian 방법에 의해서 계산하였다. 이러한 방법을 periodic standing wave에 대해서 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. amplitude가 증가할수록 자유표면이 oscillation하면서 불안정한 형상을 나타낸다.
2. 벽 근처의 경계층 및 유동내에서의 점성손실로 인해 wave amplitude는 여러번 주기 운동 후 점점 감소하게 된다.
3. 수치해석 결과 자유표면에 복잡한 경계조건을 직접 부여하지 않고서도 3차원 자유표면 유동을 비교적 정확하게 해석할 수 있음이 증명되었다.

참고 문헌

1. Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", Phys. Fluids, Vol.8, No.12, 1965, pp.2182-2189
2. Chan, R.K.C and Street, R.L., "A computer study of finite amplitude water waves", J. of Computational Physics, Vol.6, 1970, pp.68-94
3. Nichols, B.D. and Hirt, C.W., "VOF method for the dynamics of free boundaries", J. of Computational Physics, Vol.39, 1981, pp.201-225
4. Tang, C.J. and Patel, V.C., "Viscous effects on propagation and reflection of solitary waves in shallow channels", J. of Computational Physics, Vol.88, 1990, pp.86-113
5. Miyata, H. and Nishimura, S., "Finite-difference simulation of nonlinear ship waves", J. Fluid Mech., Vol.157, 1985, pp.327-357
6. Spalding, D.B., "A method for computing steady and unsteady flows possessing discontinuities of density", CHAM Report 910/2, 1974.
7. Maxwell, T.T, "Numerical modelling of free surface flows", Imperial college, 1977.
8. Jun, L., "Computer modelling of flows with a free surface", Imperial college, 1986
9. Miles, J.W., "Surface-wave damping in closed basins", Proc. Roy. Soc. Lond. A., Vol.297, 1967, pp.459-475
10. Patankar, S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, 1982
11. Lamb, H., "Hydrodynamics", Dover, 1932
12. 정해음, "자유표면을 수반한 비압축성 점성유체 유동의 수치적 연구", 포항공대 석사학위논문, 1992.

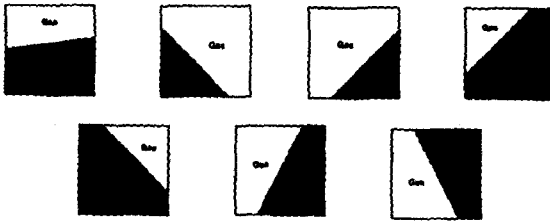


Fig. 1 자유표면에 접하는 검사면의 다양한 형태들

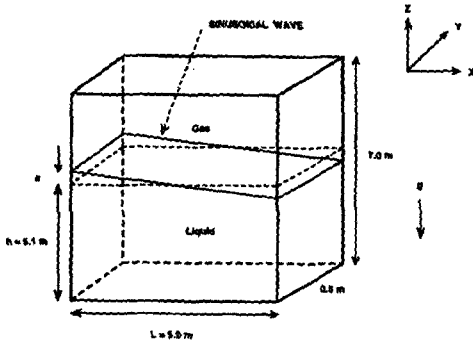


Fig. 3 계산모델 개략도

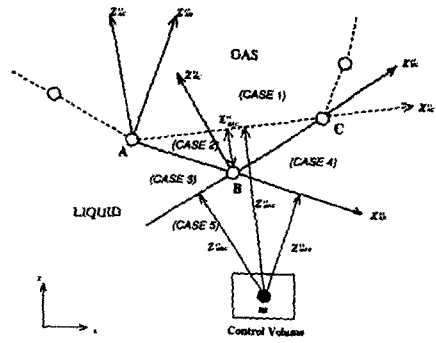
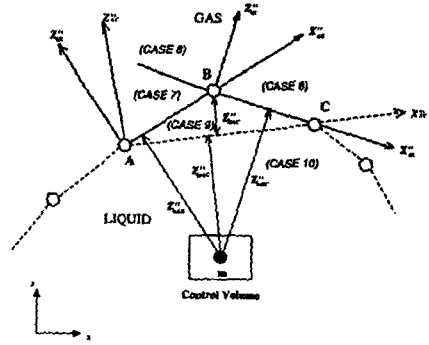


Fig. 2 표적입자를 포함하지 않는 검사체적에서 유체의 종류를 결정하는 좌표계

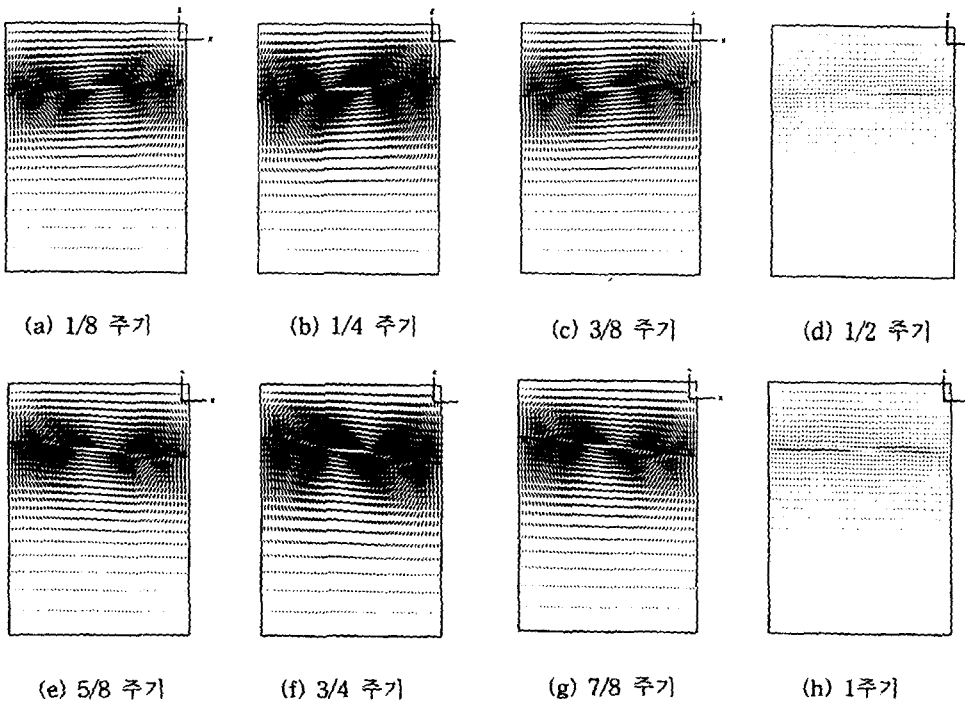
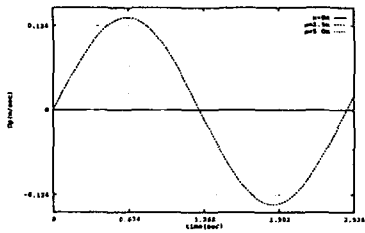
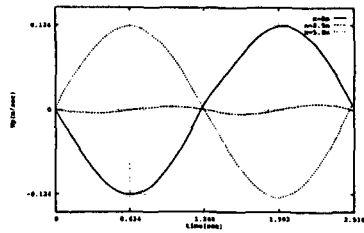


Fig. 4 속도장 ($a=0.01m$, $\Delta t=0.02sec$)



(a) 수평방향 속도성분 (u_p)



(b) 수직방향 속도성분 (w_p)

Fig. 5 표적입자의 속도변화 ($a=0.05m, \Delta t=0.02sec$)

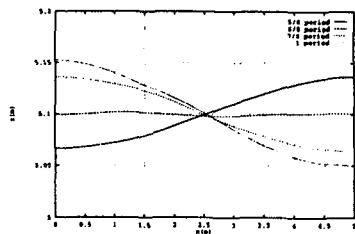
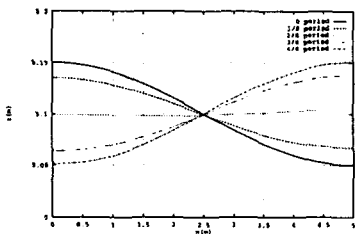
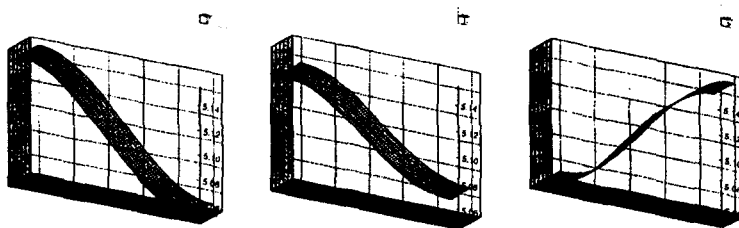


Fig. 6 자유표면 형상변화 ($a=0.05m, \Delta t=0.02sec$)



(a) 0 주기

(b) 1/8 주기

(c) 1/2 주기

Fig. 7 자유표면 형상 변화 3차원 도시 ($a=0.05m, \Delta t=0.01sec$)

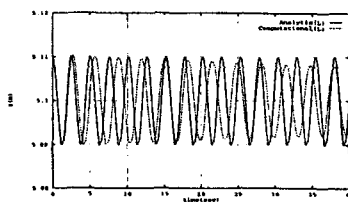


Fig. 8 다주기 동안 수직벽에서 자유표면 형상변화 ($a=0.01m, \Delta t=0.02sec$)