

정규격자를 사용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치해석을 위한 압력 Poisson 방정식의 이산화

Discretization of Pressure-Poisson Equation for Solving Incompressible Navier-Stokes
Equations Using Non-Staggered Grid

김 연규¹⁾, 김 형태²⁾, 김 정중³⁾

Y.G. Kim, H.T. Kim, J.J. Kim

Various discretization methods of Laplacian operator in the Pressure-Poisson equation are investigated for the solution of incompressible Navier-Stokes equations using the non-staggered grid. Laplacian operators previously proposed by other researchers are applied to a Driven-Cavity problem. The computational results are compared with those of Ghia. The results show the characteristics of the discrete Laplacian operators.

1. 서론

비압축성 점성유동의 수치 해석은 Rhie & Chow[1]의 연구 이후로 정규격자(Non-Staggered Grid)를 이용하여 많이 수행되고 있다. 그 이전부터 많이 이용되어 온 비정규격자(Staggered Grid)의 경우 속도와 압력이 서로 다른 점에서 계산되기 때문에 속도성분에 대한 보간이 불가피하고, 계산영역내의 어느 한 점에서도 이산화된 지배방정식이 동시에 만족되지 않으며, 또한 3차원 유동을 계산할 때는 컴퓨터 저장용량이 커지는 단점이 있다. 이와 달리 정규격자를 사용할 경우 속도와 압력이 한 점에서 계산되기 때문에 지배방정식에 같은 제어체적(Control Volume)을 사용할 수가 있고, 또한 복잡한 형상을 표현하기도 쉬우며, 3차원 유동을 계산할 때에도 컴퓨터 저장용량이 상대적으로 작다.

정규격자를 사용할 경우 이러한 장점이 많음에도 불구하고 실제 계산에 응용할 때 많은 어려움이 있는 것은, 비정규격자와는 달리, 이산화된 연속방정식의 만족과 압력 해의 진동의 제거에 많은 노력을 기울여야 한다는 점이다. 이러한 어려움에 대하여는 Strikwerda[2]와 Sotiropoulos & Abdallah[3]등이 이미 언급하였으며, 많은 연구가 수행되었다[4][5]. 본 논문에서는 기존의 연구결과들에 대한 검토를 수행하여, 정규격자를 사용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치해석 방법의 개선 방향을 제시하고자 한다.

앞에서 언급한 정규격자를 사용할 때 발생할 수 있는 문제점들은 압력 Poisson 방정식을 표현하는데 있어서 Integrability와 Regularity로 설명할 수 있다. Integrability는 연속방정식을 적분개념에서 전체영역에 대하여 만족시키는 것을 의미하며, 이산화된 압력 Poisson 방정식의 경우 각 Cell에서의 유량 변화의 합이 전체영역에 대한 유량변화와 같을 경우 이 이산화된 압력 Poisson 방정식은 Integrability를 갖는다고 표현한다. 이와는 달리 Regularity는 압력 Poisson 방정식의 Laplacian 연산자에 대한 이산화된 식이 모든 Wavenumber에 대하여 정확한 가를 나타내는 것으로, 단파(Short Wave)에 대한 이산화된 표현이 부정확하거나 불가능할 경우 이러한 이산화된 Laplacian 연산자를 사용하면 Grid Scale에서 압력 진동을 발생시킨다. 결국 압력 Poisson 방정식의 이산화에는 Integrability와 Regularity가 우수한 Laplacian 연산자를 적용하는 것이 가장 중요한 문제가 되고, 본 논문에서는 이 문제를 중점적으로 다루고 있다.

본 논문의 연구 수행 방법은 기존의 연구 결과중에서 여러 가지 이산화 방법에 대하여 연구를 수행한 Tafti[4]의 논문에서 제안된 방법에 대하여 검토를 수행하였고, 이와 유사한 연구를 수행한 Russel & Abdallah[5]의 방법에 대해서도 검토하였다. 그리고 이상의 검토 결과를 Sotiropoulos & Abdallah[3]의 계산 결과 및 Ghia[6]의 계산 결과와 비교하였다.

1) 한국기계연구원 해상안전방제연구단 (305-600, 대전광역시 유성구 장동 171, Tel: 042-868-7262)

2) 충남대학교 공과대학 선박해양공학과 (305-764, 대전광역시 유성구 궁동 220, Tel: 042-821-6629)

3) 충남대학교 공과대학 선박해양공학과 (305-764, 대전광역시 유성구 궁동 220, Tel: 042-821-6629)

2. 지배방정식과 이산화 연산자

2.1 지배방정식

본 연구에서는 2차원 비압축성 유동에 대한 지배 방정식으로서 Navier-Stokes 방정식을 사용하였다. 좌표계는 직교 좌표계를 택하고 Cartesian Tensor를 사용하면 지배방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

위 식에서는 Summation Convention을 사용하였고, $x_i = (x, y)$, $u_i = (u, v)$ 이다. 그리고 이 방정식의 모든 항들은 특성 길이 L , 속도 V 그리고 유체의 밀도 ρ 및 점성계수 μ 를 사용해서 무차원화 하였고, $R_e = VL/\nu$ 는 Reynolds수 그리고 ν 는 유체의 동점성 계수를 뜻한다.

운동방정식 (2)를 이용하여 Pseudo 속도 개념을 도입하면 속도를 표현하면 다음과 같이 된다.

$$u_j^{n+1} = \tilde{u}_j - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \quad (3)$$

2.2 이산화 연산자

지배방정식을 이산화 하기 전에 설명을 간편하게 하기 위하여 1차원에 대하여 적용하면, 이산화 된 연속방정식은 Fig. 1과 같은 제어체적에 대하여 Second-Order Accurate을 상용할 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{u_e^{n+1} - u_w^{n+1}}{\Delta} = 0 \quad (4)$$

그리고 Cell Face에서의 속도를 (3)식을 이용하여 표현하면 다음과 같이 된다.

$$u_{(e,w)}^{n+1} = \tilde{u}_{(e,w)} - \Delta t \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{(e,w)}^{n+1} \quad (5)$$

비정규격자의 경우 Cell Face에서 \tilde{u} 와 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 가 주어지므로 이산화에 문제가 없으나, 정규격자의 경우 Cell Face에서의 \tilde{u} 와 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 를 보간에 의하여 구해야한다. 그러므로 Cell Face에서의 속도는 다음과 같은 연산자 표현을 도입하여 표현할 수 있다[4].

$$u_{(e,w)}^{n+1} = \{I\} \tilde{u} - \Delta t \{IG\} p \quad (6)$$

$\{I\}$: Discrete Interpolation Operator

$\{G\}$: Discrete Gradient Operator'

\tilde{u}, Gp : Value at Nodal Point

같은 연산자를 도입하면 압력 Poisson 방정식은 (6)식을 (4)식에 대입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{DIG\} p = \frac{1}{\Delta t} \{D\} \tilde{u} \quad (7)$$

$\{D\}$: Discrete Divergence Operator

Laplacian Operator $\{L\} = \{DIG\}$

3. 정규격자를 사용한 이산화

정규격자를 사용하여 압력 Poisson 방정식을 이산화할 경우 앞에서도 언급한 Integrability 또는 이산화된 연속방정식을 만족하기 위해서는 운동방정식 및 압력 Poisson 방정식에 일관된 이산화 방법을 사용해야 하며, 본 논문에서는 Fig. 1에 나타난 제어체적에 대하여 같은 이산화 방법을 사용하여 속도와 압력을 구하였다. 운동량 방정식의 이산화에는 유한 차분법을 사용하였으며, 대류

항은 2차 풍상 차분을, 그 밖의 공간 도함수들은 중심 차분을 사용하여 근사하였고, Jameson[6]이 사용한 4단계 Runge-Kutta 법 및 implicit residual smoothing 방법을 적용하여 수렴속도를 촉진하였다.

3.1 Laplacian 연산자의 이산화

압력 Poisson 방정식에서 압력에 대한 연속 Laplacian을 이산화하기 위하여 여러 가지 이산화 방법에 대하여 검토하였다. Laplacian 연산자를 형성하는 세가지 연산자 $\{D\}$, $\{I\}$, $\{G\}$ 중에서 Divergence 연산자 $\{D\}$ 는 이산화된 연속방정식을 주어진 제어체적에 대하여 만족하도록 Cell Face에 대하여 표현되는 (4)식처럼 이산화를 수행하였다.

Interpolation 연산자는 다음과 같이 2가지 경우에 대하여 고려하였다.

$$\text{- Second-Order Central-Difference : } u_w = \frac{1}{2}(u_i + u_{i-1}) \quad (8)$$

$$\text{- Fourth-Order Central-Difference : } u_w = \frac{1}{16}(-u_{i-2} + 9u_{i-1} + 9u_i - u_{i+1})$$

Gradient 연산자 $\{G\}$ 는 다음과 같이 3가지 경우에 대하여 고려하였다.

$$\text{- Second-Order Central Difference : } \nabla p_i = \frac{1}{2\Delta}(p_{i+1} - p_{i-1})$$

$$\text{- Third-Order Forward-Biased Form : } \nabla p_i = \frac{1}{6\Delta}(-p_{i+2} + 6p_{i+1} - 3p_i - 2p_{i-1}) \quad (9)$$

$$\text{- Fourth-Order Central Difference Form : } \nabla p_i = \frac{1}{12\Delta}(-p_{i+2} + 8p_{i+1} - 8p_{i-1} + p_{i-2})$$

앞에서 언급한 각각의 연산자의 이산화 방법을 이용하여 여러 가지 형태의 이산화된 Laplacian 연산자를 만들었다. 이것을 간단하게 표현하면 L_{22} , L_{23} , L_{24} , L_{43} 로 나타낼 수 있다. 앞의 첨자는 Interpolation 연산자의 차수를, 뒤의 첨자는 Gradient 연산자의 차수를 의미한다. Laplacian 연산자를 1차원에 대하여 이산화된 형태로 나타내면 다음과 같다[4].

$$L_{22} = \frac{1}{4\Delta^2}(p_{i-2} - 2p_i + p_{i+2})$$

$$L_{23} = \frac{1}{12\Delta^2}(2p_{i-2} + 3p_{i-1} - 8p_i - 2p_{i+1} + 6p_{i+2} - p_{i+3}) \quad (10)$$

$$L_{24} = \frac{1}{24\Delta^2}(-p_{i-3} + 8p_{i-2} + 1p_{i-1} - 16p_i + p_{i+1} + 8p_{i+2} - p_{i+3})$$

$$L_{43} = \frac{1}{96\Delta^2}(-2p_{i-3} + 17p_{i-2} + 36p_{i-1} - 81p_i - 18p_{i+1} + 63p_{i+2} - 16p_{i+3} + p_{i+4})$$

Russell & Abdallah[5]의 이산화 방법은 Tafti의 L_{24} 와 같은 형태의 이산화 방법이다.

이상의 이산화 방법을 비교하기 위하여 Compact Form Laplacian 연산자 L_c 와 Sotiropoulos & Abdallah[3]의 Laplacian 연산자 L_{sa} 를 사용하였다. 단 L_c 는 이산화된 연속방정식을 만족시키지 못한다[3]. 각 연산자에 대한 자세한 표현은 다음과 같다.

$$L_c = \frac{1}{\Delta^2}(p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}) \quad (11)$$

$$L_{sa} = \frac{1}{4\Delta^2}[(1-\epsilon)p_{i-2} + 4\epsilon p_{i-1} - (2+6\epsilon)p_i + 4\epsilon p_{i+1} + (1-\epsilon)p_{i+2}] \quad (0 \leq \epsilon \leq 1)$$

3.2 이산화 방법에 대한 검토

(10)식에 나타나 있는 각 이산화 방법에 대하여 i 와 인접한 점들과의 결속력을 보면 L_{23} 와 L_{43} 이 다른 것에 비하여 결속력이 더 강한 것을 알 수 있다.

그리고 이산화 방법의 Regularity를 검토하기 위하여 이산화된 Laplacian을 Fourier 급수로 표현하는 방법을 사용하였다. 우선 압력의 참 값을 Fourier 급수로 나타내면 다음과 같다.

$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{N/2} \hat{p}(k) e^{ikx_j}, \quad x_j = 2\pi j/N \quad (12)$$

(12)식을 이산화된 Laplacian 연산자 (10), (11)식에 대입한 후 연속 Laplacian으로 Normalize를 취하면, Normalized Fourier 계수는 다음과 같이 구해진다. 단 Wavenumber를 나타내는 ω 는 $k\Delta$ 을 의미한다. 그리고 아래 첨자들은 Laplacian 연산자와 같은 의미를 갖는다.

$$\begin{aligned} \hat{p}_{22}(\omega) &= -\frac{1}{2\omega^2} \{ \cos(2\omega) - 1 \} \\ \hat{p}_{23}(\omega) &= -\frac{1}{12\omega^2} \{ -\cos(3\omega) + 8\cos(2\omega) + \cos(\omega) - 8 \} \\ &\quad -\frac{i}{12\omega^2} \{ -\sin(3\omega) + 4\sin(2\omega) - 5\sin(\omega) \} \\ \hat{p}_{24}(\omega) &= -\frac{1}{12\omega^2} \{ -\cos(3\omega) + 8\cos(2\omega) + \cos(\omega) - 8 \} \\ \hat{p}_{43}(\omega) &= -\frac{1}{96\omega^2} \{ \cos(4\omega) - 18\cos(3\omega) + 80\cos(2\omega) + 18\cos(\omega) - 81 \} \\ &\quad -\frac{i}{96\omega^2} \{ \sin(4\omega) - 14\sin(3\omega) + 46\sin(2\omega) - 54\sin(\omega) \} \\ \hat{p}_c(\omega) &= -\frac{2}{\omega^2} \{ \cos(\omega) - 1 \} \\ \hat{p}_{sa}(\omega) &= -\frac{1}{2\omega^2} \{ (1 - \epsilon) \cos(2\omega) + 4\epsilon \cos(\omega) - (1 + 3\epsilon) \} \end{aligned} \quad (13)$$

Fig. 2에 (13)식의 계산결과가 실려 있다. 그림에서 $\hat{p}(\omega)$ 가 1.0일 경우 이산화에 의한 근사가 연속 Laplacian을 정확히 나타내는 것을 의미하며, $\omega = \pi$ 에서 \hat{p}_c 와 \hat{p}_{sa} 를 제외한 나머지 연산자가 모두 0인 값을 갖는 것으로부터 이들 연산자들이 Grid Scale Wave의 이산화 표현이 불가능한 것을 알 수 있다.

4. 계산 결과의 비교

앞에서 언급한 여러 가지 Laplacian 연산자중에서 L_c (L_{sa} ; $\epsilon=1.0$), L_{22} (L_{sa} ; $\epsilon=0.0$), L_{sa} ($\epsilon=0.05$, $\epsilon=0.5$), L_{23} 들을 사용해서 2차원 Driven Cavity 문제에 대하여 계산을 수행한 후 계산 결과를 비교하여 보았다.

수치 계산은 $Re=1000$ 에 대하여 수행하였고, 계산된 속도를 각각 Ghia[7]의 계산 결과와 비교하였다. $x=0.5$ 와 $y=0.5$ 에서의 속도 및 압력이 Fig. 3과 Fig. 4에 실려 있다. Ghia와 같이 (129×129) 의 등간격 격자를 사용해서 계산을 수행하였으며, 속도와 압력에 대한 최대 Residual이 10^{-5} 보다 작도록 하였다.

경계조건으로는 속도에 대해서는 Dirichlet 조건을 사용하고, 압력에 대해서는 법선방향 압력구배가 0이라는 것을 사용하였고, L_{23} 의 경우 압력을 나타내는 모든 이산화 표현식에 경계에서의 압력이 포함되지 않도록 이산화를 수행하였다.

Fig. 3과 4에서 속도를 비교하여 보면 모든 Laplacian 연산자가 Ghia의 계산 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 압력을 보면 사용된 Laplacian 연산자에 따라 약간의 차이가 있는 것을 볼 수 있으나, 전체적으로 보면 계산 결과는 문제가 없는 것으로 판단된다. 단 L_{22} 의 경우 Grid Scale의 압력 진동이 있는 것을 볼 수 있으며, L_{23} 의 경우 그림에서는 압력의 진동 현상이 보이지는 않으나 Cavity 하단부에서 약간의 압력 진동이 발생된 것이 확인되었다.

5. 결론

정규격자를 사용하여 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 수치해석할 때 발생하는 문제점에 대한 연구를 수행하였다. 기존의 여러 가지 이산화 방법을 사용하여 계산을 수행한 결과 계산된 속도는 Ghia의 계산 결과와 잘 일치하고 있으나, 압력은 이산화 방법에 따라 약간의 차이를 보였다. L_{22}

의 경우 Grid Scale의 압력 진동이 발생하였고, L_{23} 의 경우 Cavity 하단부에서 약간의 압력 진동이 발생된 것이 확인되었다. 이상의 결과로부터 Grid Scale Wave를 표현하지 못하는 Laplacian 연산자는 압력 진동이 발생할 여지가 많은 것을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] C.M. Rhie and W.L. Chow, "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", AIAA J., Vol.21, No.11 (1983)
- [2] J.C. Strikwerda, "Finite Difference Methods for the Stokes and Navier-Stokes Equations", SIAM J. Sci. Statist. Comput., 5, pp56-68 (1984)
- [3] F. Sotiropoulos and S. Abdallah, "The Discrete Continuity Equation in Primitive Variable Solutions of Incompressible Flow", J.C.P., No.95 (1991)
- [4] D. Tafti, "Alternate Formulations for the Pressure Equation Laplacian on a Collocated Grid for Solving the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations", J.C.P. No.116 (1995)
- [5] P.A. Russell and S. Abdallah, "Dilation-Free Solutions for the Incompressible Flow Equations on Nonstaggered Grids", AIAA J., Vol.35 No.3 (1997)
- [6] Jameson, A. and Schmidt, W., "Some Recent Developments in Numerical Methods for Transonic Flows," Computer Methods in Applied Mech. and Eng., 51 (1985)
- [7] U. Ghia, K.N. Ghia & C.T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method", J.C.P., Vol.48, No.2 (1982)

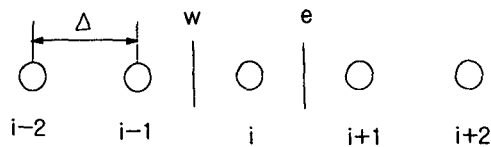


Fig. 1 Computational Cell for Divergence Operator

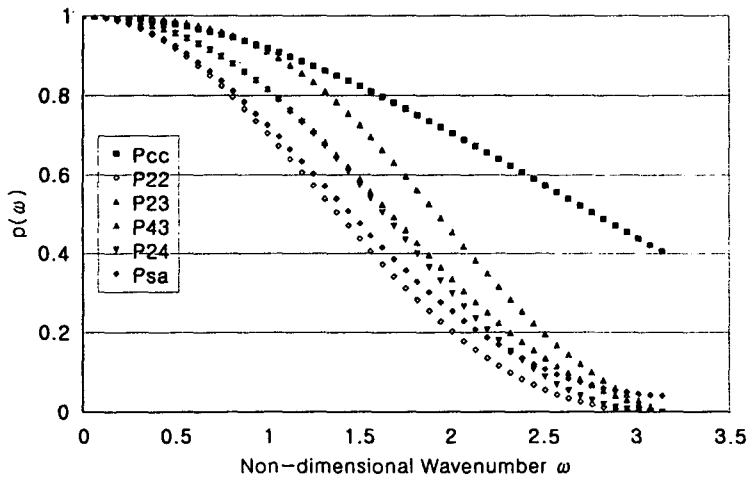


Fig.2 Normalized Fourier Coefficients vs. Non-dimensional Wavenumber for Different Laplacian Operators

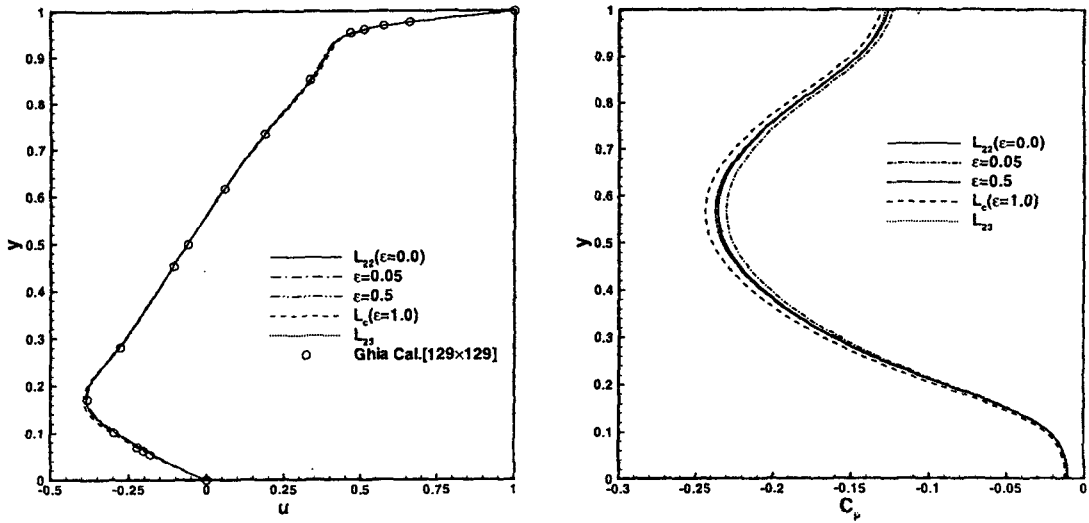


Fig. 3 Horizontal Velocity and Pressure along Vertical Line at $x=0.5$

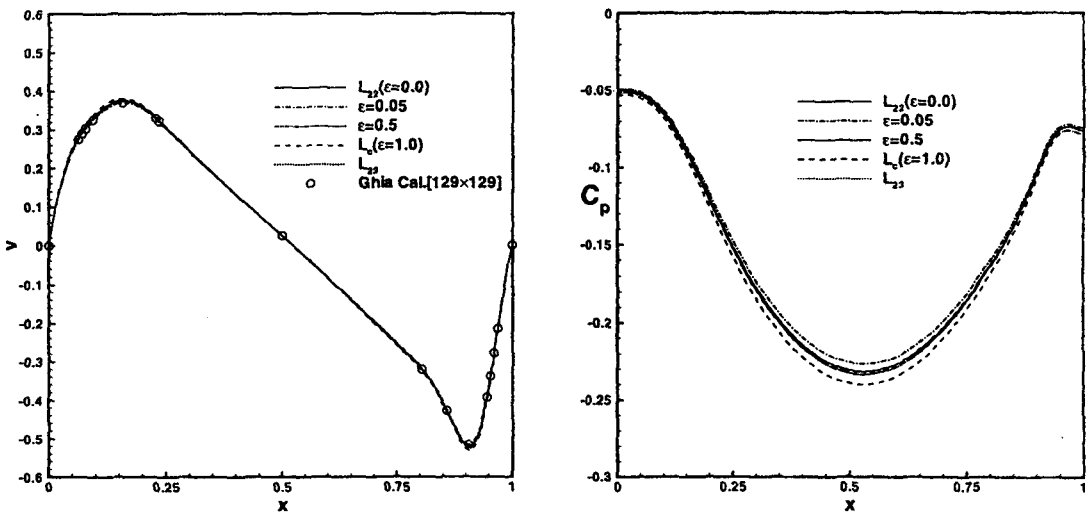


Fig. 4 Vertical Velocity and Pressure along Horizontal Line at $y=0.5$