

전류원 도체 내의 와전류 현상의 2차원 유한 요소 해석

김흥규\*, 정현교\*, 심동준\*\*

서울대학교 전기공학부 전기역학연구소\*, 포항산업과학연구원\*\*

Finite Element Analysis of the Eddy Currents inside the Source Conductors

Hong-Kyu Kim\*, Hyun-Kyo Jung\* and Dong-Joon Sim\*\*

School of Electrical Engineering\*, Seoul National University, RIST\*\*

**Abstract** : The current distribution in the source coil region is analyzed using the two dimensional finite element method. The variables in the FEM are the magnetic vector potentials and the source current density. The boundary condition for the source current density is that the total current is the sum of the eddy current and the source current and is known quantity from measurement. The simulation results are compared with the analytical solution. It is found that the method can analyze the current distribution in the source conductors very accurately.

**Key-words** : finite element method, source current density, skin effect

1. 서 론

교류 자계에 의해 와전류가 유기되는 도체 영역은 두 부분으로 나눌 수 있다. 첫 번째는 전류원 영역의 도체 부분이며, 전원과 직접 연결되어 있는 코일 부분이 여기에 해당한다. 두 번째 도체 영역은 전류원 혹은 전압원과 연결되어 있지 않은 순수한 도체 영역(이하 순수 도체 영역이라고 함)이며, 자속 집중 등의 역할을 하는 철 등의 자성체 부분도 여기에 포함된다.

대부분의 유한 요소법, 경계 요소법 등의 수치해석 기법에 의해 도체에 유기되는 와전류 현상을 해석하는 경우, 전류원에 해당하는 도체 영역에서의 와전류는 무시하고, 순수 도체 영역에 대해서만 와전류 해석을 하고 있다[1,2]. 대부분의 전류원 영역이 와전류를 무시할 정도로 가는 코일로 구성되어 있고 또한 주파수가 높지 않은 경우에는 이러한 해석 결과는 타당하다.

하지만 전류원 영역이 하나의 넓은 단일 코일로 구성되어 있고 전류원의 주파수가 높은 경우 혹은 큰 교류 전류가 흐르는 경우에는 전류원 영역의 도체 내에서도 상당한 와전류가 유기되며, 코일 내에서의 전류 분포는 이를 고려하지 않은 경우에 비해 상당히 변하게 된다. 전류원 도체 내의 와전류 해석이 필요한 문제로서는 대전류가 흐르고 있는 3상 전력 케이블, GIS 탱크 표면의 온도 상승 문제[3], 고주파 유도 가열로 등을 들 수 있다. 3상 전력 케이블 및 GIS의 경우에는 와전류에 의한 케이블 쉬쓰(sheath) 및 탱크 표면에 와전류가 유기되어 주위의 온도를 상승시키며 이러한 온도 상승은 제약 조건으로서 규정

되어 있으며, 정확한 온도 상승 해석을 위해서는 정확한 자체 해석이 필요하다.

전류원 도체의 구성 혹은 순수 도체의 형상이 대칭성 등에 의해서 간단한 경우에 대해서는 여러 가지 해석적 방법에 의한 연구가 진행되었다 [4,5]. 하지만 이러한 방법들은 복잡한 형상에 대해서는 적용할 수 없는 단점이 있다. 전류원 도체 내에서의 전류 분포를 해석하기 위해서 제안된 유한 요소 알고리즘으로서 Integrodifferential method[6,7]가 있다. 이 방법은 전류원 도체를 흐르는 전류를 source 전류와 와전류 항으로 분리하여 유한 요소 정식화를 하였다. 전류에 대한 경계 조건으로서 도체를 흐르는 전체 전류는 이들 두 항의 합으로 부여하였으며, 이는 실제로 측정할 수 있는 양이다. 하지만 이 방법은 미지수로 추가된 source 전류밀도 항을 벡터 포텐셜로 치환하여 최종적으로 얻어지는 시스템 행렬이 sparse하지 않기 때문에 요소수가 많은 2차원 문제에는 적용하기가 어렵다.

본 논문에서는 전류원 도체 내에서 유기되는 와전류 및 순수 도체 내에서 유기되는 와전류 현상을 해석할 수 있는 지배 방정식을 유도하고, 이로부터 와전류 해석을 위한 일반적인 유한 요소 정식화 알고리즘을 전개한다. 전류원 영역의 도체 내 와전류 해석을 위해서는 벡터 포텐셜과 source 전류밀도를 미지수로 하고, 순수 도체 영역에서는 벡터 포텐셜과 스칼라 포텐셜을 미지수로 사용하였다.

2. 유한 요소 정식화

2.1 순수 도체 영역에 대한 정식화

순수 도체 영역에 대한 방정식은 맥스웰 방정식으로부터 식 (1)과 (2)로 표현이 된다. 여기서 식(2)는 스칼라 포텐셜  $\phi$  에 대한 조건을 구하기 위한 전류 연속 방정식이다.

$$\nabla \times \nabla (\nabla \times \vec{A}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_e = \nabla \cdot (-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \nabla \phi) = 0 \tag{2}$$

2차원 해석을 위해서  $\vec{A} = A_z \vec{z}$ ,  $\nabla \phi = \nabla \phi_z$  라고 하면

$\nabla\phi$ 는 한 도체 영역 내의 모든 요소에서는 일정한 값을 가진다. 정상 상태 해석을 위해서 모든 물리량들은 시간에 대해 정현적으로 변한다고 가정하면 시간에 대한 미분은  $j\omega$ 로 바뀌고, 식(1)은 다음의 식으로 전개된다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial A}{\partial y}) - j\omega\sigma A - \sigma\nabla\phi = 0 \quad (3)$$

## 2.2 도체 영역에 대한 정식화

전류원 도체 내에서의 전류는 source 전류 항과 와전류 항으로 나눌 수 있으며, 이 경우 2차원 전자계 확산 방정식은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial A}{\partial y}) - j\omega\sigma A + J_{sz} = 0 \quad (4)$$

여기서  $J_{sz}$ 는 코일 단면의 모든 요소에서 균일하게 분포하고 있는 source 전류 밀도이며  $-j\omega\sigma A$ 는 와전류 밀도항이다. 이 경우 코일 부분에서의 전체 전류 밀도는 다음 식으로 나타내게 된다.

$$-j\omega\sigma A + J_{sz} = J \quad (5)$$

여기서 첫 번째 항은 자속 변화에 의해 유기되는 와전류 성분이며, 두 번째 항은 균일하게 분포하고 있는 source 전류 밀도이며, 이들 두 항은 물리적으로 측정할 수 있는 양이 아니라 해석을 위해 수학적으로 도입된 변수들이다.

전류밀도에 대한 경계조건은 도체 단면을 흐르는 전체 전류로부터 다음식으로 표현된다.

$$\int_S J dx dy = \int_S (-j\omega\sigma A + J_{sz}) dx dy = I_k \quad (6)$$

여기서  $I_k$ 는 전류원 도체 중에서  $k$ 번째 도체에 흐르는 전류의 실효치 값이며, 이 값만이 오로지 실제로 측정 가능한 값이 된다. 또한 적분 영역  $S$ 는 코일 도체 단면에 있는 요소이다.

식(4)와 (6)을 식(7)과 같은 1차 삼각형 형상함수를 사용하고 갤러킨법을 적용시켜 이산화하면 다음의 식(8)의 행렬 방정식을 얻는다.

$$A^T(x,y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x,y) A_i \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} [K] + [T] & -j\omega\sigma[S] \\ -j\omega\sigma[S]^T & j\omega\sigma\Delta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [g_{ik}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [I_m] \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서  $\Delta_e$ 는 삼각형 요소  $e$ 의 면적,  $I_m$ 은  $m$ 번째 전류원 도체를 흐르는 전체 전류의 실효치이다.

식(4)에서 미지수는 source 전류밀도  $J_{sz}$ 이지만, 식(8)의 행렬

이 대칭이 되게 하기 위해 다음과 같이 정의된 미지수를 이용한다.

$$g_{ik} = \frac{J_{sz}}{j\omega\sigma} \quad (9)$$

## 3. 사례 연구

### 3.1 Slot-Embedded Conductor 모델

본 논문에서 전개한 전류원 도체 내의 전류 분포 해석 알고리즘의 타당성을 확인하기 위해서 해석적 해가 존재하는 모델에 대한 해석을 하였다. 그림1과 같은 모델에서 슬롯의 폭이 매우 좁은 경우, 1차원 해석적 해는 식(10)과 같다[6]. 그림 2는 본 논문에 의한 해석 결과와 식(10)에 의한 전류 밀도를 비교한 것이며, 본 논문의 방법이 매우 정확하게 전류원 도체 내의 전류 분포를 해석할 수 있음을 알 수 있다.

$$J(x) = 2\sqrt{2}(1+j) \times \frac{\cos(-\frac{j}{2}) \cosh(\frac{j}{2}) + j \sin(-\frac{j}{2}) \sinh(\frac{j}{2})}{\cos(2\sqrt{2}) \sinh(2\sqrt{2}) + j \sin(2\sqrt{2}) \cosh(2\sqrt{2})} \quad (10)$$

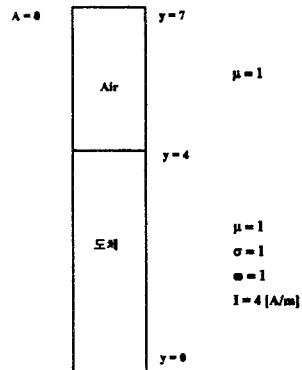


그림 1. Slot-Embedded Conductor 모델

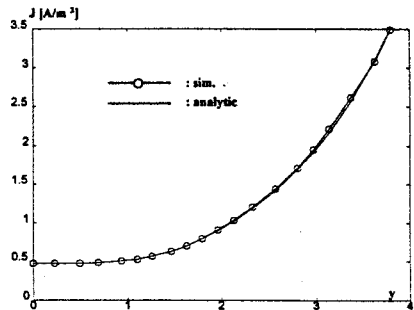
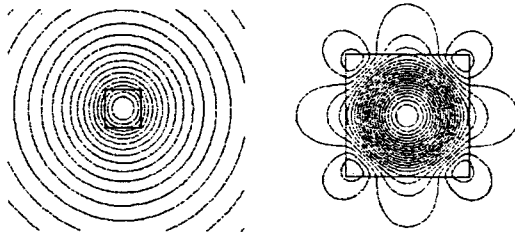


그림 2. 전류 밀도 비교

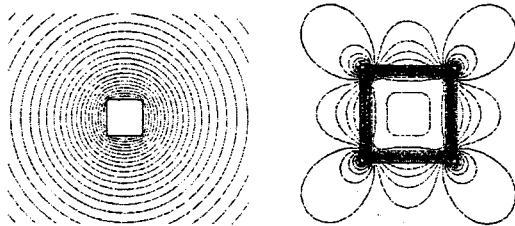
### 3.2 사각형 전류원 도체 모델의 해석

전류원 도체 내의 와전류 영향을 알아보기 위해서 단면이 사각형인 무한이 긴 도체 내의 와전류 해석을 하였다. 전원 주파수에 따른 와전류 특성을 알아 보기 위해 주파수가 60[Hz] 및 10[kHz]에 대해서 해석 결과를 나타내었다. 그림3은 주파수가 60[Hz]일 때 전류 위상각에 대한 자속 분포를 보여준다. 그림 (a)는 위상각이 0도인 경우이며, 이 경우의 자속 분포는 도체 영역의 와전류를 고려하지 않는 경우와 동일한 자속 분포인 동심원 형태를 보여주고 있다. 하지만 위상이 90도인 경우에는 전류원 도체에 유기된 와전류에 의해 자속 분포가 와전류를 고려하지 않은 경우에 비해 현저히 다름을 알 수 있다. 사각형 전류원 도체의 경우 사각형 도체의 모서리 부분에서의 와전류의 위상은 도체 내부의 와전류 위상과 다름을 볼 수 있다.

그림 4는 주파수가 10[kHz]인 경우의 자속 분포를 보여준다. 위상이 0도인 경우 주파수가 60[Hz]인 경우와 비교하여 보면 주파수가 높을 수록 와전류 영향에 의해 자속이 도체 내부로 침투하지 못하고 있음을 볼 수 있다. 위상이 90도인 경우 와전류에 의한 자속은 주파수가 60[Hz]인 경우에 비해서 도체 바깥쪽으로 많이 흐르며 사각형 모서리 부분에서 주파수가 60[Hz]인 경우에 비해서 와전류가 많이 흐름을 볼 수 있다.



(a) 전류 위상 0도 (b) 전류 위상 90도  
그림 3. 주파수 60[Hz]일 때의 자속 분포



(a) 전류 위상 0도 (b) 전류 위상 90도  
그림 4. 주파수 10[kHz]일 때의 자속 분포

### 4. 결 론

본 논문에서는 전류원 도체 및 일반 순수 도체 내의 와전류를 해석할 수 있는 유한 요소 해석 알고리즘을 전개하였으며, 해석적 해가 존재하는 문제의 해석을 통해 이 알고리즘의 타당성을 확인하였다. 본 해석 방법에 의한 사각형 전류원 도체의 해석을 통해 주파수가 높을수록 자속이 도체 내부로 침투하지 못하는 표피효과와 와전류가 사각형 모서리에 많이 흐르는 현상을 볼 수가 있었다. 본 해석 방법은 코일 내의 전류 분포를 해석할 수 있기 때문에, 전력 케이블 등 큰 교류 전류가 흐르는 도체의 인덕턴스 및 AC 저항을 구하는 데 매우 유용할 것이다.

#### [참고 문헌]

- [1]M.V.K. Chari, "Finite element solution of the eddy current problem in magnetic structures", *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. 93, No. 1, pp. 62-72, 1974.
- [2]M.V.K. Chari, P.P.Silvester, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems", *John Wiley & Sons, Ltd*, 1980.
- [3]한국 전기 연구소, "362kV 63kA GIS 설계 및 제조 기술 개발에 관한 연구", 연구 보고서, 1996.
- [4]P.Silvester, "AC resistance and reactance of isolated rectangular conductors", *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-86, pp. 770-774, 1967
- [5]C.J.Carpenter, "A network approach to the numerical solution of eddy current problems", *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-11, pp. 1517 - 1522, 1975
- [6]A.Konrad, "The Numerical Solution of Steady-State Skin Effect Problems -An Integrodifferential Approach", *IEEE Trans., Magn.*, vol. MAG-17, No.1, pp.1148-1152, 1981.
- [7]A.Konrad, "Integrodifferential Finite Element Formulation of Two-Dimensional Steady-State Skin Effect Problems", *IEEE Trans., Magn.*, vol. MAG-18, No.1, pp.284-292, 1982.