

# 날카로운 블록 코너 주위의 타원형 격자 생성 기법에 의한 격자선의 겹침에 대한 고찰

A Study on the Overlap of Grid Lines around a Sharp Convex Corner  
with the Elliptic Grid Generation Schemes

김 병수<sup>1)</sup>

Byoungsoo Kim

An elliptic grid generation scheme using Laplace's equations guarantees the resulting grids to be crossing-free as a result of maximum principle in its analytic form. Numerical results, however, often show the grid lines overlapping each other or crossing the boundaries, especially for very sharp convex corners. The cause of this problem is investigated, and it is found that this problem can be handled by properly modifying the coefficients of transformed Laplace's equations in the computational domain.

## 1. 서론

타원형 편미분 방정식의 해를 이용한 정렬 격자 생성 기법은 오늘날 격자 생성 분야에서 가장 광범위하게 사용되고 있는 기법으로서, 격자 생성 코드를 직접 프로그래밍 하고자 하는 전산유체 역학 분야의 연구자에서부터 대부분의 상업용 격자 생성 프로그램에 이르기까지 타원형 격자 생성 기법은 다양한 형태로 이용되고 있는 실정이다. 이를 위해 사용되는 대표적인 타원형 편미분 방정식으로는, 주어진 경계 조건을 만족하면서 가장 완만한 격자 생성을 가능케 하는 Laplace equation을 비롯하여, 격자 간격과 격자선 교차 각도의 조절을 위한 control function의 사용을 가능케 하는 Poisson equation 등을 들 수 있다. 이와 같은 타원형 격자 생성 기법을 이용함으로써 대부분의 경우 타당하고 질 좋은 격자의 생성이 가능하다.

Laplace 방정식의 특성상, 해의 최대치나 최소치는 영역 내부에 위치하지 않고 항상 영역 경계에 위치하게 된다. 이 특성은 곧, Laplace 방정식의 해를 이용하여 격자 생성을 하면 격자선의 겹침이 발생하지 않는다는 것을 의미한다. 이처럼 Laplace 방정식의 해로서 얻어지는 격자계는 이론적으로 격자선의 겹침이 발생하지 않아야 하나, 타원형 기법에 의한 격자선 들은 블록한 경계 형상 근처에서는 곡률 중심 쪽으로 모이는 특성을 가지고 있고, 날카로운 코너 근처에서는 격자선 들이 겹치는 경우가 종종 발생한다. 이와 관련한 문제점은 이미 격자 생성 분야의 선구자들이나 여러 연구자들에 의해 이미 인식되고 있는 문제이다.[1,2] 문제의 발생 원인에 대해서, Thompson 등은 타원형 기법에 의한 격자선 들은 블록한 경계 형상 근처에서는 곡률 중심 쪽으로 밀집되는 특성을 가지고 있고, 심하면 물체 내부로의 겹침이 발생한다고 설명하고 있다.[1] 한편, Tannehill 등은 미분 방정식이 유한차분화 되는 과정에서 발생하는 truncation error로 인하여 격자선의 겹침이 발생할 수 있다고 설명하고 있다.[2] 이와 같은 문제점을 해결하는 기존의 보편적인 방법으로는, 반복 계산 과정에서 격자점의 변화 폭을 제한하는 것이다. 즉, 계산된 격자점의 새로운 위치가 주변의 격자점을 넘어설 경우에는 현 격자점과 대상 주변 격자점의 중간점을 갱신될 격자점의 새로운 값으로 취하는 방법이다.[1] 이것을 좀더 일반화하면, 현 격자점을 중심으로 하는 주변 격자점들에의 최소 내접원의 반경을 계산한 후, 그 최소 내접원 반경을 지름으로 하는 원과 계산된 위치 변화 벡터와의 교차점을 새로운 격자점 위치로 택하는 방법이다. 이와 같이 타원형 격자 생성 기법에서의 격자선 겹침의 문제점과 그에 대

1) 충남대학교 항공우주공학과 (305-764, 대전시 유성구 궁동 220, Tel:042-821-6686)

한 대중적 해결 기법이 있긴 하지만, 그러한 문제의 발생 원인에 대한 정량적 규명에 근거한 근원적 해결 기법은 발표된 적이 없는 것 같다. 따라서, 격자 생성 기법에 대해서 연구하거나 프로그램을 코딩하는 연구자들은 시행착오를 통하여 습득된 나름의 know-how를 활용하여 이 문제를 해결하고 있는 듯 하다. 사정이 이러하다보니 유수한 상업용 격자 생성 코드들조차 간혹 격자선 겹침이 있는 결과 격자를 생성하기도하고, 그런 격자를 이용하여 유동해를 구할 경우 해의 수렴성이나 정확도를 악화시키는 요인이 된다.

본 논문에서는, Laplace 방정식의 해를 이용한 타원형 격자 생성 기법의 결과로 겹친 격자선을 지닌 격자가 얻어지는 경우에 대한 고찰을 통하여, 문제 발생의 원인에 대하여 살펴보고 기존의 기법과는 다른 문제 해결 기법을 제시하고자 한다.

## 2. 본론

Laplace 방정식의 해를 이용한 2차원 격자 생성은 다음과 같이, 계산 영역 좌표인  $(\xi, \eta)$ 에 대한 두 개의 Laplace 방정식을 풀어야한다. 즉,

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)의 독립 변수인  $(x, y)$ 와 종속 변수인  $(\xi, \eta)$ 의 역할을 바꾸어서 정리하면, 계산 영역에서의 좌표 변환된 Laplace 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2a)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned} \quad (3)$$

주어진 영역 경계에서의 격자 분포를 경계조건으로 하여, 얻어지는 식 (2a)와 (2b)의 해가 곧 해당 계산 영역의 각 점  $(\xi, \eta)$ 에 대응되는 물리 영역에서의 격자점  $(x, y)$ 가 된다. 통상 이 방정식들은 계산 영역에서의 격자 간격을  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ 로 취하고 2차 정확도를 갖는 중앙차분법을 이용하여 그 해를 구하는데, 그 경우의 유한차분식은 다음과 같이 정리된다. 즉,

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i-1,j} - 2x_{i,j} + x_{i+1,j}) - \frac{\beta}{2}(x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}) \\ \gamma(x_{i,j-1} - 2x_{i,j} + x_{i,j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \alpha(y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}) - \frac{\beta}{2}(y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1}) \\ \gamma(y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4b)$$

위 식에서 계수들도 1차 미분치들을 중앙차분법을 적용하여 계산한다. 이처럼 얻어진 대수방정식들을 Gauss-Seidel method나 SOR method와 같은 반복계산법을 이용하여 풀게 된다. 대부분의 경우 이러한 방법을 이용하여, 주어진 경계 조건을 만족시키는 적절한 격자계가 얻어진다. 그리고, Laplace 방정식 대신에 원천함을 갖는 Poisson 방정식을 이용하면 격자 간격이나 교차 각도 등도 조절이 가능하다. Laplace 방정식을 이용하여 생성한 격자의 예를 Fig. 1에서 보여주고 있다.

2차원 익형 주위의 유동을 전산유체역학적으로 계산할 때는 C-형의 격자계를 주로 사용하는데, 그 경우에는 주로 쌍곡형 방정식의 해를 이용하는 쌍곡형 격자 생성 기법을 이용한다. 그러나, 종종 문제에 따라서는 익형 주위에 대하여 O-형의 격자계를 사용하여야 할 경우가 있다.

일반적으로 O-형 격자계의 생성은 wake-cut을 포함한 영역 경계 격자 분포를 결정하고서 대수적 기법으로 생성한 뒤, 개선이 필요한 경우 타원형 격자 생성 기법을 적용한다. 이 경우, 대수적 격자를 초기 조건으로 하고 경계치를 주어진 값으로 고정시킨 후, 반복 계산법에 의하여 타원형 방정식을 미리 정해진 반복 계산 횟수나 수렴 조건이 만족될 때까지 계산하여 개선된 격자계를 얻는다. 한편, 이러한 과정에서 앞의 O-형 격자계의 경우, trailing-edge를 지나는 wake-cut은 경계조건으로서 고정된 값으로 남게되고 wake-cut을 가로지르는 격자선이 완만함을 유지하기 위해서는 wake-cut을 따른 격자점들이 처음부터 적절한 분포를 가지고 있어야 하는데, 이를 정하는 문제는 그리 쉽지 않다. 이에 대한 대안으로 활용되는 것이, 바로 wake-cut을 따른 격자점 분포도 내부 격자점처럼 타원형 격자 생성과정의 풀이 대상, 즉 “부유 경계 (floating boundary)”로 처리하는 것이다. 이러한 경우를 포함해서, 익형 뒷전처럼 날카로운 블록 코너 주위에 대해 격자생성을 위한 타원형 미분방정식의 해를 구해야하는 경우들이 적지 않다.

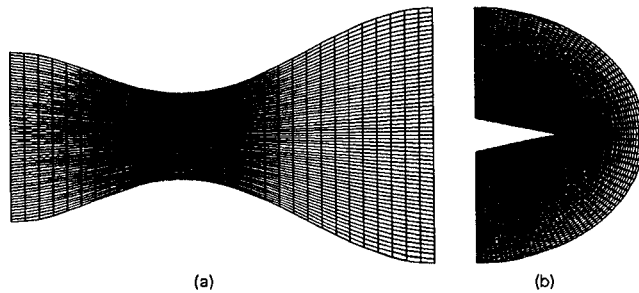


Fig. 1 Examples of elliptically generated grids

이처럼 날카로운 블록 코너 주위에 대한 타원형 격자 생성과 관련한 일반적인 문제의 한 예로 Fig. 1(b)에서와 같은 문제를 생각해 볼 수 있다. 문제점을 좀 더 확연히 보기 위하여 Fig. 2에서와같이 바깥 경계도 코너를 가진 직선 형상의 영역에 대하여 Laplace 방정식을 이용한 타원형 격자 생성 결과를 보여주고 있다. Fig. 2의 여섯 개의 격자계 모두 21x21 개의 격자점들을 가지고 있는 경우이고, 반복 계산이 충분히 수렴된 결과 격자들이다.

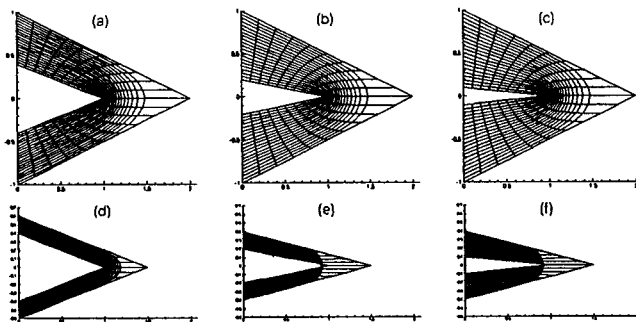


Fig. 2 Examples of elliptically-generated grids for regions around a convex corner by using the Laplace equations

Fig. 2(e)와 (f)의 경우, 블록 코너 근처의 격자선들이 물체 내부로 침범하거나 서로 겹치고 있음을 알 수 있다.

### 3. 해결 방법

Gauss-Seidel 방법이나 Point-SOR 방법 등을 이용하여 타원형 방정식을 반복적으로 풀 경우 격자선 겹침은 결국 어느 한 점에서 시작될 것이므로, 한 개의 내부 격자점만을 지닌 3x3 격자계에 대해서 수치실험을 해 봄으로써 격자선 겹침 문제의 원인을 좀더 분명히 찾을 수 있을 것이다. 이 경우 2차의 중앙차분화를 통하여 얻어진 대수식은  $x, y$  각각에 대해 하나의 식으로서, 반복 계산이 필요 없이 한번에 구해진다. 즉,

$$x_{i,j} = \frac{1}{2(\alpha + \gamma)} [ \alpha(x_{i-1,j} + x_{i+1,j}) + \gamma(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) - \frac{\beta}{2}(x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1}) ] \quad (5a)$$

$$y_{i,j} = \frac{1}{2(\alpha + \gamma)} [ \alpha(y_{i-1,j} + y_{i+1,j}) + \gamma(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) - \frac{\beta}{2}(y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j+1}) ] \quad (5b)$$

이 식을  $(i, j) = (2, 2)$ 인 내부점에 대해서 상수  $\alpha, \beta, \gamma$ 를 이용하여 계산하면 된다. Fig. 3은 격자 간격들을 바꿔가면서 3x3 격자계의 유일한 내부점이 Laplace 방정식의 해로 얻어진 점들, 즉 식(5)의 해들을 보여주고 있다.

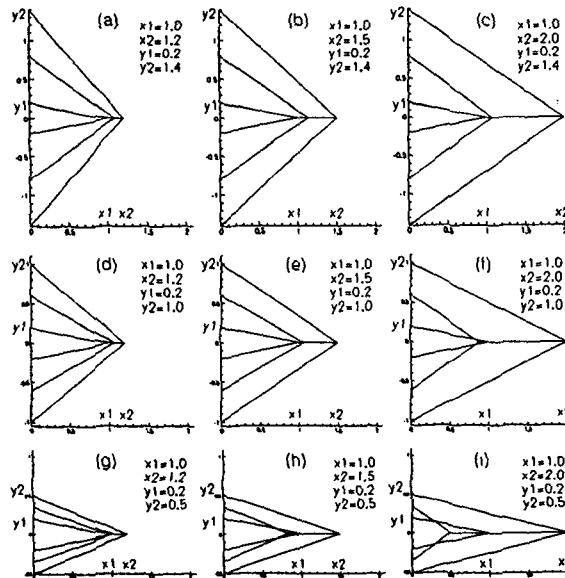


Fig. 3 Comparison of elliptically generated grids of 3x3 size with various spacing

위의 결과에서 알 수 있는 것은 동일한 각도의 블록한 코너 주위의 내부 격자점이 물체 내부에 침범 여부는 주변 격자점들과의 상대적 거리와 관련이 있다는 것이다. 그리고, 식(4a)와 (4b)로 중앙차분화된 Laplace 방정식의 해로는 위의 몇몇 경우와 같은 겹침 현상은 피할 수 없

는 결과이다. 이 겹침 문제를 해결할 수 있는 방법은 유일한 내부 격자점의 최종위치가 반드시 물체 내부 코너(x1)와 영역 외부 코너(x2) 사이에 위치하도록 하는 것이고, 이를 수식적으로 적용할 수 있는 방법은 식(2a)와 (2b)를 변형하는 것이다. 즉, 코너를 따라 y 좌표가 감소하는 방향을  $\xi$ -방향, 내부 코너에서 바깥 코너 쪽으로 x 좌표가 증가하는 방향을  $\eta$ -방향이라고 한다면, 식(2a)와 (2b)에서  $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$  항에 상대적으로 여타 항들 보다 높은 가중치를 줌으로써, 내부 격자점의 최종 위치가  $\eta$ -방향의 양쪽 경계점의 내부에 위치하도록 할 수 있다. 극단적인 예로는,  $\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$  항에 무한대의 가중치를 줄 경우 식(2a)와 (2b)는 각각  $\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$ 과  $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$ 로 바뀐다. 이 식들의 중앙차분법에 의한 수치적 해의 의미는  $\eta$ -방향으로 이웃한 두 점의 산술 평균을 계산 대상점의 결과 좌표로 취한다는 것이고, 그 경우 내부 격자점의 이웃 점들과의 겹침 현상은 발생하지 않는다. 이처럼 겹침을 피할 수 있는 선택적 가중치를 적용하기 위하여, 식(2a)와 (2b) 대신에 다음과 같이 변형된 방정식을 생각해보자. 즉,

$$w_\xi \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + w_\eta \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6a)$$

$$w_\xi \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + w_\eta \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6b)$$

여기서,  $w_\xi$ 와  $w_\eta$ 는 각각  $\xi$ 와  $\eta$ -방향의 가중치를 의미하며,  $\xi$ 나  $\eta$ -방향으로 겹침이 발생하게 되면 1보다 큰 가중치를 적용하고, 겹침이 없으면 원래의 방정식과 같아지도록 1을 적용한다. 이제, 1보다 큰 가중치를 어떤 경우에, 그리고 얼마의 값을 적용해야 하는지에 대해서 살펴보자. 앞의 일련의 3x3 격자계 문제들은  $\xi$ -방향으로 대칭적인 경우로서,  $\beta$ 는 0인 경우이다. 이 문제에 대하여 여러 가지의 수치 실험을 행한 결과, 다음과 같은 결과를 얻었다. 즉,

$$(1) \frac{\gamma}{\alpha} \frac{L_\eta}{L_\xi} = \left(\frac{L_\eta}{L_\xi}\right)^2 \frac{L_\eta}{L_\xi} < 1 \text{ 이면, } \quad \text{계산 대상점이 내부 코너를 침범함}$$

$$(2) \frac{\gamma}{\alpha} \frac{L_\eta}{L_\xi} = \left(\frac{L_\eta}{L_\xi}\right)^2 \frac{L_\eta}{L_\xi} = 1 \text{ 이면, } \quad \text{계산 대상점은 내부 코너와 일치함}$$

$$(3) \frac{\gamma}{\alpha} \frac{L_\eta}{L_\xi} = \left(\frac{L_\eta}{L_\xi}\right)^2 \frac{L_\eta}{L_\xi} > 1 \text{ 이면, } \quad \text{계산점은 양 끝점 사이에 위치함}$$

여기서,  $L_\xi$ ,  $L_\eta$ ,  $\overline{L_\xi}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_\xi &= \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2}, \\ L_\eta &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2} \\ \overline{L_\xi} &= \sqrt{(x_{i+1,j-1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1})^2} \\ &\quad + \sqrt{(x_{i-1,j-1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1})^2} \end{aligned} \quad (7)$$

이때,  $\overline{L_\xi}$ 는 겹침이 발생하는 주변점  $(i, j-1)$ 를 지나는  $\xi$ -방향 격자선의 세 점에 걸친 길이이다. 따라서, 음의  $\eta$ -방향으로의 겹침이 발생할 경우에는  $w_\eta$ 의 값을 1보다 큰 값, 즉 다음과 같이 50%의 여유 마진을 가진 값을 적용한다.

$$w_\eta = 1.5 \left( \frac{\gamma}{\alpha} \frac{L_\eta}{L_\xi} \right)^{-1} \quad (8a)$$

이와 같은 가중치 계산법은  $\xi$ 와  $\eta$ -방향이 바뀌거나, 겹침이 발생하는 방향이 바뀌더라도, 대칭적으로 적용이 가능하다. 즉,  $\xi$ -방향으로의 겹침이 발생할 경우는  $w_\xi$ 의 값을 1보다 큰 값, 즉 다음과 같이 50%의 여유 마진을 가진 가중치를 적용한다.

$$w_\xi = 1.5 \left( \frac{\alpha}{\gamma} \frac{L_\xi}{L_\eta} \right)^{-1} \quad (8b)$$

이상과 같은, 가중 Laplace 방정식을 이용하여 앞의 Fig. 2의 예들에 적용하여 수렴된 격자계를 Fig. 4에 보여주고 있다.

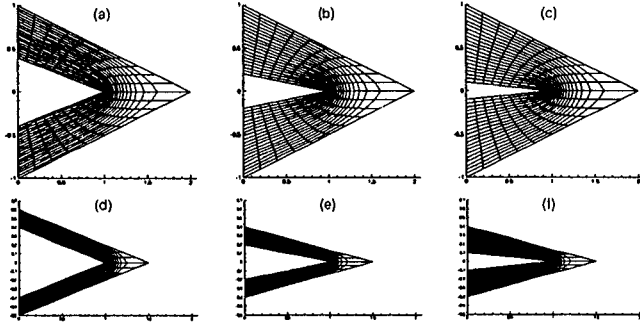


Fig. 4 Examples of elliptically-generated grids for regions around a convex corner by using the modified Laplace equations

이 결과에서 알 수 있듯이, Fig. 4(e)와 (f)의 경우 원래의 Laplace 방정식에 의한 수렴된 격자는 겹침 문제가 있었으나, 가중치를 이용한 변형된 Laplace 방정식을 이용한 해에서는 격자선 겹침이 없는 해를 보여주고 있다.

#### 4. 결론

이상과 같이, 볼록 코너 주위에 대하여 Laplace 방정식의 해에 의한 격자 생성의 결과들을 살펴본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 볼록 코너 근처의 격자선의 겹침 현상의 발생 여부는 코너의 각도 자체보다는 주변 격자들간의 상대적 간격에 의해서 좌우된다.
- 3x3 크기의 단순화된 격자계에 대한 수치 실험을 통하여 격자선 겹침의 발생 여부에 대한 정량적 점검이 가능함을 보였다.
- 2차의 정확도를 지니는 중앙차분식에 의한 Laplace 방정식의 해를 통한 격자계는, 경계 격자점의 분포에 따라서 겹침이 발생하는 문제에 대해서는 그 자체로서는 겹침을 피할 수 없다.
- 격자선의 겹침이 예상되는 경우, 계산 영역에서의 변환된 Laplace 방정식의 계수에 가중치를 적절히 줌으로써 격자선 겹침 문제를 해결할 수 있음을 확인하였다.

#### 참고문헌

- [1] J. Thompson, Z. Warsi, and C. Mastin, *Numerical Grid Generation*, North-Holland, 1985
- [2] D. Anderson, J. Tannehill, and R. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd Ed., Mc-Graw Hill, 1997