# 3차원 압축성 유동 해석을 위한 효율적인 다중 격자 DADI 기법

An Efficient Multigrid Diagonalized ADI Method
for 3-Dimensional Compressible Flow Analysis

박수형*, 성춘호, 권장혁 (한국과학기술원)
Soo-Hyung Park, Chun-ho Sung, Jang Hyuk Kwon

An efficient 3-dimensional compressible solver is developed using the second-order upwind TVD scheme and the multigrid diagonalized ADI method. The multigrid method is improved so that the present DADI algorithm obtains better convergence rates. Results are computed on Cray C90 computer for transonic unsaperated flows past ONERA-M6 wing to demonstrate the accuracy and efficiency. The results show good agreement with experimetal data. A reduction of four orders of residual for 3-dimensional transonic flow is obtained about 99 seconds.

## 1. 서 론

항공기 주위의 유동장 해석이나 설계에 있어서 CFD의 기법들을 적용하기 위해 정확하고 빠른 해석 기법들이 계속적으로 개발되어 왔다. 그러나, 컴퓨터의 급격한 발달에도 불구하고 3차원 형상 주위의 유동장을 해석하는 데는 여전히 많은 시간이 소요되고 있다. 따라서, 정확하고 효율적으로 수치해를 구하기 위해 다양한 공간 차분 기법을 사용한 음해법들이 개발되어 왔고, 특히 여러 가지 기법들에 다중 격자 기법(multigrid method)[1][2]을 적용한 연구들이 최근에 많이 수행되었다. 본 연구의 목적 또한 2차 정확도의 풍상차분법[3]을 사용한 DADI 방법에 다중 격자 기법을 적용하여 정확하고 빠르게 정상해를 얻는 것이다. Pulliam[4] 등에 의해 개발되고 발전한 DADI(Diagonalized ADI) 기법은 빠르게 정상해를 얻는 데 매우 효율적인 시간 전진 기법이다. 수치유속(numerical flux)으로 중심차분법을 사용한 연구[5][6]들은 많이 진행된 반면, upwind TVD 기법에 DADI 기법을 적용한 연구[7]는 그동안 많이 수행되지 못하였다.

본 연구에서는 톱니 사이클 다중 격자 기법을 DADI 기법에 적합하도록 개량함으로써 매우 효율적인 압축성 비점성 유동 해석 기법을 개발하였다. 개발한 다중 격자 DADI code를 가지고 3차원 ONERA M6 날개 주위의 유동장을 해석하였다.

## 2. 수치 해석 기법

### 2-1. 2차 upwind TVD 기법

압축성 비점성 유동의 지배방정식인 Euler 방정식을 무차원화하고, 3차원 일반좌표계($\xi$, $\eta$,

$\zeta$,t)에서 미분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi}+\frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta}+\frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta}=0 \tag{2.1}$$

지배방정식을 공간에 대해 이산화하기 위해 격자 중심 유한체적법(cell centered finite volume method)을 사용하면 다음과 같은 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\widehat{Q_{ij}}}{dt}+R_{ij}=0 \tag{2.2}$$

여기서 잔류치(residual) $R_{ij}$는 다음과 같다.

$$R_{ij}=(\ \hat{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}-\hat{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}+\hat{G}_{i,j+\frac{1}{2},k}-\hat{G}_{i,j-\frac{1}{2},k}++\hat{H}_{i,j,k+\frac{1}{2}}-\hat{H}_{i,j,k-\frac{1}{2}})$$

계산 격자의 벽면에서 구하는 값들은 모두 Roe가 제안한 가중평균값으로 구한다. 식 (2.2)에서 대류항 F,G,H를 구할 때, 충격파와 같은 불연속면을 잘 잡아내면서 수치적 불안정을 배제할 수 있는 2차 정확도의 upwind TVD 기법을 이용하였으며, 모든 계산에서 minmod 제한자(limiter)를 사용하였다.

## 2-2. Diagonalized ADI 기법

(2.2) 식에서 각 유속 벡터들을 근사선형화하고 ADI형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[I+\Delta t\delta_\xi(\hat{A}+\hat{D}_\xi)][I+\Delta t\delta_\eta(\hat{B}+\hat{D}_\eta)][I+\Delta t\delta_\zeta(\hat{C}+\hat{D}_\zeta)]\ \ \Delta\hat{Q}_{ijk}{}^{n+1}\ =-\Delta t\,R_{ijk}{}^{n} \tag{2.3}$$

여기서

$$\hat{D}_{k+\frac{1}{2}}=T_{k+\frac{1}{2}}diag[-\Psi(\lambda)(1-\frac{L_{k+\frac{1}{2}}}{\alpha_{k+\frac{1}{2}}})]\ T_{k+\frac{1}{2}}{}^{-1}\Delta_{k+\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

시간정확도를 필요로 하지 않으므로 1차의 연산자를 사용해 내재적 연산자를 구성하였다. 식 (2.4)는 L을 영(zero)으로 놓음으로써 1차의 내재적 감쇠함수로 바뀌게 된다.

$$\hat{D}_{k+\frac{1}{2}}=T_{k+\frac{1}{2}}diag[-\Psi(\lambda)]\ T_{k+\frac{1}{2}}{}^{-1}\Delta_{k+\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

이와 같은 1차의 연산자를 사용하면 블록 삼각 대각 행렬을 풀게 됨으로써 계산시간의 향상을 얻게 된다.

식 (2.5)에 의해 식 (2.3)에서 왼쪽에 있는 모든 항이 Jacobian 행렬의 고유벡터 행렬로 분해될 수 있다. 식 (2.3)을 DADI 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$T_\xi[I+\Delta t\delta_\xi(\hat{\Lambda}_\xi-\hat{\Psi}_\xi)]\hat{N}[I+\Delta t\delta_\eta(\hat{\Lambda}_\eta-\hat{\Psi}_\eta)]\hat{M}[I+\Delta t\delta_\zeta(\hat{\Lambda}_\zeta-\hat{\Psi}_\zeta)]\ \ T_\zeta^{-1}\ \ \Delta\hat{Q}_{ijk}{}^{n+1}=-\Delta t\,R_{ijk}{}^{n} \tag{2.6}$$

여기서

$$\hat{N}=T_\xi^{-1}T_\eta\ ,\quad \hat{M}=T_\eta^{-1}T_\zeta \tag{2.7}$$

이와 같은 방법에 의해 블록 삼각 대각 행렬을 5개의 독립된 스칼라 삼각 대각 행렬로 바꿈으로써 계산시간을 크게 단축할 수 있다.

계산 격자마다 다른 시간 간격을 적용해 허용가능한 최대의 시간 간격을 사용하도록 하여 수렴을 크게 증진시키는 국소 시간 간격(local time stepping)을 사용하였다.

식 (2.6)의 왼쪽을 구성하는 내재적 연산자들은 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 공간 차분에 사용된 유속함수로부터 유도된 내재적 연산자가 매 반복계산에서 가장 작은 대각화 오차를 가지므로 식 (2.2)에 주어진 유속함수 자체를 분해하는 방법으로 내재적 연산자를 구성하였다.[7] 간략화를 위해 1차원에서 유도된 내재적 연산자는 다음과 같다.

$$T[I+\Delta t(\nabla\Lambda^{+}+\Delta\Lambda^{-})]T^{-1}\Delta Q=-\Delta t\,\partial F \tag{2.8}$$

$$\Lambda^{\pm}=\frac{1}{2}(\Lambda_i\pm\Psi(\Lambda_{i\pm\frac{1}{2}})) \tag{2.9}$$

여기서 ▽는 후방차분(backward difference), △는 전방차분(forward difference)을 나타낸다.

## 2-3. 다중 격자 기법(multigrid method)

본 연구에서는 다중 격자 기법을 DADI기법에 효율적으로 적용하기 위해 개량된 톱니(saw-tooth) 싸이클을 적용하였다. 이와 같은 방법은 Yoon과 Kwak[8]의 LU-SGS 기법에서 V 싸이클 다중 격자기법을 적용할 때 유사하게 사용된 바 있다.

a. 조밀한 격자에서 2번의 시간 전진을 수행하는 대신 두 번의 시간 전진에 한 번씩 다중 격자 싸이클을 적용한다.

b. 조밀한 격자의 유동변수들은 면적 가중 평균(area-weighted average)에 의해 성근 격자의 초기값으로 전달된다. 이 초기값으로 여러번의 시간 전진을 수행한다. 본 연구에서는 (Level+1) 횟수만큼의 시간 전진을 수행하였다.

c. 성근 격자의 잔류치를 구하기 위해서 축성 함수를 다음과 같이 구한다.

$$P_{2h}=\sum R_h-R_{2h}(Q_{2h}^{(0)}) \tag{2.10}$$

d. 성근 격자에서 수정량이 계산된 후, 가장 성근 격자에 도달할 때까지 b-d 의 과정을 반복한다.

e. 가장 성근 격자에 도달하면, 가장 성근 격자에서 보존 변수의 변화량을 trilinear 보간법을 이용해 조밀한 격자로 옮긴다.

$$\Delta Q_h=Q_h^{(m)}-Q_h^{(0)}+I_{2h\to h}(Q_{2h}^{(m)}-Q_{2h}^{(0)}) \tag{2.11}$$

여기서 I는 trilinear 보간 연산자이다.

f. 가장 조밀한 격자에 도달할 때까지 e의 과정을 반복한다.

다중 격자 기법은 고주파 성분의 오차를 성근 격자계에서 감쇠시켜 수렴성을 높이는 특성과 파동의 전달을 가속시키는 특성에 의해 수렴을 가속시키게 된다. 한편, DADI기법은 CFL 수가 커짐에 따라 전반적인 감쇠특성은 좋아지지만 고주파 감쇠특성은 나빠지는 것으로 알려져 있다. 중심차분법을 사용한 Caughey[5][6]는 인공점성항의 계수를 조정함으로써 이 문제를 어느 정도 해결할 수 있었으나, 풍상차분법을 사용하는 기법들에서는 이와 같은 조절이 불가능하다. 그러므로, 본 연구에서는 고주파 감쇠특성에 크게 의존하는 기존의 방법들과 달리 CFL이 커짐에 따라 좋아진 전체 감

쇠특성을 이용해 빠르게 잔류치를 전파시키는 현재의 방법을 택하였다.

### 2-4. 경계 조건

수렴성과 안정성의 증진을 위해 Riemann 불변치(invariant)를 이용한 경계조건을 사용하였다. 원거리 경계 조건으로 경계 격자의 경계면에 수직인 방향의 속도성분이 초음속인 경우, 유동이 계산 영역으로 유입될 때는 자유흐름의 값으로 고정시키고 유출될 때에는 하나 안쪽의 값을 외삽하였다. 아음속인 경우에는 Riemann 불변치를 사용한 특성경계조건을 사용한다. 벽면에서 밀도와 에너지 항은 하나 위의 값으로 외삽하고, 속도는 벽면에 수직인 방향의 속도가 영이 되도록 준다.

## 3. 결과 및 토론

위의 기법을 3차원 ONERA M6 날개(wing)에 적용해 수렴성과 정확도를 검증하였다. 자유흐름 조건(freestream conditions)은 마하수가 0.8395이고, 3.06의 앙각이 주어진 박리(separation)가 없는 유동이다. 이러한 유동조건하에서는 비점성 수치 기법으로 해를 구하여도 타당한 해를 제공한다.

계산에 사용된 격자는 O-H type이고, 격자점 수는 129×33×33이다. 계산은 CRAY C90 벡터 컴퓨터에서 수행되었다. 모든 Do-loop를 벡터화하기 위해 tricyclic algorithm을 사용해 삼각대각행렬을 계산하였다. 현재의 code는 단일 격자에서 격자점 당 단위 연산 당 6.52 $\mu$s, 4단계 다중 격자를 사용할 경우 8.43 $\mu$s가 소요되었다. 사용된 CFL 수는 10이다.

그림1은 날개 표면 위의 압력계수 분포도이다. 결과는 날개뿌리로부터 스팬길이의 20%, 44%, 65%, 96% 지점들의 압력계수 분포들이다. 이들 단면의 결과는 실험치가 있고, 여러 가지 수치해법의 검증을 위해 많이 사용되었다. 본 기법은 앞전에서 생긴 충격파를 정확하게 포착하고 있으며, 충격파의 위치도 비점성 효과를 고려할 때 정확하다고 볼 수 있다. 현재의 유동 조건에서 전형적으로 나타나는 $\lambda$-형상의 충격파가 나타나고 있음을 볼 수 있다.

그림 2는 단일 격자계를 사용한 경우의 수렴과정도이다. $10^{-10}$ 까지 수렴하는데 1998초가 걸렸고, 이때 2178번의 반복연산이 필요하였다. 양력계수의 수렴과정을 보면 이미 $10^{-4}$ 정도에서 거의 수렴이 완료되었음을 알 수 있다. $10^{-4}$까지 수렴하는 데는 602초가 걸렸다. 그림 3은 다중 격자계를 사용한 경우의 수렴과정도이다. $10^{-4}$까지 수렴하는 데 99초, $10^{-10}$까지 수렴하는 데 680초가 걸렸다.

2차 정확도의 upwind TVD 기법이 인공점성을 포함한 중심차분법에 비해 매우 정확한 반면 수치 유속을 계산하는 시간은 중심차분법에 비해 2배 정도이다. 그러나, 현재의 DADI 기법이 upwind TVD을 사용하고 있음에도 현재 보고된 가장 빠른 code[8]보다도 빠른 수렴성을 보이고 있다. 이러한 수렴성은 첫째, 수치유속과 가장 일치하는 내재적 연산자의 선택, 둘째 나쁜 고주파감쇠특성을 고려한 톱니싸이클 다중 격자 기법의 개량에 의해 얻어졌다고 볼 수 있다. 이와 같은 놀라운 수렴성은 현재의 다중 격자 DADI 기법이 upwind TVD 기법과 매우 잘 일치하는 기법이며 3차원 문제의 정상해를 구하는 데 매우 효율적인 기법임을 보여주고 있다.

## 4. 결 론

3차원 압축성 유동장을 효율적으로 풀 수 있는 DADI 다중 격자 기법을 개발하였다. Euler 방정식을 유한 체적 기법을 사용한 2차 정확도의 풍상차분법으로 이산화하였다. 계산시간을 절감하기 위해 대각화된 ADI기법을 도입하였으며, DADI 기법에 적합하도록 톱니 싸이클 다중 격자 기법을 개량하여 수렴성을 높였다. ONERA M6 날개 주위의 유동장을 풀어 개발한 수치 기법의 정확도와 효율성을 검증하였다. 예제에 대해 CRAY C90 벡터 컴퓨터에서 수렴오차가 $10^{-4}$까지 수렴하는 데 99초가 소요되었다. 이와 같은 수렴성은 upwind TVD 기법을 사용한 현재의 다중 격자 DADI 기법이 정확하고 매우 효율적으로 3차원 압축성 유동장을 해석할 수 있는 기법임을 보여 준다.

## 감사의 글

본 연구는 98년도 항공우주연구소의 "3단형 과학로켓 개발사업" 위탁연구의 일부로써 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Jameson, A. "Solution of the Euler Equations by a Multigrid Methods", Appl. Math. Comput., Vol.13, pp.327-356, 1983
2. Park, T.S., Kwon, J.H., "An Improved Multistage Time Stepping for Second-order Upwind TVD Schemes", Cpmputers & Fluids, Vol.25, No.7, pp.629-646, 1996
3. Yee, H.C., "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Schock Capturing Methods", NASA Technical Memorandum 101088, 1989
4. Pulliam, T.H., Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Apploximate-Factorization Algorithm", J.C.P., Vol.39, pp.347-363
5. Caughey, D.A., "Diagonal Implicit Multigrid Algorithm for the Euler Equations", AIAA Journal, Vol.26, No.7, pp.841-851, 1988
6. Caughey, D.A., "Implicit Multigrid Euler Solutions with Symmetric Total-Variation-Diminishing Dissipation", AIAA paper No.93-3358-CP, 1993
7. 박수형, 성춘호, 권장혁, " Upwind TVD 기법을 이용한 효율적인 다중격자 DADI 기법", 한국항공우주학회 춘계발표회, 71-74쪽, 1998
8. Yoon S.H., Kwak, D.C., "Multigrid Convergence of an Implicit Symmetric Relaxation Schemes", AIAA paper No.93-3357-CP, 1993

여기서 윗첨자 i는 각 시간 단계에 대한 반복 계산 단계를 나타낸다. 식 (9)의 과정은 수렴 속도가 느리므로 우변항의 $\{\Delta Q\}$값을 가능한 최근에 계산된 값을 사용함으로써 수렴성을 증진시킬 수 있다. 이러한 과정은 식 (10)과 같이 나타난다.

$$[A]^n\{\Delta Q\}^{i+1} = -\{R\}^n - [O]^n\{\Delta Q\}^{i,i+1} \tag{10}$$

식 (10)에서 우변항의 $\{\Delta Q\}$항의 값을 최근에 계산된 값으로 대치시키는 것은 셀 coloring을 통해 이룰 수 있으며, 또한 coloring을 통해 벡터화도 가능하다. 셀 coloring방법은 공통 face를 가지는 두 개의 셀이 한 그룹에 속하지 않도록 coloring을 하는 것이다. 이러한 방법을 사용하면 첫번째 그룹의 유동변수들은 우변항의 $\{\Delta Q\}$항으로 반복 계산 전단계의 값을 이용하는 point-Jocobi 방법에 의해 계산 되며, 다음의 연속하는 그룹에 속한 유동변수들은 같은 반복 계산 단계의 값들을 이용하게 되어 Gauss-Seidel 형태의 계산 방법이 되므로 좀 더 빠른 수렴성을 가지게 된다. 또한 coloring을 통해 벡터화도 이룰 수 있게 된다.[13,14]

앞에서 설명한 방법을 종합하여 내재적 시간 적분법을 나타내면 식 (11)과 같으며, 유동 지배 방정식과 난류 지배 방정식은 분리하여 계산 하였다.

$$\left[\frac{vol}{\Delta t} I + \sum_{j=1}^{k} A^{+\,n}S\right]\Delta Q_i^i = -[R]_i^n - \sum_{j=1}^{k} A^{-\,n}S\Delta Q_j^{i,i+1} \tag{11}$$

### 2.4 경계조건

물체 표면에서의 경계조건으로는 비점성 유동의 경우 flow tangency 조건을 적용하였으며, 점성유동의 경우 물체 표면에 대한 정지조건을 적용하였다. 아음속 유동의 원방 경계조건으로는 유입유동과 배출유동의 특성치와 엔트로피를 이용하여 규정할 수 있다. 흡입유동에서의 Riemann invariant는 자유유동에서부터 결정되어지며, 배출유동에서는 유동 영역 안에서부터 외삽하여 구하여 진다.

통상의 높은 레이놀즈 수를 갖는 유동의 경계층과 표면 마찰계수를 정확하게 예측하기 위해서는 경계층 안에 30개 이상의 격자점들을 물체 표면의 수직 방향으로 분포시켜 주어야 한다. 이러한 밀집되어 있는 많은 수의 작은 크기의 셀들을 갖는 격자를 사용하여 점성유동 해석을 하기 위해서는 매우 많은 수치적 반복계산이 요구된다. 이러한 어려움을 극복하기 의해서 본 연구에서는 물체 표면에서의 경계조건으로 경험식에 기초한 벽면함수(wall function) 경계조건을 도입하였다. 물체 표면에서의 점성항들의 계산에 필요한 유동변수들의 미분값들은 물체 표면으로부터 수직한 방향에 대해서는 벽면함수 경계조건으로부터 주어지며, 그 외의 방향에 대해서는 물체 표면에 인접한 셀로부터 외삽하였다. 난류방정식에 대한 물체 표면에서의 $k$-$\varepsilon$ 값들은 벽면경계조건에서부터 구하였으며, 그 미분값들은 물체표면에 인접한 셀로부터 외삽하였다.

주 유동과 난류유동 변수들에 대한 계산 초기의 조건으로는 알고 있는 원방 흡입유동에 대한 값들로 균일하게 분포하여 주었다.

### 2.5 비정렬 삼각형 격자형성

비정렬 삼각형 격자의 생성은 비점성 영역에서는 advancing-front기법을 사용하였으며, 점성 영역에서는 advancing-layer기법을 사용하였다.

## 3. 결과 및 검토

이상에서 기술된 유동해석 기법을 검증하기 위하여, NACA 0012 익형의 경우, 비점성 유동과 난류유동에 대해 외재적 기법과 내재적 기법을 이용하여 계산하고 결과를 비교하였다. 이러한 예를 통해 검증된 수치기법을 사용하여 다중익 주위의 난류 유동에 대해 계산하였다.

### 3.1 NACA 0012 익형

#### 3.1.1 비점성 유동

마하수 0.8, 받음각 1.25도의 자유류 조건을 갖는 정상 유동에 대해 계산 하였다. 격자의 원방