

비선형상호작용이 파랑스펙트럼의 발달에 미치는 영향

오 병철*, 이 길성**

1. 서론

Hasselmann(1963b)은 Neumann 스펙트럼에 대한 비선형에너지 전달함수의 수치계산을 처음으로 행하였다. 그 후 Sell and Hasselmann(1972)은 동일한 계산법을 JONSWAP 스펙트럼에 적용하여 비선형에너지 전달에 의하여 스펙트럼의 첨두가 저주파 영역으로 천이하는 현상을 발견하였다. 그러나 이 계산법은 방대한 시간을 필요로 하며 또한 수치적인 불안정성 때문에 계산 정도가 떨어지는 단점을 갖고 있다. 특히 이 방법으로 계산된 결과에 의하면 스펙트럼의 첨두성분이 에너지를 얻는 경우가 생기는데 이는 당시로서는 도저히 받아들이기 어려운 현상이었다. Longuet-Higgins(1976)는 협대역 스펙트럼의 경우 복잡한 비선형 상호작용계수를 일정하다고 가정하여 Hasselmann(1963b)의 방법보다 훨씬 용이하고 수치적으로 안정한 방법을 개발하였으며, Fox(1976)는 이 방법을 표준 JONSWAP 스펙트럼에 적용하여 Sell and Hasselmann(1972)의 결과와는 다른 결과를 얻었다. 이후 Webb(1978)는 좌표변환을 통하여 수치적 불안정을 해소할 수 있는 방법을 제안하였으며 Dungey and Hui(1979)는 협대역 스펙트럼에 적용할 수 있는 간이 계산법을 제안하였으나 비선형에너지 전달의 해석을 둘러싸고 혼란은 계속되었다. 한편 Masuda(1980)는 Hasselmann법(1963b)과 Longuet-Higgins법(1976)을 비교하고 다음과 같이 지적하였다. "Hasselmann법은 수치불안정에 의하여 정도가 나쁘기 때문에 결과를 신뢰하기 어렵고 Longuet-Higgins법은 협대역(narrow banded) 스펙트럼의 가정 때문에 넓은 폭을 갖는 광대역(broad banded) 스펙트럼에 원리적으로 적용할 수 없으며 또한 직감적으로 좋게 보이는 Fox(1976)의 결과는 감쇠역 파랑에 관한 실험결과(Mitsuyasu, 1968)와 크게 차이가 나고 있다." 이러한 검토 후 Masuda(1980)는 위에서 언급한 두 계산법으로는 비선형에너지 전달에 관한 충분한 이해가 어렵다고 보고 특별한 가정 없이 수치적으로도 안정한 계산법을 제안하였다. Masuda(1980)는 Boltzmann 적분의 피적분함수에 포함된 특이점을 해석적으로 처리하여 Hasselmann(1963b)의 방법에서 생길 수 있는 수치적인 불안정을 해소하였다.

본 연구에서는 Masuda(1980)의 적분방법을 사용하여 비선형에너지 전달을 정확하게 계산하고 이를 취송시간 제한 수치파랑모형(duration-limited wave model)에 도입하여 파랑의 스펙트럼 발달에서의 비선형에너지 전달의 효과를 검토한다.

2. 지배방정식

해양파랑의 지배방정식은 파수공간에서 작용보존법칙으로 표현되며 1차원인 경우 다음과 같다.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + C_g \frac{\partial N}{\partial x} = S_{in} + S_{nl} + S_{ds} \quad (1)$$

여기서 x, t 는 공간과 시간의 좌표, $N(\mathbf{k}, t) = F(\mathbf{k}, t)/\omega$ 는 파랑작용(wave action), $F(\mathbf{k}, t)$ 는 파랑 에너지의 파수 스펙트럼, ω 는 고유각주파수(intrinsic angular frequency), \mathbf{k} 는 파수벡터, C_g 는 군속도, S_{in} , S_{nl} 및 S_{ds} 는 각각 바람에 의한 에너지 유입, 비선형상호작용에 의한 에너지 전달 및 백파(whitcapping)에 의한 에너지 소산항이다. 본 연구에서는 일정수심으로 무한한 수평영역을 고려하므로(취송시간 제한의 파랑 발달) 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = S_{in} + S_{nl} + S_{ds} \quad (2)$$

바람에 의한 에너지 유입은 WAMDI Group(1988)의 WAM 모델에서 채용된 Snyder *et al.*(1981)을 사용한다.

* : 한국해양연구소 연안·항만공학연구센터

** : 서울대학교 공과대학 토목공학과

$$S_{in}(f, \theta) = \max \left\{ 0, 0.25 \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(28 \frac{u_*}{C_p} \cos(\theta - \theta_w) - 1 \right) \right\} \omega F(f, \theta) \quad (3)$$

여기서 f, θ 는 주파수와 파향이며, ρ_a 와 ρ_w 는 각각 공기와 물의 밀도, u_* 는 대기의 마찰속도, C_p 는 파랑성분의 위상속도, θ_w 는 풍향을 의미한다. 한편 풍속은 해면상 10m 고도의 풍속을 사용하며 저항계수는 WAM 모형에서 사용된 Wu(1982)의 식을 사용한다.

$$C_D = \left(\frac{u_*}{U_{10}} \right)^2 = (0.8 + 0.065 U_{10}) \times 10^{-3}, \quad U_{10} \geq 7.5 \text{ m/sec} \\ 1.2875 \times 10^{-3}, \quad U_{10} < 7.5 \text{ m/sec} \quad (4)$$

여기서 C_D 는 저항계수, U_{10} 는 수면상 10m에서의 풍속이다.

한편 백파에 의한 에너지 손실은 Hasselmaan(1974)의 백파모형에 기초한 Komen *et al.*(1984)를 사용한다.

$$D(f, \theta) = -2.33 \times 10^{-5} \hat{\omega} \left(\frac{\omega}{\hat{\omega}} \right)^2 \left(\frac{\hat{a}}{\hat{a}_{PM}} \right)^2 F(f, \theta) \quad (6)$$

여기서 $\hat{\omega}$ 는 평균주파수, \hat{a} 는 파랑장의 비선형파라미터로서 파랑의 에너지를

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (7)$$

로 나타내면 각각 다음과 같다.

$$\hat{\omega} = \left[\frac{1}{E} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{-1} F(\omega, \theta) d\omega d\theta \right]^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{a} = \frac{E \hat{\omega}^4}{g^2} \quad (9)$$

한편 $\hat{a}_{PM} = 3.014 \times 10^{-3}$ 으로 PM스펙트럼에 대한 값이다.

3. 비선형상호작용의 계산

비선형상호작용은 파랑 성분간의 상호간섭에 의하여 발생하는 현상이다. 먼저 2개의 파랑이 간섭하여 제3의 파랑을 발생시키는 3파 상호작용을 고려할 수 있다. 그러나 수면파의 분산관계식, $\omega^2 = gk$ (g 는 중력가속도)이 단조증가함수(monotonously increasing function)이므로 3파 비선형상호작용에서는 공명현상이 발생하지 않는다(Hasselmann, 1963b). 따라서 공명은 3개의 파랑이 간섭하여 제4의 파랑을 발생시키는 4파 상호작용에서 일어난다. 4파 공명조건은 다음과 같다.

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \omega_a \quad (10)$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_a \quad (11)$$

이 경우 제4의 파랑성분 \mathbf{k}_4 의 에너지 증가율은 Boltzmann 적분으로 표현되며 다음과 같다.

$$S_{ni}(\mathbf{k}_4) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (12)$$

여기서 G 는 상호작용계수(또는 산란계수)로서 일반적인 수심에 대하여 Hasselmann(1962)에 의하여 처음으로 유도되었으며 심해파인 경우 다음 식으로 주어진다(Dungey and Hui, 1979).

$$G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{\pi g^2 D^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)}{4 \rho_w^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \quad (13)$$

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{2(\omega_1 + \omega_2)^2 (k_1 k_2 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) (k_3 k_4 - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)}{\omega_{1+2}^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(\omega_1 - \omega_3)^2(k_1 k_3 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(k_2 k_4 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4)}{\omega_{1-3}^2 - (\omega_1 + \omega_3)^2} \\
& + \frac{2(\omega_1 - \omega_4)^2(k_1 k_4 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)(k_2 k_3 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)}{\omega_{1-4}^2 - (\omega_1 - \omega_4)^2} \\
& + \frac{1}{2} [(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)] \\
& - \frac{1}{4g^2}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)(\omega_1 + \omega_2)^4 + \frac{1}{4g^2}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4)(\omega_1 - \omega_3)^4 \\
& + \frac{1}{4g^2}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)(\omega_1 - \omega_4)^4 + \frac{5}{2} k_1 k_2 k_3 k_4 \\
& + \frac{1}{g^3}(\omega_1 + \omega_2)^2(\omega_1 - \omega_3)^2(\omega_1 - \omega_4)^2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

식(12)에서 보는 바와 같이 비선형에너지 전달은 6중 적분으로 표현되므로 직접적인 적분방법을 사용하면 대단히 많은 시간이 소요된다. 또한 이 식속에 포함된 delta함수의 처리과정에서 특이점이 발생하며 이는 적분계산의 수치불안정을 야기시킨다. 여기서는 Masuda(1980)가 제안한 방법과 Hasselmann and Hasselmann(1981)의 상세균형의 원리를 사용하여 식(12)의 적분을 계산한다. 먼저 식(12)를 \mathbf{k}_2 에 적분하고 산란계수의 대칭성을 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다(Masuda, 1980).

$$\begin{aligned}
S_{nl}(\mathbf{k}_4) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}_3 \int_{\mathbf{k}_1 \leq \mathbf{k}_2} G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times \\
[N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\mathbf{k}_1
\end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1$ 이며 수식 전개에의 간편성을 위하여 $\rho = g = \omega_p = 1$ (여기서 ω_p 는 첨두각주파수이다)이라고 하면 $\omega_2 = \sqrt{|\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1|}$ 이다. 또한 Jacobian을 사용하여 위의 식을 주파수-파향 공간에서의 에너지 전달로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
S_{nl}(\mathbf{k}_4) = 2\omega_4^4 \int d\omega_3 d\theta_3 \int_{\omega_1 \leq \omega_2} d\omega_1 d\theta_1 (8\omega_1^3 \omega_3^3 G) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\
[N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)]
\end{aligned} \quad (16)$$

한편 공명상호작용 조건을 나타내는 식(10)과 식(11)의 자유도는 5이므로 \mathbf{k}_3 와 \mathbf{k}_4 가 결정되면 \mathbf{k}_1 과 \mathbf{k}_2 의 결정에는 자유도 하나가 생긴다. 공명상호작용하는 4파의 배치는 Longuet-Higgins의 상호작용 도식(Longuet-Higgins, 1962)으로 나타낼 수 있다(Fig. 1). 이 그림에 나타난 곡선군은 다음 식으로 정의되는 γ 의 값(Masuda, 1980)이 일정한 궤적을 나타낸다.

$$\gamma = \frac{\sqrt{|\mathbf{k}_a|}}{\omega_a} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

4파 공명상호작용배치를 결정하기 위하여 자유도 파라미터로서 $\theta_1 - \theta_a$ 를 채용하면 식(10)과 식(11)로부터 다음과 같은 3차의 대수방정식을 얻는다. 여기서 θ_a 는 \mathbf{k}_a 의 방향이다.

$$4\omega_a \omega_1^3 - \{2k_a \cos(\theta_1 - \theta_a) + 6\omega_a^2\} \omega_1^2 + 4\omega_a^3 \omega_1 + (k_a^2 - \omega_a^4) = 0 \quad (18)$$

또한 Fig. 1과 조건 $k_1 \leq k_2$ 로부터 ω_1 은 일의적으로 결정되며 $\theta_1 - \theta_a$ 의 영역은 다음과 같다.

$$\theta \leq |\theta_1 - \theta_a| \leq \pi \quad (19)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2k_a}{\omega_a^2} \right) \quad (20)$$

여기서 $G \sim k^6 \sim \omega^{12}$ 임을 고려하여 다음과 같은 변수를 도입한다.

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &= \theta_1 - \theta_a, & \tilde{\omega}_1 &= \omega_1/\omega_4 \\ \tilde{\theta}_2 &= \theta_2 - \theta_a, & \tilde{\omega}_2 &= \omega_2/\omega_4 \\ \tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \theta_4, & \tilde{\omega}_3 &= \omega_3/\omega_4 \\ \tilde{\mathbf{k}}_a &= \mathbf{k}_a/\omega_4^2, & \tilde{\mathcal{D}} &= \ln \tilde{\omega}_3 \\ \tilde{G} &= G/\omega_4^{12}\end{aligned}\quad (21)$$

그러므로 식(16)을 위의 변수로 나타내면 다음과 같다.

$$S_{nl}(\omega_4, \theta_4) = 2\omega_4^{23} \int_0^\pi d\tilde{\theta}_3 \sum_{\pm} \int_0^\infty d\tilde{\Omega} \sum_{\pm} \int_0^\pi d\tilde{\theta}_1 \sum_{\pm} (8 \tilde{\omega}_1^3 \tilde{\omega}_3^4 \tilde{G} S^{-1}) [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] \quad (22)$$

여기서 $\int_0^\pi d\theta \sum_{\pm} = \int_{-\pi}^\pi d\theta$ 를 의미하며 조건 $k_1 \leq k_2$ 로부터 3평면 $\tilde{\theta}_3 = \pi$, $\tilde{\Omega} = 0$, $\tilde{\theta}_1 = 0$ 와 곡면 $\tilde{\theta}_1 = \varrho(\tilde{\theta}_3, \tilde{\Omega})$ 에 의하여 둘러싸인 영역은 적분에서 제외된다(Fig. 2참조). 한편 S 는 $\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$ 로부터 Jacobian을 사용하여 구해지며 다음 식으로 된다.

$$S = \left| 1 + \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} \right) \left(\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} \right)^2 - \frac{\tilde{k}_a}{\tilde{\omega}_2^2} \cos \tilde{\theta}_1 \right) \right| \quad (23)$$

식(22)는 $S=0$ 에서 특이점을 가지므로 식(10), 식(11) 및 식(23)으로부터 특이점은 $\tilde{\theta}_1=0$ 를 따라서 존재함을 알 수 있다. 또한 식(17)로부터 특이점에서 $\gamma=0$ 으로 되며 이는 Fig. 1에서 “8자형”의 곡선을 따라서 분포한다. 즉, 특이점은 평면 $\tilde{\theta}_1=0$ 상에서 곡선 $\gamma=0$ 으로 주어진다(Fig. 2). 식(22)의 적분시 특이점 주변에서 발생할 수 있는 수치불안정을 제거하기 위하여 특이점 주변의 적분은 해석적으로 구한다. 식(22)의 적분은 $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\theta}_3$ 의 순서로 행한다. 먼저 Fig. 3에서 보는 바와 같이 $\tilde{\theta}_3$ 가 일정한 평면상에서 특이점 주변의 작은 영역 A 를 생각한다. 점 P 는 특이점에서의 값을 의미하며 피적분함수를 $R = 8 \tilde{\omega}_1^3 \tilde{\omega}_3^4 \tilde{G} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)]$ 로 쓰면 영역 A 에서의 적분은 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\int \int_A \frac{R}{S} d\tilde{\Omega} d\tilde{\theta}_1 \approx R_P \int \int_A \frac{1}{S} d\tilde{\Omega} d\tilde{\theta}_1 \quad (24)$$

공명상호작용 조건으로부터 특이점 주변에서 S 는 다음 식으로 근사할 수 있다(부록 D).

$$S = \sqrt{2 \tilde{\theta}_1^2 + 8\sqrt{2}\mu(\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}_P)} \quad (25)$$

여기서 $\mu = (\partial\gamma/\partial\tilde{\Omega})_P = \tilde{\omega}_3/[\sqrt{2} \tilde{\omega}_a^4] [4\tilde{\omega}_3(\tilde{\omega}_3^2 + \cos \tilde{\theta}_3) - \tilde{\omega}_a^3]$ 이다. 그러므로 식(25)를 식(24)에 대입하고 적분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int \int_A \frac{1}{S} d\tilde{\Omega} d\tilde{\theta}_1 &= \frac{\varepsilon_+}{\sqrt{2}} \ln \left[\frac{\sqrt{2\delta^2 + 8\sqrt{2}\mu\varepsilon_+ + \sqrt{2}\delta}}{\sqrt{8\sqrt{2}\mu\varepsilon_+}} \right] + \frac{\delta\varepsilon_+}{\sqrt{2\delta^2 + 8\sqrt{2}\mu\varepsilon_+ + \sqrt{2}\delta}} \\ &+ \frac{\varepsilon_-}{\sqrt{2}} \ln \left[\frac{\sqrt{2\delta^2 - 8\sqrt{2}\mu\varepsilon_- + \sqrt{2}\delta}}{\sqrt{8\sqrt{2}\mu\varepsilon_-}} \right] + \frac{\delta\varepsilon_-}{\sqrt{2\delta^2 - 8\sqrt{2}\mu\varepsilon_- + \sqrt{2}\delta}}\end{aligned}\quad (26)$$

여기서 $2\delta^2 \leq 8\sqrt{2}\mu\varepsilon_-$ 인 경우에는 $2\delta^2 - 8\sqrt{2}\mu\varepsilon_- = 0$ 으로 한다. 위의 식은 $\mu=0$ 즉, 원점 부근에서는 적용될 수 없다. 원점 부근에서 S 는 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$S \approx \sqrt{2 \tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\Omega}^2 - \frac{\tilde{\theta}_3^2}{2}} \quad (27)$$

그러므로 $0 \leq \sqrt{2}\theta_1$, Ω , $\theta_3/\sqrt{2} \leq \epsilon$ 로 정의되는 원점 부근의 영역에 대해서 적분을 하면 다음 식을 얻는다.

$$\int \int \int_B \frac{R}{S} d\theta_3 d\Omega d\theta_1 \approx \left[\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta_1} \right)_0 + \left(\frac{\partial R}{\partial \Omega} \right)_0 \right\} C_x + \sqrt{2} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta_3} \right)_0 C_z \right] \epsilon^3 \quad (28)$$

여기서 하첨자 0는 원점에서 계산된 값을 의미하며 계수 C 는 다음 식으로 계산된다.

$$C_x = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \ln 2 \quad (29)$$

$$C_z = \frac{5}{12} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \quad (30)$$

그러나 수치 적분에서는 원점 부근에서 일어나는 공명상호작용 4파는 모두 동일한 주파수 영역에 해당하게 되므로 상세균형의 원리로부터 식(28)의 기여는 zero가 된다. 그러므로 실제의 수치 계산에서 식(28)은 고려하지 않는다.

비선형에너지 전달계산법의 효율을 올리기 위하여 Hasselmann and Hasselmann(1981, 1985)이 도입한 공명상호작용의 대칭성을 사용한다. 대칭성은 두 종류로 구별된다.

제1종 대칭성은 Boltzmann 적분에 의하여 표현되는 공명성분파간의 상호작용의 성질에 근거한 것으로서 에너지와 운동량 보존 외에 작용이 보존된다는 법칙에서 기인한다(상세균형의 원리).

$$-\frac{\delta N_1}{\delta t} d\mathbf{k}_1 = -\frac{\delta N_2}{\delta t} d\mathbf{k}_2 = \frac{\delta N_3}{\delta t} d\mathbf{k}_3 = \frac{\delta N_4}{\delta t} d\mathbf{k}_4 \quad (31)$$

여기서 $\delta N_i/\delta t (i=1, 2, 3, 4)$ 는 특정한 공명 4파의 작용이 공명에 의하여 단위시간당 증가를 나타낸다. 이것을 이용하면 계산시간을 1/4로 줄일 수 있다. 제2종 대칭성은 산란계수와 공명배치의 기하학적 특성에 기인한다.

- 1) 임의의 공명 4파의 조합과 거울 대칭상을 이루는 조합도 공명 4파를 이루며 상호작용계수는 동일하다(경상변환).
- 2) 공명 4파 조합을 임의의 각도로 회전하여도 공명을 이루며 상호작용계수는 변하지 않는다(회전변환).
- 3) 심해파의 경우 공명 4파에 스케일 변환을 하여도 공명이 발생하며 상호작용계수는 스케일의 누승으로 표현된다(스케일 변환).

Fig. 4는 전형적인 JONSWAP 스펙트럼과 그에 대한 비선형상호작용을 계산한 예이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 비선형상호작용에 의한 에너지 전달은 스펙트럼의 첨두주파수보다 약간 저주파의 영역에서 발생하는데 이로부터 파랑이 발달함에 따라 첨두주파수가 저주파 영역으로 천이하는 현상이 잘 설명된다. Fig. 5는 주파수와 파향의 2차원 평면에서 비선형에너지 전달함을 나타낸 것이다.

4. 수치해석 결과 및 토의

작용보존방정식 식(1)은 스펙트럼이 변화하는 공간과 시간의 규모가 파랑의 파장과 주기에 비하여 큰 경우에 성립하는 것이다. 파랑에너지의 대부분을 포함하는 첨두주파수 부근의 스펙트럼이 변화하는 시간 규모에 비해서 고주파 부분의 역학적 조절에 필요한 시간은 매우 짧다. 따라서 이러한 시간 규모의 불균형을 피하기 위하여 반응해법을 사용한다. 여기서는 취송시간에 지배받는 파랑장을 고려하므로 지배방정식은 식(2)가 된다. 식(2)를 음해법으로 차분하면 다음과 같다.

$$\frac{N^{n+1} - N^n}{\Delta t} = S_{in}^{n+1} + S_{nl}^{n+1} + S_{ds}^{n+1} \quad (32)$$

식(3)과 식(6)으로부터 S_{in} 과 S_{ds} 는 스펙트럼에 대해서 선형임을 알 수 있다. 그러나 식(12)로부터 비선형상호작용에 의한 원천항 S_{nl} 에는 선형 성분 외에 2차의 성분과 상수항이 존재한다.

$$S_{in}^{n+1} = \beta_{in}(u_*) N^{n+1} \quad (33)$$

$$S_{nl}^{n+1} = \alpha_{nl}(N^{n+1})^2 + \beta_{nl} N^{n+1} + \gamma_{nl} \quad (34)$$

$$S_{ds}^{n+1} = \beta_{ds} N^{n+1} \quad (35)$$

식(33), 식(34) 및 식(35)를 식(32)에 대입하면 N^{n+1} 에 대한 2차방정식을 얻으며 이의 근을 구하여

파랑스펙트럼을 구한다. 주파수 분할은 $f_{i+1} = 1.1f_i$ 의 관계가 성립되도록 결정하며 최소주파수는 $f_{\min} = 0.042 \text{ Hz}$, 주파수 분할 수는 25로 하였다. 그리고 파향은 $\Delta\theta = 10^\circ$ 로 하여 분할 수는 36이다.

Fig. 6은 $U_{10} = 20 \text{ m/sec}$ 인 경우의 스펙트럼의 발달을 보여준다. 초기의 스펙트럼은 침두주파수가 0.255 Hz 인 표준 JONSWAP 스펙트럼으로 하였으며 계산시간 간격은 10분을 사용하였다. 스펙트럼은 25시간에서 평형상태에 도달함을 알 수 있다. 그림 7은 $t=100 \text{ hour}$ 에서 에너지의 방향분포를 주파수별로 나타낸 것이다. 방향분포의 유효 폭은 침두주파수에서 가장 좁게 나타났으며 특히 고주파 영역에서는 방향분포가 쌍봉형으로 발전되는 양상을 보여주고 있는데 이는 비선형상호작용의 영향으로 사료된다. 한편 Fig. 8은 초기의 스펙트럼에 **hump**(hump)가 있는 경우에 대한 결과로서 시간이 경과함에 따라 스펙트럼의 hump가 제거되는 것을 알 수 있다. 즉 파랑의 스펙트럼은 자기안정화 (self-stabilization) 기구를 갖고 있으며 이는 비선형상호작용에 의한 결과이다. 자기안정화 기구는 현장관측으로부터 확인되고 있으나 방향분포함수의 쌍봉화는 고주파 영역에서의 스펙트럼 관측자료가 미비하여 확인되고 있지는 않다.

한편 본 연구에 수립된 방법으로 Boltzmann 적분을 계산하는 데는 PENTIUM 300MHz PC에서 1.2초가 소요되므로 실제의 예보모델에 사용하기에는 어려움이 있다. 비선형을 정밀하고 빠르게 계산할 수 있는 방법의 개발이 파랑예보의 정도 향상을 위해 필요하다.

5. 참고문헌

- Dungey, J. C., and Hui, W. H. (1979). "Nonlinear energy transfer in a narrow gravity-wave spectrum." *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. A368, pp. 239-265.
- Fox, M. J. (1976). "On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum II." *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. A348, pp. 467-483.
- Hasselmann, K. (1962). "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory." *J. Fluid Mech.*, Vol. 12, pp. 481-500.
- Hasselmann, K. (1963a). "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility." *J. Fluid Mech.*, Vol. 15, pp. 273-281.
- Hasselmann, K. (1963b). "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 3. Evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum." *J. Fluid Mech.*, Vol. 15, pp. 385-398.
- Hasselmann, K. (1974). "On the spectral dissipation of ocean waves due to whitecapping." *Bound. Layer Meteor.*, Vol. 6, pp. 107-127.
- Hasselmann, S., and Hasselmann, K. (1981). "A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum." *Hamb. Geophys. Einzelschriften, Reihe A: Wiss. Abhand.*, Vol. 52, 138p.
- Hasselmann, S., and Hasselmann, K. (1985). "Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral." *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 15, pp. 1369-1377.
- Komen, G. J., Hasselmann, S., and Hasselmann, K. (1984). "On the existence of a fully developed wind-sea spectrum." *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 14, pp. 1271-1285.
- Longuet-Higgins, M. S. (1962). "Resonant interactions between two trains of gravity waves." *J.*

Fluid Mech., Vol. 12, pp. 321-332.

Masuda, A. (1980). "Nonlinear energy transfer between wind waves." *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 10, pp. 2082-2092.

Sell, W., and Hasselmann K. (1972). "Computations of nonlinear energy transfer for JONSWAP and empirical wind-wave spectra." *Rep. Inst. Geophys. Univ. Hambrug*, pp. 1-6.

Snyder, R. L., Thacker, W. C., Hasselmann, K., Hasselmann, S., and Barzel, G. (1993). "Implementation of an efficient scheme for calculating nonlinear transfer from wave-wave interactions." *J. Geophys. Res.*, Vol. C98, pp. 14507-14525.

The WAMDI Group(13 Authors). (1988). "The WAM model - A third generation ocean wave prediction model." *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 18, pp. 1378-1391.

Wu, J. (1982). "Wind-stress coefficients over sea surface from breeze to hurricane." *J. Geophys. Res.*, Vol. 87, pp. 9704-9706.

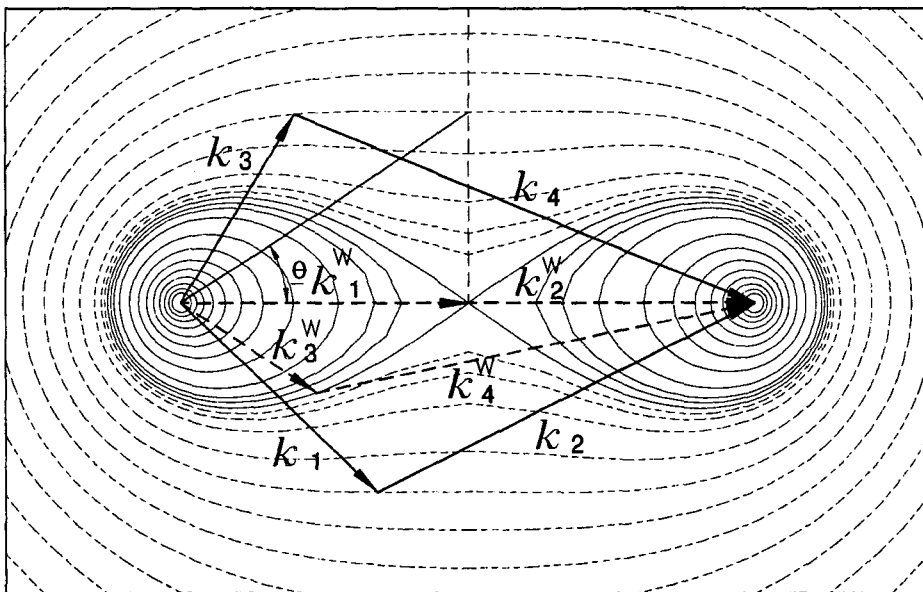


Fig. 1 Interaction chart which illustrates 4-wave resonance conditions; If \mathbf{k}_3 and \mathbf{k}_4 are given, a curve of constant γ is determined, on which \mathbf{k}_1 (or \mathbf{k}_2) must lie. For $\gamma < 0$, θ is defined by $\cos^{-1}(2k_d/\omega_d^2)$. Solid lines correspond to contour for $\gamma > 0$, and dashed for $\gamma < 0$. The figure of eight curve represents $\gamma = 0$. The values of contours are $\pm(0.0, 0.005, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18)$. Superscript W means the interaction configuration of WAM model.

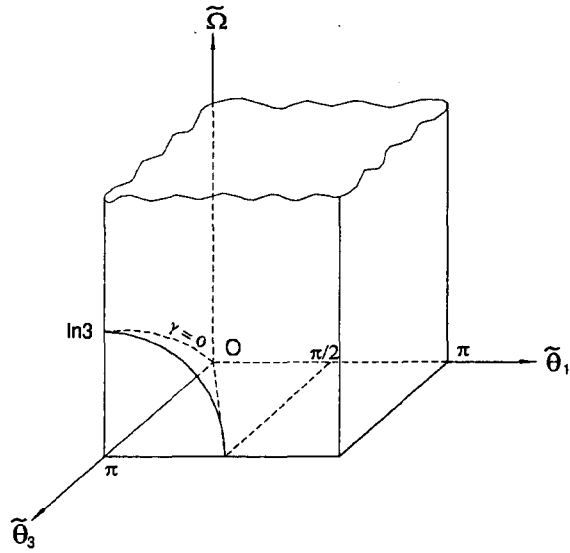


Fig. 2 A schematic rectangular prism for integration region in Masuda's method. The lower left region is ruled out from the condition $k_1 \leq k_2$. Singular points are founded along the curve $\gamma=0$ on the plane $\tilde{\theta}_1=0$.

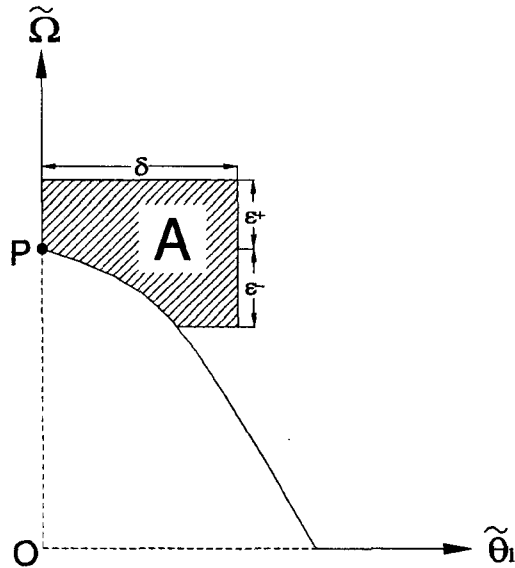


Fig. 3 A schematic diagram of a cross-section ($\tilde{\theta}_3 = \text{const.}$). P means a singular point and the integration over the region A is quasi-analytically computed.

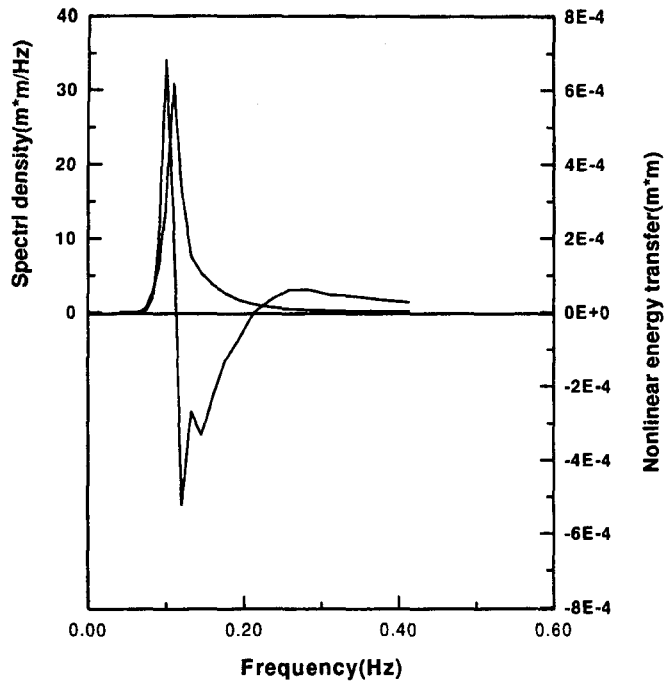


Fig. 4 JONSWAP spectrum and nonlinear transfer

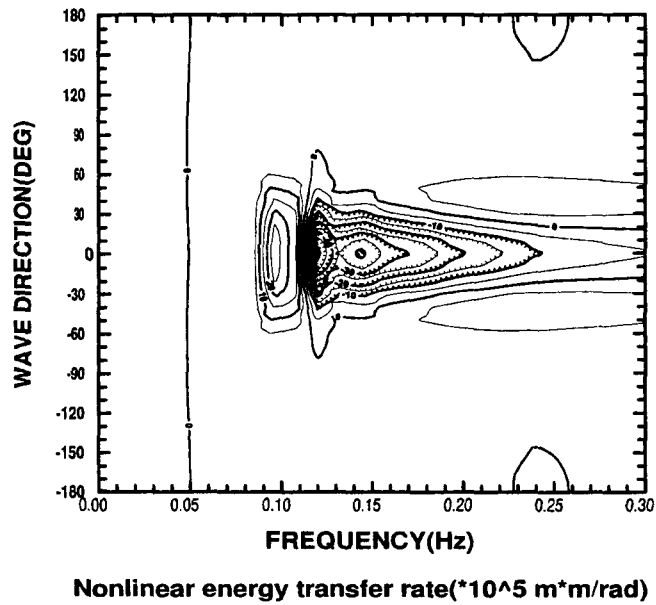


Fig. 5 Contour plot of nonlinear transfer

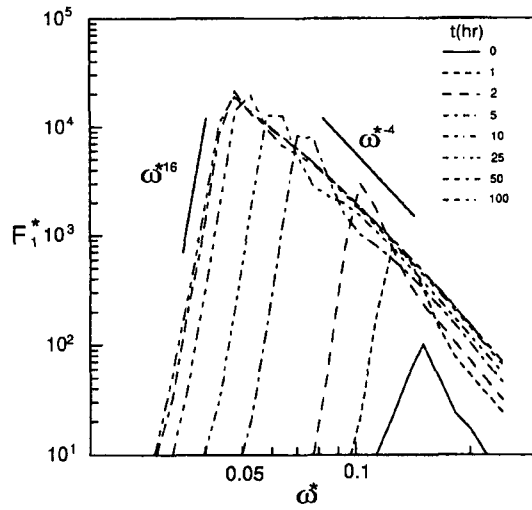


Fig. 6 Duration-limited evolution of frequency spectrum; $F_{1*} = F_1 g^3 / u_*^5$, $\omega^* = \omega g / u_*$

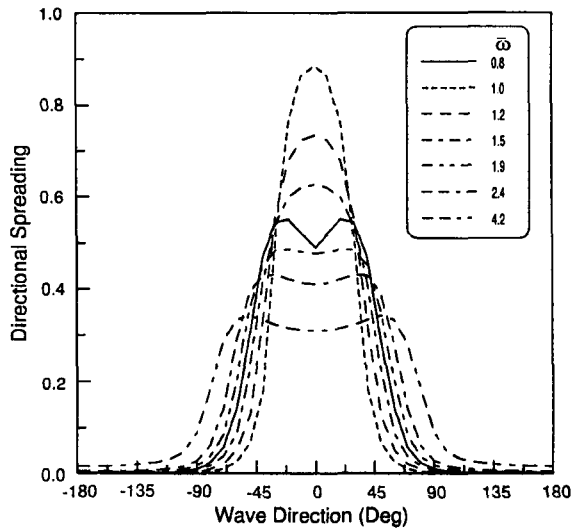


Fig. 7 Directional distributions at several frequencies for the saturated spectra; $\bar{\omega} = \omega / \omega_p$

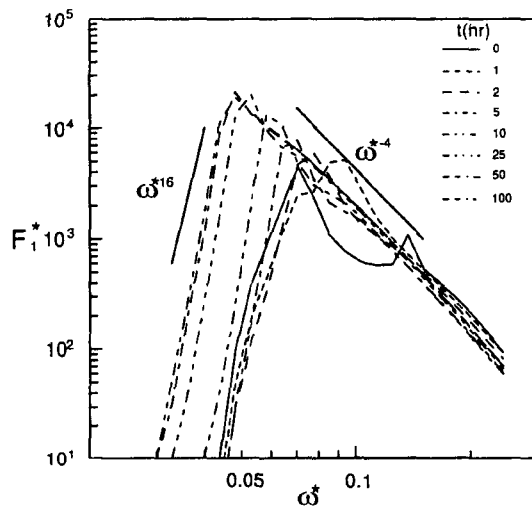


Fig. 8 Evolution of one-dimensional frequency spectrum for the initially perturbed spectrum by a hump.