

비압축성 점성유동의 와도와 압력 경계조건

서정천*

On the Vorticity and Pressure Boundary Conditions
for Viscous Incompressible Flows
J.-C. Suh

As an alternative for solving the incompressible Navier-Stokes equations, we present a vorticity-based integro-differential formulation for vorticity, velocity and pressure variables. One of the most difficult problems encountered in the vorticity-based methods is the introduction of the proper value of vorticity or vorticity flux at the solid surface. A practical computational technique toward solving this problem is presented in connection with the coupling between the vorticity and the pressure boundary conditions. Numerical schemes based on an iterative procedure are employed to solve the governing equations with the boundary conditions for the three variables. A finite volume method is implemented to integrate the vorticity transport equation with the dynamic vorticity boundary condition. The velocity field is obtained by using the Biot-Savart integral derived from the mathematical vector identity. Green's scalar identity is used to solve the total pressure in an integral approach similar to the surface panel methods which have been well-established for potential flow analysis. The calculated results with the present method for two test problems are compared with data from the literature in order for its validation. The first test problem is one for the two-dimensional square cavity flow driven by shear on the top lid. Two cases are considered here: (i) one driven both by the specified non-uniform shear on the top lid and by the specified body forces acting through the cavity region, for which we find the exact solution, and (ii) one of the classical type (i.e., driven only by uniform shear). Secondly, the present method is applied to deal with the early development of the flow around an impulsively started circular cylinder.

Key Words: 와도기저방법(Vorticity-Based Method), 적분-미분 정식화 (Integro-Differential Formulation), 와도-압력 연성(Vorticity-Pressure Coupling), 유한체적법 (Finite Volume Methods), 비오-사바르 적분(Biot-Savart Integral), 와도경계조건(Vorticity Boundary Condition), 구동캐비티(Driven Cavity), 순간출발원형실린더(Impulsively Started Circular Cylinder)

1. 서언

속도의 구배로 표현되는 유체의 점성력은 속도고착 조건과 힘의 동적평형조건에 의해 물체표면에서 와도를 생성하게 작용하고, 대류, 확산, 변형작용을 거치면서 유동장내의 와도가 재분포하게 한다. 이와 같은 와도의 생성과 재분포 과정을 반복하는 동적인 유동의 물리적인 특성을 규명한 Lighthill [1]과 Batchelor [2] 등의 연구가 발표된 후, 와도를 기저로 하는 여러 가지 수치 해석기법이 개발되었다. 전반적인 수치해석기법에 대한 고찰은 문헌 [3,4]를, 몇가지 대표적 연구는 문헌 [5-12]를 참고바란다. 와도기저방법의 장점으로는 [13,14], 와도이송방정식이 비관성좌표계와 관성좌표계에서 공히 동일한 형태를 갖기 때문에 관성좌표계에서 개발된 수치해석기법을 비관성좌표계로 확장하기가 용이하며 와도는 물체표면에서 발생되므로 물체 근처에 국한된 작은 계산영역을 택할 수 있다. 물체표면에서의 전단응력이 와도로 표현되고 압력은 와도플럭스와 관련이 있으므로 와도와 와도플럭스를 직접 이용하여 물체에 작용하는 힘을 계산할 수 있다. 또한 와류가 강하게 나

타나는 유동의 경우 와도와 난류 유동과의 연관성을 이해하는 데 편리함이 있다. 다만, 와도에 대한 경계 조건을 합당하게 부여하여야 하는 점이 수치해석상의 주된 장애 요소로 인식되어 왔다. 와도-속도 정식화, 와도-유량함수 정식화를 근간으로 한 대부분의 연구에서 처럼 속도고착조건으로부터 와도경계조건을 부여하는 과정에서 와도와 속도간의 관계를 미분형태로 표현하는 경우, 속도와 와도에 대한 연성된 방정식을 동시에 풀어야하는 단점을 내포하게 된다. 이러한 단점을 해소하기 위한 한 방편으로 유동장내의 속도는 유동장내의 와도분포로부터 전반적인 영향을 받기 때문에 물체표면에서의 속도고착조건을 전체유동장내의 와도와 집적된 제한조건으로 연관을 맺도록 한다는 관점에서 1970년대에 이르러 Chorin등 [15], Wu [16], Kinney등 [17,18]은 Biot-Savart적분을 이용한 접근 방식을 제안하였다. 그러나, 이들의 연구에서도 와도와 압력간의 동적인 연성관계는 고려하지 않고 물체 표면에서의 속도와 와도와의 운동학적인 관계에서만 접근하였다. 예전의 운동학적인 관점에서 벗어나, 최근 들어 동적인 개념이 추가된 와도경계조건에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다 [19-21]. 이들 경계 조건의 핵심은 물체

*정회원, 서울대학교 공과대학 조선해양공학과

표면에서의 와도플럭스를 물체표면에서의 힘의 동적평형이 고려된 압력간의 연성관계를 도입한 점이다. 현재 이러한 연성관계를 고려하여 2차원 비정상 문제에 적용한 예가 제시되고 있으나 [22-24], 보다 엄밀한 해석방법이 정립될 필요가 있다.

본 논문에서 제안하는 수치해석방법은 와도기저 해석방법에 속하며, 예전의 미분형 정식화방법과는 달리 미분방정식과 적분방정식이 혼합된 정식화방법을 택하고 있다. Navier-Stokes 방정식(이후로는 'N-S 방정식'으로 명기)을 와도와 압력변수에 대한 Helmholtz 분리형태로 표현하고 물체표면에서 와도와 압력사이의 힘의 평형을 고려하여, 와도플럭스와 압력구배의 연성관계를 보여주는 경계조건을 사용하여 미분-적분형의 지배방정식을 구성하는 과정을 다루고 있다. 제안하는 수치해석기법으로, 와도이송방정식은 유한체적법을 사용하여 풀고 구해진 와도장으로부터 속도를 구하는 방법으로는 Biot-Savart 적분항이 포함된 벡터등식을 이용한다. 기존의 와도기저방법에서 대부분 다루지 않은 압력계산을 압력 Poisson 방정식을 전체압력(정압력과 동압력의 합)에 대한 적분방정식으로 바꾸어 경계적분 방법과 유사한 방법으로 압력장을 계산한다. 적분방정식으로 변환하여 푸는 경우, 적분 결과가 매끄러운 값을 제공하므로 통상의 미분방정식에서 요구되는 안정성 문제를 염려하지 않아도 되며 본 연구에서처럼 이상유체유동에서 잘 정립된 표면패널 방법을 확장하여 적용할 수 있다. 본 수치해석방법의 예시로서, 수치해석검증용으로 자주 택하는 2차원 구동 cavity내와 순간적으로 출발하는 원형실린더주위의 비정상층류유동해석결과를 보이고 있다. 구동cavity유동문제에서는 두 가지 유형을 택하였다. 첫번째 유형은 엄밀해가 존재하는 경우로서 cavity 윗판의 이동속도가 특정한 분포로 주어지고 물체력이 역시 가상적으로 주어진 경우이다 [25, 26]. 두번째 유형은 고전적인 구동 cavity 문제로써 물체력이 없이 윗판이 균일하게 이동하는 경우로서, Ghia 등 [27]의 계산 결과와 비교하였다. 더욱이 순간적으로 출발하는 원형실린더문제는 시간이 진전됨에 따라 짧은 시간내에 레이놀드 수에 따른 복잡한 유동 특성이 다양하게 나타나는 것으로써, 수치해석기법을 개발하는 초기단계에서 자주 채택되는 문제이다. 본 연구에서는 이상의 해석결과를 기존의 이론, 계산, 실험결과와 비교함으로써 제안하는 수치해석기법의 유용성을 보이고자 한다.

2. 유동해석의 정식화

비압축성(밀도를 1로 잡음) Newtonian 유체의 응력을

$$\tau = -p\mathbf{n} + \mu\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} + 2\mu\nabla\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}, \quad (1)$$

와 같이 변환하면, 압력(p)에 대한 법선방향과 와도($\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{q}$)에 대한 접선방향성분으로 표현되

고*, N-S 방정식의 가속도항은

$$\mathbf{a} = -\nabla p - \nabla \times (\mu\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{f}_b, \quad (2)$$

같이 압력과 와도변수로 표현할 수 있다. 여기서 μ 는 유체의 점성계수, \mathbf{n} 은 경계면에서 유체장으로 향하는 단위법선벡터이며, \mathbf{a} 는 가속도항, \mathbf{f}_b 는 물체력이다. 이 식은 물체력을 포함한 관성력이 압력과 와도에 대한 스칼라와 벡터포텐셜로 표현되는 Helmholtz 형태임을 알 수 있는 바 [28], 풀이과정으로써 점성계수가 일정하다고 가정하고 식(2)에 각각 curl과 divergence 미분연산을 수행하여 다음과 같은 와도이송방정식과 압력 Poisson 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}\boldsymbol{\omega}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}\mathbf{q}) + \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{f}_b, \quad (3)$$

$$\nabla^2 H = \nabla \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}_b). \quad (4)$$

레이놀드 수 Re 와 물리량은 물체의 특성길이와 특성속도로 무차원하였으며 본 예제에서 다루는 구동 cavity 문제의 경우에는 cavity 윗판의 길이와 그의 이동속도로, 순간적으로 출발하는 원형실린더문제에서는 실린더직경과 출발후의 정속을 택하였다. 압력 p 는 다음과 같이 전체압력 H (정압력과 동압력의 합)으로 표현한다.

$$H = p - p_r + \frac{1}{2}(q^2 - q_r^2). \quad (5)$$

상수 p_r 과 q_r 은 H 의 기준값을 0으로 택하는 기준압력과 기준속도이다. 외부유동문제의 경우에는 무한원방에서 유입류의 압력과 속도로 택한다. 속도장을 구하는 방법으로는 와도와 와도의 운동학적인 관계 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{q}$ 를 이용하거나 속도에 대한 Poisson식 $\nabla^2 \mathbf{q} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ 을 이용하는 방식이 있으나, 다음에 언급하는 바와 같이 적분형의 운동학적인 벡터관계식을 이용하기로 한다. 적분형을 이용하는 경우 수치해석상의 안정성 문제를 염려하지 않아도 되고 와도분포로부터 물체표면에 유기되는 속도를 계산하여 속도고착조건을 부여할 때 전체적으로 집적된 영향을 당연히 고려하게 된다. 슬레노이드 벡터인 속도 \mathbf{q} 는 수학적인 벡터등식 [29]으로 부터 경계면에서 지정된 속도와 유동장내의 와도 분포로 유기되는 속도의 합

$$\mathbf{q} = \int_S [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})\nabla G + (\mathbf{n} \times \mathbf{q}) \times \nabla G] dS + \int_V \boldsymbol{\omega} \times \nabla G dV, \quad (6)$$

으로 구성된다. G 는 무한영역에 대한 Laplace 방정식의 기본해인 Green 함수로써 2차원에서는 $-\frac{1}{2\pi} \ln r$ 이며 3차원에서는 $\frac{1}{4\pi r}$ 이다. r 은 유도장점

*식(1)중 마지막항은 임의의 유체요소의 경계면을 두 표면으로 나누고 각각에 대하여 Stokes적분정리를 수행하면 두 표면의 인접선에 따른 선적분항이 상쇄되어 요소에 작용하는 힘으로써 기여하지 못한다.

\underline{q} 과 적분점 ξ 간의 거리이다. 첫 번째 적분항 (q_0)은 주어진 유입류나 물체의 운동과 관련된 항으로 바깥경계에서의 조건과 속도고착조건으로부터 계산된다. 무한원방의 바깥경계면을 갖는 외부유동문제의 경우, 무한원방에서의 조건을 윗식과 같은 적분형태의 표현을 통해 자동으로 만족시킬 수 있다. 이러한 점이 적분 형태로 표현하는 또 다른 장점이 된다. 두 번째 적분항(\underline{u})은 소위 Biot-Savart 적분항으로써 유동장내의 와도 분포로부터 구해진다. 유사하게 Green함수를 도입하여 식(4)을 적분 형태로 변환하면 [30]

$$H = \int_S [H \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial H}{\partial n} G] dS + \int_V \nabla \cdot (\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) G dV, \quad (7)$$

으로 표현된다. 마지막 적분항을 제외시킨 식이 이상유체해석에서 이용되어온 표면특이점분포방법의 기본관계식이 된다. 일반적으로 식(3)도 적분형태로 바꿀 수 있으나 이 경우의 Green 함수가 지수함수 [31]를 포함하기 때문에 관련된 적분을 수행하는데 계산정확도와 시간상에 어려움이 따른다. 오히려 식(3)은 2차 대류-확산형 편미분방정식 형태이므로 비교적 잘 정립된 기존의 유한차분법이나 유한체적법 등을 활용하는 것이 바람직할 것이다. 결국 식(3), 식(6), 식(7)이 본 연구에서 다루는 미분-적분형 지배방정식을 구성하게 된다. 지배방정식과 더불어 요구되는 경계조건으로써, 물체표면(S_B)에서의 유속(\underline{q})이 물체의 병진운동과 회전운동에 의한 속도(\underline{U}_B)와 같다는 속도고착조건은

$$\underline{q}(\underline{x}_B, t) = \underline{U}_B \text{ on } S_B, \quad (8)$$

으로 표현된다. 와도플럭스($\underline{\sigma} \equiv -\frac{1}{Re} \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial n}$)에 대한 조건은 속도고착조건과 더불어 N-S 방정식의 접선방향 힘의 동적평형을 이용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\underline{\sigma} = -\underline{n} \times \left(\frac{D\underline{q}}{Dt} + \nabla p - \underline{f}_b \right) + \frac{1}{Re} \nabla \underline{\omega} \cdot \underline{n} \text{ on } S_B. \quad (9)$$

와도이송방정식은 N-S 방정식보다 속도에 대하여 1차수 높은 미분방정식이 되므로 이 조건은 추가로 요구되는 compatibility 조건식이 된다. 2차원 유동인 경우, 와도플럭스와 와도구배간의 자체적인 연성항인 마지막항은 소거되고 압력구배와 (물체력이 포함된) 관성력간의 연성만이 존재한다. 이 와도플럭스는 물체 표면에서 생성되어 유체장으로 확산되는 와도량을 의미하며 초기 $t = 0^+$ 에서 순간적으로 가속되는 경우에도 우변의 첫 번째항의 특이현상이 포함된 채로 적용될 수 있다. Lighthill [1]은 이러한 와도생성에 대한 과정을 와도용출(vorticity source)이라는 단어로 이미 설명한 바 있다. Wu와 Wu [20]는 이러한 동적인 와도경계조건에 대한 물리적인 해석을 3차원 압축성 유동으로 확장한 바 있다. 식(9)을 물체 표면에 따라서 적분하면 압력이 연속이라는 성질에 의해 유체장내에서 와도보존원칙이 타당하게 성립함을 알 수 있다. 유사한 방법으로 N-S 방정식

에 법선벡터 \underline{n} 로 내적을 취하면 $\partial H / \partial n$ 에 대한 경계조건

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \underline{n} \cdot \left(-\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \underline{q} \times \underline{\omega} - \frac{1}{Re} \nabla \times \underline{\omega} + \underline{f}_b \right) \text{ on } S_B, \quad (10)$$

을 얻을 수 있다. 이 식 역시 물체 표면에 고착된 유체요소에 대한 법선방향 힘의 동적평형을 뜻하는 compatibility 조건식이 된다. 식(9)과 (10)으로 주어진 두 경계조건이 와도와 압력에 대하여 연성되어 있음을 알 수 있으나 N-S 방정식을 접선방향과 법선방향으로 분해한 형태이므로 독립적인 연성관계를 맺고 있다. 외부유동문제의 경우에 속도와 압력에 대한 바깥경계조건은 식(5)와 (6)의 적분형태로 표현되면서 자동적으로 만족되므로 특별히 고려할 필요가 없으며, 다만 와도이송방정식 (3)에 대한 바깥경계조건으로는 자연대류유동(natural convection flow)으로 대체하는 기법과 같은 통상의 기법을 택하게 된다.

3. 수치해석방법

3.1. 2차원 유동문제

앞 절에서 서술한 지배방정식을 2차원 유동해석문제로 간단히 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{q} \underline{\omega}) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\omega}, \quad (11)$$

$$\underline{q} = \underline{q}_0 - \frac{1}{2\pi} \int_S \underline{\omega} \underline{k} \times \nabla \ln r dS. \quad (12)$$

$$H = -\frac{1}{2\pi} \int_C [H \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \frac{\partial H}{\partial n} \ln r] dC - \frac{1}{2\pi} \int_S \nabla \cdot (\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) \ln r dS. \quad (13)$$

여기서 ω 는 2차원 와도의 스칼라 성분 ($\underline{\omega} \equiv \omega \underline{k}$) 이다. 2차원 와도플럭스 $\underline{\sigma} \equiv -\frac{1}{Re} \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial n}$ 는, 식(9)으로부터,

$$\underline{\sigma} = \underline{k} \cdot \underline{n} \times \left(-\frac{D\underline{q}}{Dt} - \nabla p + \underline{f}_b \right) \text{ on } S_B, \quad (14)$$

으로 표현된다. 물체가 고정되어 있거나 정속으로 병진운동하는 경우(순간적으로 정속 출발하는 경우도 포함), 식(10)으로 주어진 $\partial H / \partial n$ 에 대한 경계조건을 식(13)에 대입하고 유동장내의 점을 물체표면점(\underline{x}_B)으로 접근시키면 표면에서의 전체압력 H 에 대한 다음과 같은 Fredholm 2종 적분방정식을 얻게 된다.

$$\frac{1}{2} H + \frac{1}{2\pi} \int_{C_B} H \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} dC = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_B} \frac{1}{Re} \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial s} \ln r dC + \frac{1}{2\pi} \int_S (\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) \cdot \nabla(\ln r) dS. \quad (15)$$

여기서 물체표면 C_B 를 따른 적분은 Cauchy principal value 적분을, 미분변수 s 는 물체표면의 접

선방향을 의미한다. 식(13)의 면적분항은 벡터연산 $\nabla \cdot (\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) \ln r = \nabla \cdot \{(\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) \ln r\} - (\underline{q} \times \underline{\omega} + \underline{f}_b) \cdot \nabla \ln r$ 과 Gauss 적분 정리를 이용하여 처리한다.

3.2. 계산수행절차

본 연구에서 채택한 수치기법으로써, 와도이송방정식은 유한체적법으로, 속도장 계산은 Biot-Savart 적분으로, 전체압력에 대한 적분방정식은 패널방법으로 푸는 기법을 적용하였다. 여러 가지 수치기법중 본 연구에서 택한 수행절차를 Fig. 1에 도식적으로 나타내었으며 이를 간략히 설명하기로 한다.

- (i) 현시간단계(시간 t^n 에 해당함)에서 계산된 주어진 속도와 와도장으로부터 다음시간단계($t^{n+1} = t^n + \Delta t$)로 전진하면서, 유한체적법에 의하여 확산항은 중심차분기법으로 근사화하고 [32], 대류항은 Roe [33]가 제안한 플럭스수정(flux limiter)을 이용한 2차정도 TVD (total variation diminishing)기법 [34], 시간에 대하여는 Euler 양해(explicit) 시간전진법을 사용하여 와도장을 계산한다. 실제로 시간단계 Δt 보다 작은 시간간격 $\delta t (\leq \frac{d^2}{4/Re + \sqrt{2} q_s d})$ 여기서 d 는 셀의 긴 대각선길이이며, q_s 는 셀 중심에서의 속도)로 여러번의 중간단계의 시간전진을 행하여야만 수치해석의 안전성이 보장된다. 시간단계 끝에서 얻어진 와도분포에 대하여 물체표면에서 계산된 가상의 슬립속도($V_s^{(k)}$)가 얻어지고 속도고착조건이 만족될 수 있도록 적당한 크기의 와도플럭스를 물체 표면에 부여한다. 이러한 가상의 슬립속도로부터 와도플럭스량을 부여할 때, 압력 계산이 보류된 상태에서 압력과 연성을 현 단계에서 고려하여야 하는 어려움이 따른다. 이를 해결하는 한가지 방법으로 Wu 등 [22]이 제안한 비연성기법을 택하기로 한다. 시간간격(Δt)내에서의 N-S 방정식의 시간 평균을 취하면 압력구배량이 해당하는 가상의 슬립속도량으로 대체되므로, 와도플럭스의 시간평균값($\bar{\sigma}$)은 다음과 같은 반복계산과정을 통해서 얻게 된다.

$$\bar{\sigma}^{(k+1)} = \bar{\sigma}^{(k)} + \frac{V_s^{(k)}}{\Delta t}. \quad (16)$$

윗첨자(k)는 반복계산과정단계를 의미하며 가상의 슬립속도가 작은 허용값 내(본 계산에서는 0.0001을 택함)에 이를때까지 반복계산을 행한다. 슬립속도는 단계(ii)에 기술한 Biot-Savart 적분방법에 의해서(이 계산과정에서는 전체 속도장을 계산하지 않고) 물체 표면에서의 속도만을 계산함으로써 얻어진다. 실제로 Δt 동안 변화하는 유동현상을 고려하여야 하지만, 시간에 대한 이산화의 개념에서는 생성된 와도플럭스가 작은 시간간격내에서 불변이라는 가정을 이용한다. 전체적으로 와도와 압력과의 연성관계를 유지하면서 속도에 대한 고착조건을 통해 국부적으로 비연성을 시킴으로써 수치계산상 편리한 점이 있다. 다만, 이러한 국부적인 비연성 기법은 고착조건을 만족시키는 시간평

균개념의 와도 플럭스를 얻는 데 목적을 두고 있지만, 압력과 힘의 평형을 얻기 위해서는 압력방정식의 풀이과정(iii)에서 전체적인 연성관계를 포함시켜야 한다. 물체표면에서의 와도 ω_B 는 와도플럭스로부터 이산화된 미분 개념

$$\omega_B = Re d_1 \sigma + \omega_1, \quad (17)$$

으로 표현된다. 여기서 d_1 는 물체 표면에 인접한 셀의 중심의 표면으로부터의 법선방향 거리이며, ω_1 는 셀중심에서의 와도값이다.

- (ii) 절차(i)에서 구한 와도장 ω^{n+1} 에 해당하는 속도장 \underline{q}^{n+1} 을 구하기 위하여 Biot-Savart 적분방법을 택하였다. Biot-Savart 적분을 일반적인 하나의 사각형 셀요소의 적분영역에 대해서 적용하기로 한다. 다른 다각형요소의 경우에는, 최종적으로 표현되는 해석적인 결과식에서 해당하는 변의 갯수를 택하면 되고, 전 계산영역에 대한 모든 요소에 대하여 그 결과를 합산하면 된다. 셀요소상의 적분점과 계산점을 각각 ξ 과 \underline{x} 로 표시하고 두 점간의 거리 벡터를 $\underline{r} = \xi - \underline{x}$ ($r = |\underline{r}|$)으로 정의하면, 이 셀요소에 분포된 와도로 인하여 점에서의 유기속도는

$$\begin{aligned} \underline{u} &= -\frac{1}{2\pi} \int_A \underline{\omega} \times \nabla(\ln r) dS \\ &= -\frac{k}{2\pi} \times \int_A \omega \nabla(\ln r) dS, \end{aligned} \quad (18)$$

으로 표현되며, 피적분항에 대한 변환

$$\begin{aligned} \omega \nabla(\ln r) &= \nabla(\omega \ln r) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \nabla \cdot (\underline{r} \ln r) - 1 \} \nabla \omega, \end{aligned} \quad (19)$$

과 더불어 와도의 세기가 선형적으로 분포된 경우, Gauss 정리에 의하여 다음과 같이 선적분항으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \underline{u} &= -\frac{k}{4\pi} \times \left[\oint_{\partial A} \underline{n} \omega (\ln r^2 + 1) dC \right. \\ &\quad \left. - \nabla \omega \oint_{\partial A} (\underline{n} \cdot \underline{r}) \ln r dC \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 선적분은 셀요소의 경계인 직선변을 따라 시계반대방향으로 행해지며, \underline{n} 는 변에서 바깥으로 향하는 단위법선벡터이다. 따라서 사각형의 각 변에 해당하는 선분에 대한 선적분항의 합산 형태인

$$\underline{u} = -\frac{k}{2\pi} \times \left(\sum_{i=1}^4 \underline{I}_i \right), \quad (21)$$

으로 표현된다. 여기서

$$\begin{aligned} \underline{I}_i &= \frac{1}{2} \underline{n}_i \int_0^{\ell_i} \omega (\ln r^2 + 1) dC \\ &\quad - \frac{1}{4} \nabla \omega (\underline{n}_i \cdot \underline{r}) \int_0^{\ell_i} \ln r^2 dC. \end{aligned} \quad (22)$$

아래첨자 i 는 각 변을 구분하는 지수이며, l_i 는 그 변의 길이이다. 각 선적분은 독립적으로 계산되므로 한 변에 대한 결과를 다른 변에서도 동일하게 적용할 수 있어 면적분을 직접 수행하는 기법 [18]보다 간편하게 처리하는 장점이 있으며, 자세한 적분 과정과 3차원 Biot-Savart 적분에 대하여는 문헌 [35]를 참조하기 바란다. 본 해석이 와도세기가 셀요소별로 선형적으로 분포되는 경우에 적용되고 있지만, 본 계산에서는 셀요소별로 균일하게 분포되었다고 간주하여 위에 보인 적분항 중 첫 번째 항만을 고려하였다. 더욱이 본 해석적분이 엄밀함에도 불구하고 최종 결과형태에 나타나는 로그와 역탄젠트의 초월함수로 인해 어느 정도의 계산 시간이 소요된다. 따라서 계산점의 거리가 멀리(예를 들면 셀요소의 대각선의 5배 이상) 떨어진 경우 식(18)을 직접 이용하여 면적이 A 인 셀요소의 와도를 세기가 ωA 인 점보우텍스(point vortex)가 셀요소의 중심에 위치한 것으로 대치하여 처리하였다. 이러한 일련의 적분과정을 모든 셀요소에 적용하여 얻은 값을 합하여 유기 속도장을 계산하고, 이미 주어진 유입류의 속도나 경계면에서의 속도로부터 산출되는 유동장과 합치면 원하는 전체 속도장을 얻어낸다.

(iii) 절차(i)과 (ii)에서 구한 와도장과 속도장으로 부터 압력 Poisson식을 전체압력 H^{n+1} 에 대한 적분방정식으로 변환하여 푼다. 적분방정식 풀이 방법으로 이상유체해석에서 잘 정립된 panel방법과 유사한 균일특이점분포방식에 해당하는 저차방법을 택하였다. 물체경계는 N 개의 직선panel을 연결하여 구성하고 그에 따른 식(16)의 두 적분항이 각각의 panel에 대한 기여항으로 표현된다. 식(16)의 우변의 면적분은 식(18)의 Biot-Savart적분항과 그 형태가 유사하다. 이때 $(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla(\ln r)$ 를 $\boldsymbol{\omega} \times \nabla(\ln r)$ 으로 대체하면서 $(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega})$ 의 유동장에서 분포를 가지고 (ii)에서 언급한 적분기법을 사용할 수 있다. 이와 더불어 식(16)에 포함된 $\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega_B}{\partial s}$ 항을 계산한다. 즉 물체표면을 따라 물체표면와도의 접선방향 구배를 구한다. 이때 필요한 표면와도(ω_B)는 식(17)로부터 구한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 와도플럭스는 압력의 접선방향구배와 관련이 있기 때문에 반복계산과정을 통해 압력과 연성관계를 고려한다. 반복계산시 초기추정은 절차(i)에서 구한 시간평균 개념의 와도플럭스를 이용하여 물체와도값을 정하고 이를 전체압력경계조건 부과시 사용하여 물체표면에서의 전체압력값을 구하고 이로부터 압력의 접선방향구배를 구한 후 와도플럭스를 갱신하고 이와 같은 반복계산과정을 수렴된 결과가 얻어질 때까지 반복 수행한다.

(iv) 앞서의 절차 (i), (ii), (iii)은 각각 와도, 속도, 압력을 차례로 구하는 과정으로써, 다음 시간 단계로 전진시켜 동일하게 수행한다. 초기상태의 유동은 이상유체해석에서 얻은 결과를 이용할 수 있으며, 특히 순간적으로 운동하는 물체의 경우 실험적으로 실제 경계층 형성의 구현이

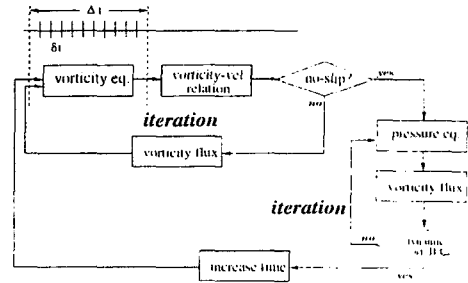


Figure 1. Flow chart for solution procedure

어렵지만 이론적으로 $t = 0^+$ 에서 이상유체유동이 존재하고 물체표면에서 슬립속도가 특이현상을 가지면서 존재하게 된다. Biot-Savart적분은 매 시간단계에서 필요하므로 중복계산을 피하기 위하여 계산기 기억용량이 허용되는 범위내에서 단위세기의 와도가 분포된 셀에 의한 여타 셀의 중심에서의 유기 속도에 해당하는 영향계수를 저장한다. 이 저장된 계수는 압력적분방정식을 풀때도 동일하게 쓰이는 계수로서, 계산시간을 단축시킬 수 있다. 셀요소의 중심에서의 값을 주위의 격자점에서의 값으로 환산하는 경우 중심으로부터 그 점까지의 거리에 반비례하여 그 영향을 취하는 평균값 개념의 삼간법을 사용한다.

4. 계산예

4.1. 2차원 구동 cavity 유동

2차원, 구동cavity내의 점성유동해석은 수치해석기법의 타당성을 검증하기 위한 예제로서 많이 채택되어 왔다. 기하학적인 형상과 경계조건은 단순하지만 유동 특성은 매우 복잡하므로 다른 결과와 비교함으로써 본 해석기법의 정확도를 확인하고자 한다. cavity 윗판($y=1$ 에 위치)에서 수평방향(x 방향)의 속도분포 $q_x = f(x)$ 로 주어지고 연직방향 물체력(Fig. 2 참조)

$$\underline{f}_b \cdot \underline{j} = 8Re[24F(x) + 2f'(x)g''(y) + f'''g(y)] + 64[F_2(x)G_1(y) - g(y)g'(y)F_1(x)].$$

여기서

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, g(y) = y^4 - y^2.$$

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx,$$

$$F_1(x) = f(x)f''(x) - [f'(x)]^2,$$

$$F_2(x) = 0.5f^2(x),$$

$$G_1(y) = g(y)g'''(y) - g'(y)g''(y)$$

이 주어진 경우에 엄밀해가 존재한다 [25, 26]. 더욱이 통상의 cavity 구동문제에서는 윗판의 양쪽구석점에서 경계조건이 양립하게 되는 데 이러한 모호한 수치해석상의 문제점을 없앨 수 있다. Figs. 3-4에

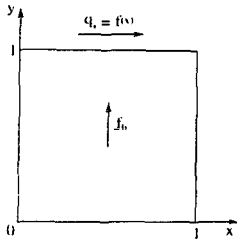


Figure 2. Flow geometry for driven cavity

Reynolds수(Re) 100에서 시간 간격과 격자수를 바꾸어 가면서 정상상태에 도달된 수치해석결과와 수렴성을 엄밀해와 비교하여 검증하였다. 본 계산은 시간전진에 의한 비정상계산을 수행하고 있기 때문에 초기에 순간적으로 출발하는 경우로 가상하였다. 정상상태의 판정은 와도, 속도, 압력의 시간간격에 대한 상대적인 변화비가 0.001내에 이르렀을 때로 삼았다. 내벽 가까이에 격자점을 상대적으로 조밀하게 분포시키는 방법 대신 균일한 격자분포를 사용하였는 바, 그 이유는 나타나는 동일한 셀요소에 대해 Biot-Savart적분의 영향계수를 기억, 저장하기가 용이하기 때문이다. 계산은 서울대학교 공과대학이 보유하고 있는 CRAY-J916 기종의 계산기를 사용하였으며 61×61 격자점과 $\Delta t = 0.05$ 를 사용하는 경우 매 시간 단계를 전진하는 데 약 1초의 CPU가 소요된다. 이 경우 와도경계조건과 압력경계조건을 만족시키기 위해 보통 약 10번 내외(단, 정상상태에 상당히 도달함에 따라 2 내지 5번)의 반복계산과정이 수반된다. 이때 반복계산의 수렴도는 허용슬립속도와 허용압력변화를 공히 0.0001내로 택하였다. 그림은 윗판의 왼쪽끝에서 시작하여 시계방향으로 벽면위치를 수평축으로 삼고 경계면에서의 와도, 와도 플럭스, 압력을 나타내고 있다. Fig. 3에는 격자점 61×61 을 사용하여 2개의 시간간격을 달리 택함($\Delta t = 0.05, 0.1$)에 따라 cavity 벽면에서의 와도, 와도플럭스, 압력 분포를 보이고 있다. 이에 의하면 그 수렴성이 좋음을 확인하였고 이후의 계산결과에서는 시간간격으로 $\Delta t = 0.05$ 를 택하였다. 3개의 격자제 선택($41 \times 41, 61 \times 61, 81 \times 81$)에 따른 상응하는 영향을 Fig. 4에 보였으며 이 경우 택한 격자수에 대한 계산 결과가 민감하지 않음을 알 수 있다. 다만, 고전적인 통상의 구동 cavity 유동에서는 높은 Reynolds 수에서 복잡한 보우텍스 유동이 구석 근처에서 발생하여 가까이에 위치한 다른 벽면 근처의 유동을 유기하는 바 그 유동 특성을 제대로 구현하기 위해서는 벽면 근처에 조밀한 격자분포가 요구되나, 본 경우는 복잡한 보우텍스 유동이 없는 경우로서 조밀한 격자제를 택하지 않아도 된다. 본 연구의 주된 목적이 제안하고 있는 수치해석방법의 타당성을 검증하고자 하는 일이기 때문에 Fig. 5, 6, 7에 보인 계산 결과에서는 격자수 61×61 을 택하였다. Fig. 5에는 시간경과에 따른 cavity 중심선상에서의 속도분포의 변화를 보이고 있다. 여기서 cavity 윗판으로부터 발생된 와도의 cavity 내로의 확산과 대류작용이 중심쪽으로 확장되고 그에 따른 유동의 변화가 전파되는 양상을 보이고 있다. Fig 6에는 시간경과에 따른 cavity 내부의 운동에너지의 증가를 보

이고 있다. 정상상태에서의 운동에너지의 엄밀해는 $1216/33075 (= 0.0367650)$ 이다. 운동에너지는 셀요소 중심에서의 속도의 제곱에 셀요소의 면적을 곱하고 각각의 셀에 대하여 이를 합산하여 산정하였다. 초반시간에는 cavity 윗판에서 유도되는 운동에너지가 내부로 전달되면서 급격히 증가함을 알 수 있고 일정 시간이 경과하면서 그 증가 폭이 둔감되고 정상상태에 이르게 되면 윗판에서의 운동에너지 공급과 내부에서의 유체점성에 의한 소멸(dissipation)이 균형을 이루게 된다. Fig. 5에 보인 중심선상에서의 속도분포로부터 보우텍스 유동의 중심위치의 시간경과에 따른 변화를 알 수 있는 바 이와 같은 양상을 뒷받침하게 된다. 초기시간에 윗판 근처에 얇은 강력한 와도 경계층이 형성된 후 유체의 점성에 의해 그 두께가 점진적으로 커지고 그로 인해 내부 유동장을 교란시키면서 안정된 정상상태의 보우텍스 유동이 자리잡는 양상을 추정할 수 있다. 정상상태에서의 유선과 와도장, 압력장 분포를 Fig. 7에 보였다. 그림상으로는 본 계산 결과와 엄밀해와의 차이를 구분하기 힘들다. 여기서 특이한 점은 와도를 기저로 한 대부분의 수치해석방법에서 다루지 않는 압력 계산을 수행한 점이다. 기준 압력값은 cavity의 왼쪽윗구석 바로 아래에 위치한 벽면panel 요소에서의 전체압력을 0으로 삼아 택하였다. 이는 전체압력에 대한 적분방정식의 이산화식인 1차연립방정식의 유일해를 얻기 위한 요구 조건이다 (즉, Neumann 형태로 주어진 전체압력조건에 대하여 해의 유일성을 보장하기 위한 조건이다). cavity내의 유동장이 엄밀해와 아주 잘 일치함을 알 수 있어 본 논문에서 제안하고 있는 방법이 앞서의 경계면에서의 물리량 뿐만 아니라 내부 유동장 특성을 잘 재현하고 있음을 확인하였다. 개발된 수치해석기법을 검증하는 또 하나의 문제로서 통상의 구동 cavity 문제 (즉, 앞서의 경우에서 $f(x) = 1, f_b = 0$ 에 해당함)를 택하였다. 많은 비교 대상의 계산 결과가 있으나 본 연구에서는 Ghia등 [27]의 결과와 비교하였다. 사용된 격자수는 $Re = 1000$ 에 대하여는 81×81 이며, $Re = 5000$ 에 대해서는 121×121 이다. Fig. 8에는 $Re = 1000, 5000$ 에 대해 중심선상에서의 속도 분포를 나타내고 있다. 공히 Ghia등 [27]의 결과와 일치된 결과를 제시하고 있다. cavity내의 유선, 와도장, 압력장을 Fig.9에 나타내었다. 본 문제의 경우, 압력 구배에 의한 유동보다는 cavity 윗판의 운동학적인 유동이 강한 유동으로서 예상대로 압력장의 구배가 완만하다. 여기에 직접 비교하고 있지 않지만, Ghia등의 결과와 정량적으로 일치함을 확인할 수 있다. 레이놀드 수가 증가함에 따라 제2, 제3의 보우텍스 유동이 발생하는 바 본 계산을 통해 이를 잘 표현하고 있다. 윗판의 양쪽 구석에서는 경계조건의 불연속으로 인한 모호성으로 인해 와도의 구배가 심하게 나타남에 따라, 그 근처에서의 경계조건을 부여하는 수치해석상의 반복계산과정에서 수렴성이 떨어지는 현상을 초래할 수 있다. 실제로 그곳에서 급격히 변하는 와도분포를 제대로 구현하기 위해서는 많은 격자를 집중하여야 하는 어려움과 수치해석상의 불안정성을 해소하기 위하여 본 계산에서는 네 곳의 각 구석에 위치한 정사각형 격자를 두 개의 삼각형 요소로 분할한후 격자요소로 간주하였다. cavity의 운동에너지의 시간 경과에 따른 변화

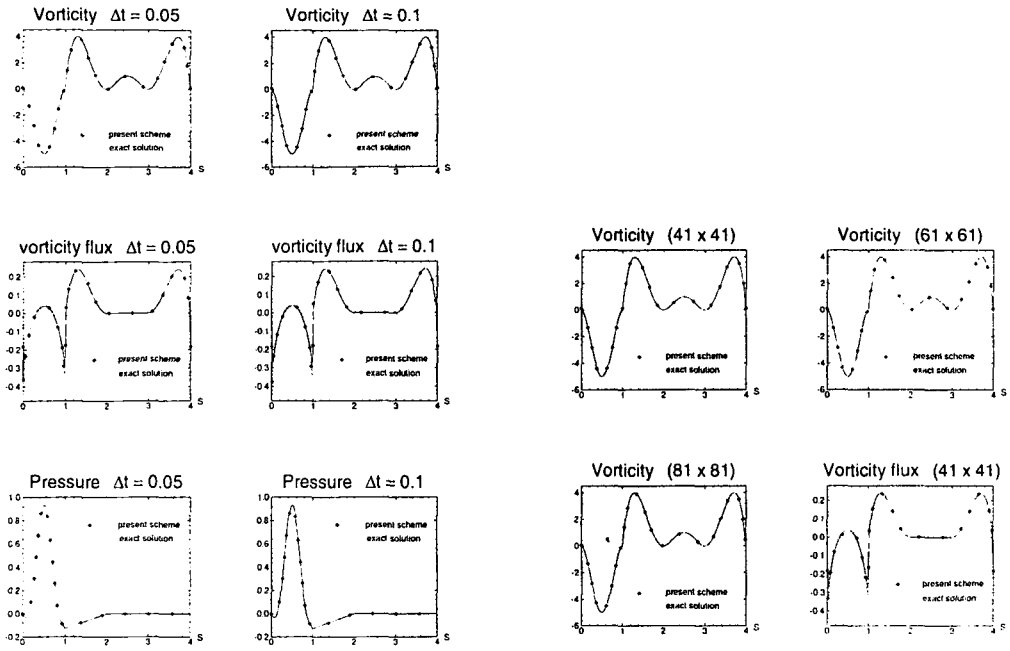


Figure 3. Sensitivity of time interval on vorticity, vorticity flux and pressure along the cavity wall for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with the 61×61 grid.

를 Fig. 10에 보였다. 이에 의하면 높은 레이놀드 수에서는 정상상태에 이르는 소요 계산시간이 오래 걸린다는 것을 알 수 있다.

4.2. 순간적으로 출발하는 원형실린더 주위의 유동

순간적으로 출발하는 원형 실린더 주위의 초기상태의 유동문제는 오랫동안 전산유체역학분야의 수치해석 검증용문제로써 채택되어 왔다. 형상은 비록 단순하지만, 표면 근처의 유동양상은 변화가 심하여 이러한 유동해석결과를 엄밀해와 다른 수치 및 실험결과와 비교함으로써 수치해석방법의 정도를 확인하는 데 유용하다. Bar-Lev와 Yang [36]는 무차원 시간의 변수에 대한 점근전개방법(matched asymptotic expansion method)에 의하여 이론해를 얻은 바 있다. 이 이론해는 큰 레이놀드수에서 시간이 작은 영역에서 정확한 결과를 제공하는다. Bourd와 Coutanceau [37]는 유동가시화에 의한 유선관찰을 통해 비정상유동특성을 계측하였다. 본 계산결과를 기존의 계산결과와 더불어 이들의 결과와 비교함으로써 본 수치해석방법을 검증하고자 한다. 모든 물리량은 실린더 지름, 무한 원방에서의 속도와 압력으로 무차원화 하였다. 계산은 대칭 조건을 부여하지 않은 채 수행하였으며, O-형 격자를 원주방향으로는 균일하게, 반경방향으로는 표면 근처에 조밀하게 놓이도록 코사인 분포로 분할하였다. 바깥경계(반경 R_o)는 표면으로부터 생성되어 대류, 확산되어 와도가 주어진

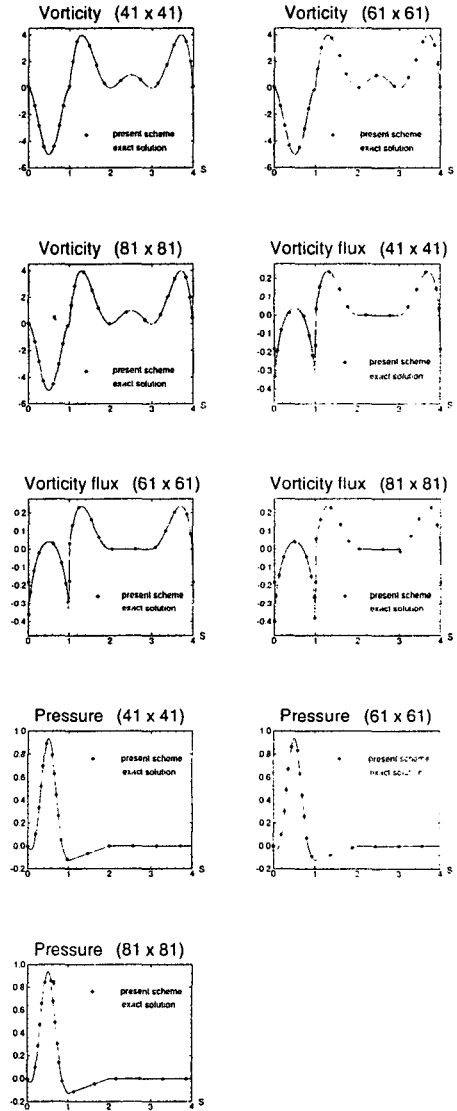


Figure 4. Sensitivity of mesh size on vorticity, vorticity flux and pressure along the cavity wall for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$.

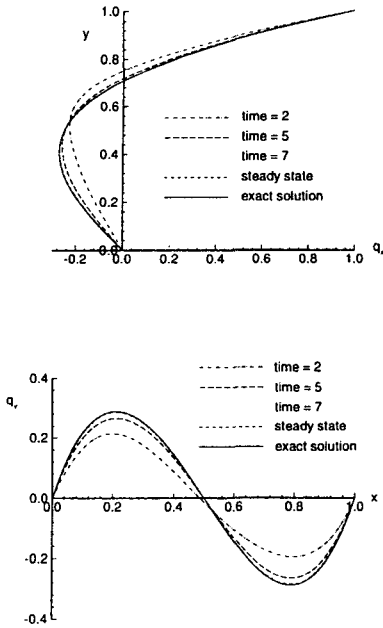


Figure 5. Time evolution of the velocity along the center lines of the cavity for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$ and the 61×61 grid.

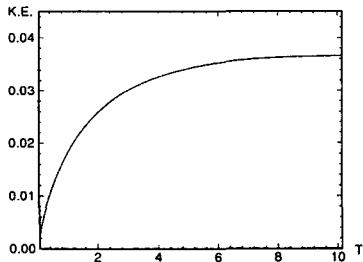


Figure 6. Time evolution of kinetic energy for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$, and the 61×61 grid.

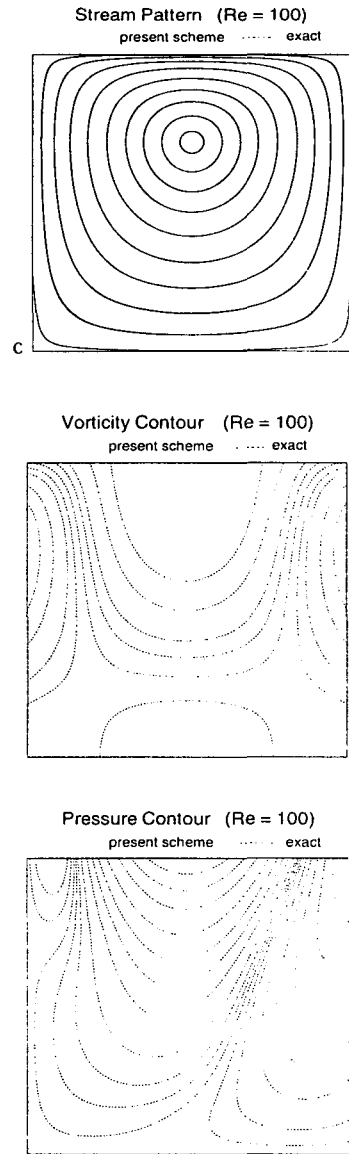


Figure 7. Streamline pattern, vorticity contour and pressure contour for the cavity flow driven by shear and body force at $Re = 100$ with $\Delta t = 0.05$ and the 61×61 grid.

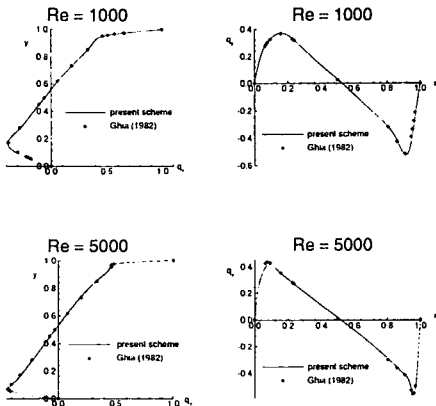


Figure 8. Velocity along the center lines for the classical driven cavity flow at $Re = 1000, 5000$ with $\Delta t = 0.05$.

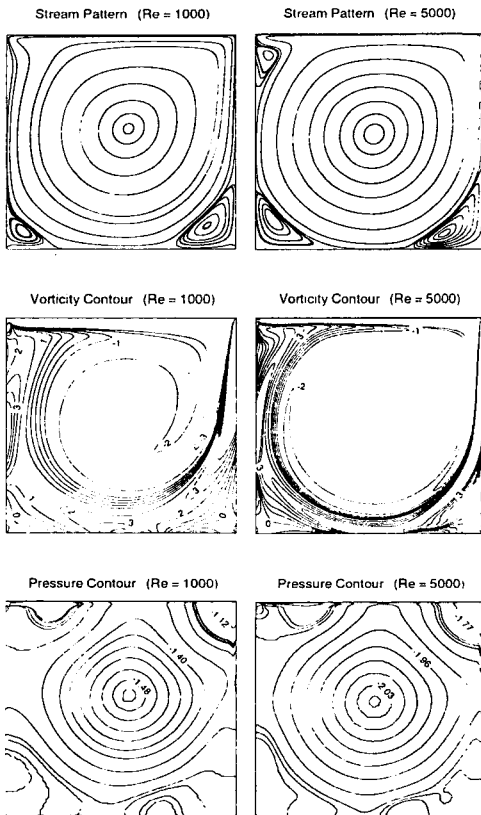


Figure 9. Streamline pattern, vorticity contour and pressure contour for the classical driven cavity flow at $Re = 1000, 5000$ with $\Delta t = 0.05$

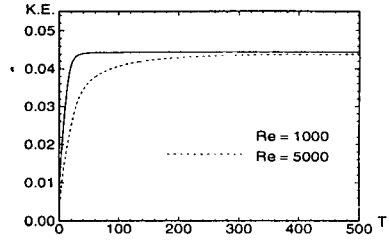


Figure 10. Time evolution of kinetic energy for the classical driven cavity flow at $Re = 1000, 5000$ with $\Delta t = 0.05$.

시간영역내에서 모두 포함되도록 선정하였다. 바깥경계에서는 점성확산항을 무시하여 순수포장개념으로 와도를 이송시켰다. Fig. 11에는 레이놀드수 9500에서 기본변수 $\Delta t = 0.005$, 600×80 격자수, $R_o = 1.5$ 로 부터 시간간격, 바깥경계반경, 격자수의 변화에 따른 순간출발직후에 저항계수(분모에 인자 1/2이 포함된 량으로 무차원)의 수렴성을 보이고 있다. 마찰저항과 형상저항은 와도와 압력을 표면에 걸쳐 적분하여 얻었다. 본 수치결과를 Bar-Lev와 Yang의 이론해와 $t \leq 0.25$ 영역에서 비교하였다. 격자수나 시간간격의 영향을 고려하여 다음의 결과에서는 $\Delta t = 0.005$, 600×80 격자수, $R_o = 1.5$ 를 택하였다. Fig. 12에는 레이놀드수 3000에 대해 시간 $t = 0.2$ 와 $t = 0.4$ 에서 실린더표면에서의 와도가 이론해와 잘 일치함을 보이고 있다. 표면와도는 마찰저항과 직접적인 관련이 있기 때문에 마찰저항이 잘 일치함을 뒷받침한다. 레이놀드수 9500에서 시간이 경과함에 따라 주박리점의 위치가 변화하는 양상을 Fig. 13에 보였다. 와도가 0이 되는 박리점의 각도는 후방정체점으로 부터 측정되었다. 시간 $t = 0.15$ 근처에서 급격히 박리가 시작됨을 알 수 있다. Fig. 14는 실린더 표면 압력의 시간별 변화를 보이고 있다. 초기 단계에서 형성되는 얇은 경계층유동에서 나타나는 포텐셜 유동의 압력 분포 양상이 실린더 후방근처에서 형성되는 와류에 의하여 압력분포가 급격히 변화함을 알 수 있다. Figs. 15-17에 보인 유선, 와도장, 압력장으로 부터 시간이 진행되면서 주와류, 2차와류, 3차와류가 형성되는 과정을 뚜렷하게 확인할 수 있고, 특히 Bouard와 Coutanceau [37]과 Ta Phuoc Loc과 Bouard [38]에서 언급했듯이, 얇은 wake가 박리점 근처에서 생겨나서 시간이 지나면 두 부분으로 갈라져서 결국 안정된 하나의 큰 와류로 합쳐지는 β -현상($t=1.0$)과 안정된 주와류 전방에 다시 작은 2차와류가 생기는 α -현상($t=2.0$)을 확인할 수 있다. 와도contour를 나타낸 그림에서 알 수 있듯이 시간이 흐름에 따라 와도가 점점 발달하는 모습을 확인할 수 있고, 여기에 직접 비교하지는 않았지만, Koumoutsakos 등 [21]에 의해 vortex방법으로 계산된 와도contour의 형상이 거의 유사함을 알 수 있다. 실린더 주위의 압력 contour 역시. 시간이 흐를수록 실린더 뒤쪽의 유동이 vortex의 생성으로 인해 복잡하게 되고, 그 와류 중심에서 압력이 상대적으로 매우 낮은 영역이 확산 작용

에 의해 점차적으로 커지는 현상을 확인할 수 있다. Fig. 18에는 본 수치기법으로 계산된 저항계수를 Koumoutsakos 등 [21]의 vortex 방법으로 계산한 결과와 함께 보이고 있다 (참조: 문헌 [21]에서는 반경으로 시간을 무차원했음). 복잡한 와류 유동의 상호작용에 의해 저항계수가 급격히 변화함을 알 수 있는 바, Fig. 17에 보인 압력변화에 따른 형상저항의 변화에 작용하여 나타나고 있다. 초기 시간에 대해서는 잘 일치한 경향을 보이고 있지만, $t > 1$ 인 구간에서는 조금씩 다른 경향을 보이고 있는데, Koumoutsakos 등의 방법에서는 와도와 압력과의 연성관계를 완전히 고려하지 않고 있는 데 기인한 듯 하다. 더욱이 이 시간영역에서는 생성된 와류들간의 상호간섭효과가 크게 나타나게 되어 상대적으로 압력과의 연성효과가 크게 작용한다. 또한 수치해석 방법상의 차이로 기인되기도 하나 아직 뚜렷하게 그 원인을 규명한 바 없다. Fig. 19에 보인 바 같이 시간평균개념의 와도플럭스와 시간단계 끝에서의 와도플럭스간의 차이는 예상한대로 peak값이 나타나는 위치에서는 크게 나타나고 있으며 다른 위치에서는 전반적으로 비슷한 값을 보이고 있다. 이는 형상저항을 정확히 계산하기 위해서는 시간단계끝에서의 와도플럭스를 전체압력을 구할 때 사용하는 것이 타당함을 뒷받침한다. Fig. 20(a)에는 실린더 후류의 대칭중심선을 따라 속도분포의 변화를 실험결과 [37]와 비교하였다. 어느 정도의 차이를 알 수 있는 바, 이는 실험에서 진정으로 원형실린더를 순간적으로 출발시키는 운동을 실행하기 어렵고 유동 자체가 난류특성을 내포하게 되는 이유에 기인한 듯 하다. 아무튼 시간상의 위상차를 무시한다면 전반적 분포 모양은 잘 일치함을 알 수 있다. 대칭중심선에서의 속도가 0인 위치인 후류길이를 Fig. 20(b)에 보였다. 이 역시 같은 연유에서 그 차이가 나타나나 전반적인 양상은 일치함을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 비압축성 유체의 비정상점성유동 해석을 위한 와도를 기저로 한 미분-적분형태의 수치해석방법을 제시하였다. 와도-속도 정식화에서 어려움으로 대두되고 있는 고체면에서의 와도와 압력에 대한 경계조건을 부여하는 문제를 와도와 압력간의 연성관계를 근간한 반복계산방법을 이용하여 해결하였다. 와도와 압력에 대한 경계조건은 속도고착조건과 더불어 동적인 힘의 평형 조건과 연관을 짓어야 하며, 운동학적인 관점에서만 단독으로 고려하여서는 연성된 와도, 속도, 압력변수간의 물리적인 관계를 규명할 수 없다. 반복계산과정에서 필요한 Biot-Savart적분이 변환된 피적분항에 대한 적분정리를 이용하여 선적분의 형태로 표현하고 해석적인 적분이 가능하도록 하였다. 이로 인해 Biot-Savart적분을 편리하고 정확하게 수행할 수 있다. 와도, 속도, 압력에 대한 지배방정식을 순차적으로 푸는 수치해석기법을 근간으로 하여 2차원 driven cavity 유동문제와 순간적으로 출발하는 원형실린더 주위의 초기

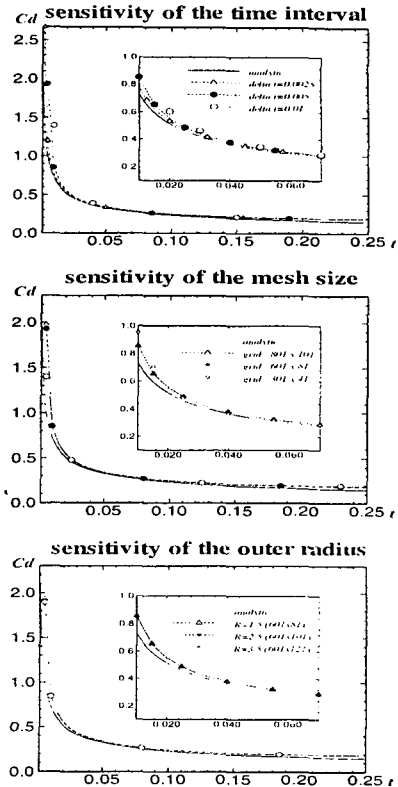


Figure 11. Sensitivity of the time interval, the outer radius and the mesh size on the drag coefficients at $Re = 9500$.

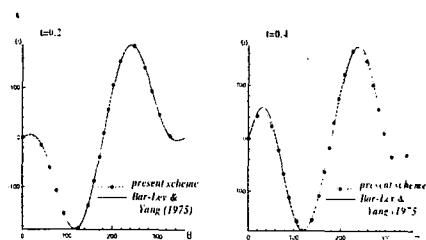


Figure 12. Comparison of the computed vorticity at the body surface with the analytical solution at $Re = 3000$ with $\Delta t = 0.005$ and $Ro = 1.5$.

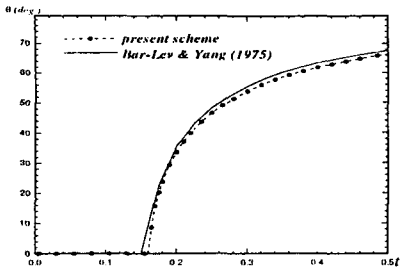


Figure 13. Time evolution of the primary separation position at $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $R_o = 1.5$.

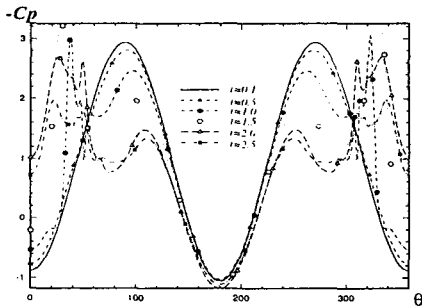


Figure 14. Surface pressure distribution at several instants for $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $R_o = 1.5$.

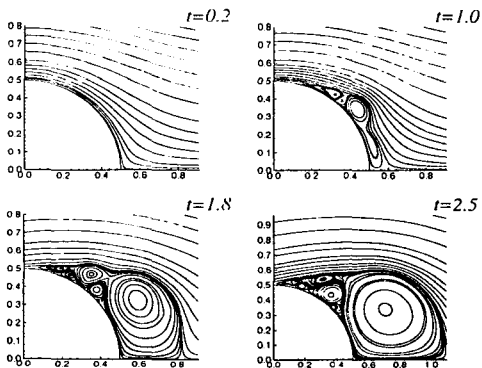


Figure 15. Streamline patterns for $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $R_o = 1.5$.

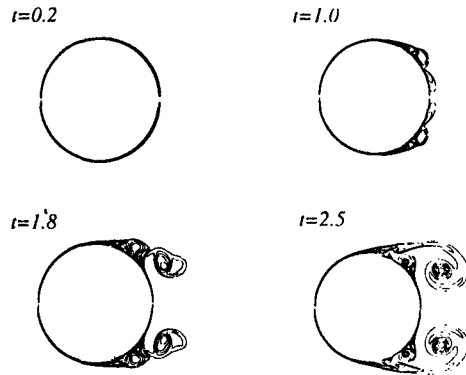


Figure 16. Vorticity contours for $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $R_o = 1.5$.

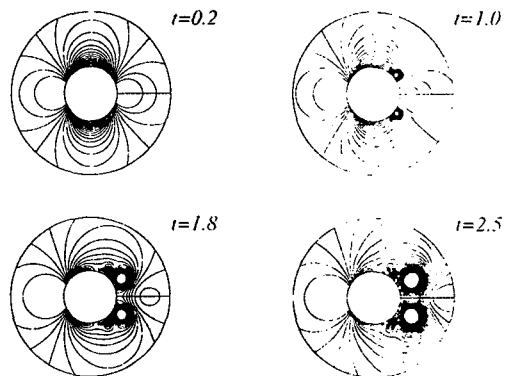


Figure 17. Pressure contours for $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $R_o = 1.5$.

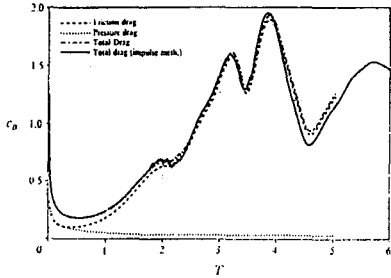
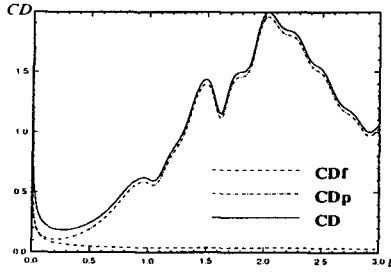


Figure 18. Time evolution of the drag coefficients at $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $Ro_o = 1.5$: (a) present scheme, (b) Koumoutsakos [21]

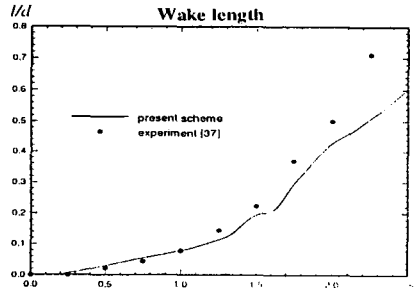
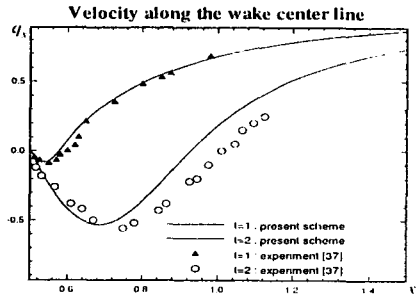


Figure 20. Development of wake: (a) Velocity along the wake center line, (b) Wake length for $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $Ro_o = 1.5$.

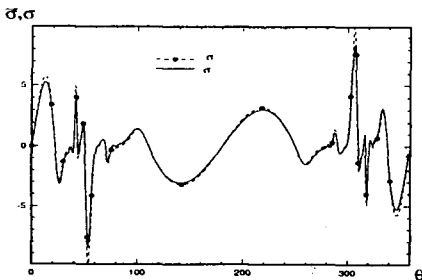


Figure 19. Time-averaged vorticity fluxes ($\bar{\sigma}$) in $t_1 - \Delta t < t < t_1$ and vorticity flux (σ) at $t = t_1$ where $t_1 = 2.5$ for $Re = 9500$ with $\Delta t = 0.005$, the grid 600×80 and $Ro_o = 1.5$.

유동문제에 적용하였다. 기존의 결과에서 제시하고 있는 유동특성과 잘 일치함을 얻어내어 본보에서 제안하는 수치해석방법의 타당성을 검증하였다. 장차 본 연구에서 기술하고 있는 기본 개념을 이용하여 3차원 유동해석에 적용할 예정이다. 3차원 와도이송방정식에 포함된 변형항 (stretching term)이 난류 유동에 미치는 효과에 촛점을 맞출 필요가 있으며, 이에 따른 수치기법의 정확성, 격자생성, 계산효율성 등과 관련된 연구가 부수적으로 수행되어야 한다. 본 논문의 그림 작성에 도움을 준 김광수교과 이경수군에게 고마움을 표한다.

참고문헌

- [1] Lighthill, M. J., "Introduction, Boundary Layer Theory," *Laminar Boundary Layers*, edited by Rosenhead, J. Oxford University Press, New York (1963), p. 54.
- [2] Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1967).
- [3] Gresho, P. M., "Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues," *Ann. Review Fluid Mech.*, Vol. 17 (1991), p. 411.
- [4] Anderson, C. R. and Greengard, C. (editors) *Vortex Dynamics and Vortex Methods*, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 28, American Mathematical Society, Providence (1991)
- [5] Dennis, S. C. R., Ingham, D. B. and Cook, R. N., "Finite-Difference Methods for Calculating Steady Incompressible Flows in Three Dimensions," *J. Comp. Physics*, Vol. 33 (1979), p. 325.
- [6] Gatski, T. B., Groasch, C. E. and Rose, M. E., "A Numerical Study of the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations in Vorticity-Velocity Variables," *J. Comp. Physics*, Vol. 44 (1982), p. 1.
- [7] Chang, K.-S. and Song, C.-J., "Interactive Vortex Shedding From a Pair of Circular Cylinders in a Transverse Arrangement," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 11 (1989), p. 317.
- [8] Ern, A. and Smooke, M. D., "Vorticity-Velocity Formulation for Three-Dimensional Compressible Flows," *J. Comp. Physics*, Vol. 105 (1993), p. 58.
- [9] Guj, G. and Stella, F., "A Vorticity-Velocity Method for the Numerical Solution of 3D Incompressible Flows," *J. Comp. Physics*, Vol. 106 (1993), p. 286.
- [10] Dennis, S. C. R. and Hudson, J. D., "An h^4 Accurate Vorticity-Velocity Formulation for Calculating Flow Past a Cylinder," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 21 (1995), p. 489.
- [11] Chou, M.-H. and Huang, W., "Numerical Study of High-Reynolds-Number Flow Past a Bluff Object," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 23 (1996), p. 711.
- [12] Anagnostopoulos, P. and Iliadis, G., "Numerical Study of the Blockage Effects on Viscous Flow past a Circular Cylinder," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 22 (1996), p. 1061.
- [13] Speziale, C. G., "On the Advantages of the Vorticity-Velocity Formulation of the Equations of Fluid Dynamics," *J. Comp. Physics*, Vol. 73 (1987), p. 476.
- [14] Wu, J. C., "Theory for Aerodynamic Force and Moment in Viscous Flows," *AIAA J.*, Vol. 19, No. 4 (1981), p. 432.
- [15] Chorin, A. J., "Numerical Study of Slightly Viscous Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 57, No. 4 (1973), p. 785.
- [16] Wu, J. C., "Numerical Boundary Conditions for Viscous Flow Problems," *AIAA J.*, Vol. 14, No. 8 (1976), p. 1042.
- [17] Kinney, R. B. and Cielak, Z. M. (1977), "Analysis of unsteady viscous flow past an airfoil: part I-theoretical development," *AIAA J.* Vol. 15, No. 12 (1977), p. 1712.
- [18] Cielak, Z. M. and Kinney, R. B., Analysis of unsteady viscous flow past an airfoil: part II-numerical formulation and results, *AIAA J.* Vol. 16, No. 2 (1978) p. 105.
- [19] Anderson, C. R., "Vorticity Boundary Conditions and Boundary Vorticity Generation for Two-Dimensional Viscous Incompressible Flows," *J. Comp. Physics*, Vol. 80 (1989). p. 72.
- [20] Wu, J.-Z. and Wu, J.-M., "Interactions Between a Solid Surface and Viscous Compressible Flow Field," *J. Fluid Mech.*, Vol. 254 (1993), p. 183.
- [21] Koumoutsakos, P. and Leonard, A., "High-Resolution Simulations of the Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods," *J. Fluid Mech.*, Vol. 296 (1995), p. 1.
- [22] Wu, J.-Z., Wu, X.-H., Ma, H.-Y. and Wu, J.-M., "Dynamic Vorticity Condition: Theoretical Analysis and Numerical Implementation," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. Vol. 19 (1994). p. 905.

- [23] Koumoutsakos, P. and Shiels, D., "Simulations of the Viscous Flow Normal to an Impulsively Started and Uniformly Accelerated Flat Plate," *J. Fluid Mech.*, Vol. 328 (1996), p. 177.
- [24] Suh, J.-C. and Kim, K.-S., "A Vorticity-Velocity Formulation for Solving the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations," (submitted to *Fluid Dynamics Research*) (1998).
- [25] Shih, T. M., Tan, C. H. and Hwang, B. C., "Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 9 (1989), p. 193.
- [26] Rida, S., Mckenty, F., Meng, F. L. and Reggio, M., "A Staggered Control Volume Scheme for Unstructured Triangular Grids," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 25 (1997), p. 697.
- [27] Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comp. Physics*, Vol. 48 (1982), p. 387.
- [28] Aris, R., *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962)
- [29] Brockett, T., "NA 520 Lecture Notes," (unpublished), Department of Naval Architecture and Marine Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor (1988)
- [30] Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, 6th ed., Macmillan & Co Ltd, London (1968)
- [31] Piva, R. and Morino, L., "A Boundary Integral Formulation in Primitive Variables for Unsteady Viscous Flows," *Boundary Element Methods in Nonlinear Fluid Dynamics*, edited by Banerjee, P. K. and Morino, L. Elsevier Applied Science, London and New York (1990), p. 117.
- [32] Hoffman, K. A. and Chiang, S. T., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Publication of Engineering Education System, Wichita (1993).
- [33] Roe, P. L., "Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows," *Proc. 1983 AMS-SIAM Summer Seminar on Large Scale Computing in Fluid Mech., Lectures in Applied Math.*, Vol. 22 (1985), p. 163.
- [34] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester (1990).
- [35] Suh, J.-C. "The Evaluation of the Biot-Savart Integral," (submitted to *J. Engineering Mathematics*) (1997).
- [36] Bar-Lev, M. and Yang, H. T., "Initial flow field over an impulsively started circular cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol. 72 (1975), p. 625.
- [37] Bouard, R. and Coutanceau, M., "The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 10^4$," *J. Fluid Mech.*, Vol. 101 (1980), p. 583.
- [38] Ta Phuol Loc and Bouard, R., "Numerical Solution of the Early Stage of the Unsteady Viscous Flow around a Circular Cylinder: a Comparison with Experimental Visualization and Measurements," *J. Fluid Mech.*, Vol. 160 (1985), p. 93.