한국해안 · 해양공학회 정기학술강연회 발표논문 초록집, 1998년 9월 19일

Boussinesq 방정식에서의 내부조파

이 창 훈* · 조 용 식**

1. 머리말

해안에서 인류에게 기쁨과 동시에 슬픔을 안겨주는 자연현상으로 파랑의 역동적인 거동을 들 수 있겠다. 이러한 파랑의 거동에 대한 물리적인 규명은 지금까지도 계속 연구되고 있는 주제로서 파랑의 거동을 가장 정확하게 규명하는 수학적인 모형중의 하나는 Boussinesq 방정식이라고 사료된다. 이는 천해에서 파랑 상호간의 비선형성과 불규칙성을 대체로 정확히 규명할 수 있다. 최근에는 전통적인 Peregrine(1967)의 Boussinesq 방정식의 한계인 수심의 제한성을 극복한 소위 확장형 Boussinesq 방정식이 개발됨으로 인하여 여타 파랑 모형에 비하여 이 모형의 우월성이 한층 고조되었다.

파랑식 가운데 쌍곡선형 파랑식은 실시간으로 파랑의 거동을 재현하고 또한 구조물에서 임의의 반사조건을 부여할 수 있어서 항내정온도 등 공학적인 문제를 해결하는데 많이 사용되고 있다. 쌍곡선형 파랑식에 의한 해법을 살펴보면 초기조건은 대개 잔잔한 상태로 두고 외해의 어느 선상에서 파랑에너지를 발생케 하여 시간이 경과함에 따라 그 에너지가 주 관심영역에 도달할 때까지 해석하게 된다. 그런데 문제는 계산영역 내에서의 파랑에너지의 교란이 외해로 반사되어 되돌아갈 때 이것이 재반사되지 않아야 실제의 상황을 예측할 수 있을 것이다. 이를 해결할 수 있는 효과적인 방법으로서 외해 경계에 스폰지층을 두고 육지쪽으로 바로 그 앞에 소위 내부조파선을 두는 것이다. 그러면 조파선에서 생성된 파랑의 에너지는 조파선의 양쪽으로 퍼져 나가고 계산영역 내에서 외해로 반사되어 오는 파랑에너지는 아무런 교란없이 조파선을 통과한 뒤 스폰지층에서 흡수하게 된다.

내부조파선에서 내부조파하는 방법으로서 현재까지 두가지 서로 다른 견해가 있다. 첫째는 질량전송의 견해로서 조파선에서 생긴 교란파의 질량이 위상속도로 전파한다는 것이고 이는 Perergine의 Boussinesq 방정식과 Copeland(1985)의 완경사방정식에 적용되었다(Larsen과 Dancy, 1983; Madsen과 Larsen, 1987). 둘째는 에너지전송의 견해로서 조파선에서 생긴 교란파가 에너지속도로 전파한다는 것이고 이는 Radder와 Dingemans(1985)의 완경사방정식과 Copeland의 완경사방정식에 적용되었다(이창훈, 1997). 이창훈은 Radder와 Dingemans 식에 질량전송의 견해를 적용하여 잘못된 결과가 나옴을 확인하였다. 또한, Copeland 식의 경우 에너지속도가 위상속도와 같아서 두 견해가 모두 적용가능함을 발견하였다. 더 나아가 그는 Peregrine의 Boussinesq 방정식에서 에너지속도는 천해에서 위상속도와 거의 일치하기 때문에 질량전송의 견해가 적용될 수 있었다고 주장하였다. 다시 말해서, 심해로 갈수록 질량전송의 견해를 적용하는데 한계가 있을 것이라는 암시를 남겼다.

본 연구는 천해뿐만 아니라 중간수심해까지 해석이 가능한 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 각기 다른 두 관점, 즉 질량전송과 에너지전송을 모두 적용하여 내부

* 한국해양연구소 연안 · 항만공학연구센터

** 세종대학교 공과대학 토목환경공학과

조파한 뒤 어느 관점을 사용했을 때 원하는 파랑에너지를 제대로 얻을 수 있는지 규명하고자 하였다. 제2장에서 질량전송 및 에너지전송의 원리를 설명하고 위상속도 및 에너지속도를 구하였다. 제3장에서 유한차분법을 사용하여 cnoid 파 및 정현파를 내부조파하였으며, 제4장에서 결론을 내렸다.

2. 질량전송과 에너지전송

Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla\cdot[(h+\eta)\,\mathbf{u}]+\nabla\cdot\left\{\left(\frac{z_a^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)h\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\left(z_a+\frac{h}{2}\right)h\nabla[\nabla\cdot(h\,\mathbf{u})]\right\}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}+g\nabla\eta+z_a\left\{\frac{z_a}{2}\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)+\nabla\left[\nabla\cdot\left(h\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right]\right\}=0 \quad (2)$$

위 식에서 η는 수면변위이고, $\mathbf{u}$는 임의의 위치 $z=z_a$에서의 수평방향의 유속이고, h는 정지수면에서의 수심, g는 중력가속도, ∇은 수평미분연산자, $\alpha=(z_a/h)^2/2+z_a/h$이다. 본 연구에서는 α=-0.4로 하였으며, 이때 z_a/h=-0.55이다.

내부조파는 조파선에서 매시간 계산된 수면변위 η에 다음의 값 η^*를 더함으로써 가능하다.

$$\eta^*=\begin{cases}2\eta^I\dfrac{C\Delta t}{\Delta x}\cos\theta, & \text{질량전송의 관점}\\[2ex] 2\eta^I\dfrac{C_e\Delta t}{\Delta x}\cos\theta, & \text{에너지전송의 관점}\end{cases} \quad (3)$$

위 식에서 η^I는 입사파의 수면변위, C는 입사파의 위상속도, C_e는 입사파의 에너지속도, θ는 입사파의 파향선이 x축과 이루는 각이다. 이때 조파선은 y축과 나란하다고 가정하였다.

기하광학기법을 사용하여 파랑의 위상속도와 에너지속도에 대한 정보를 얻을 수 있다. 식 (1)을 공간에 대하여 미분하고 식 (2)를 시간에 대하여 미분한 뒤 이 두 식에서 η를 소거하면 다음과 같은 하나의 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}-gh\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)gh^3\nabla\{\nabla\cdot[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})]\}+\alpha h^2\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\right)=0 \quad (4)$$

파향선의 방향, 즉 s방향을 따라 파랑을 살펴보면 공간상으로 1차원으로 해석이 가능하다. 이때 유속 u를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u=Ae^{i\psi} \quad (5)$$

여기서 A는 유속의 진폭이고, 위상함수 ψ는 파수 k와 각주파수 ω와 함께 다음과 같은 관계가 있다.

$$k=\frac{\partial \psi}{\partial s}, \qquad \omega=-\frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (6)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하고 실수부의 O(1) 항을 정리하면 다음과 같은 위상속도 C를 구할 수 있다.

$$C=\frac{\omega}{k}=\sqrt{gh\frac{1-\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)(kh)^2}{1-\alpha(kh)^2}} \tag{7}$$

또한, 식 (5)를 식 (4)에 대입하고 허수부의 $O(\partial A/\partial t, \partial A/\partial s)$ 항을 정리하면 다음과 같은 에너지전송식이 나온다.

$$\frac{\partial A}{\partial t}+C_e\frac{\partial A}{\partial s}=0 \tag{8}$$

여기서 에너지속도 C_e는 다음과 같다.

$$C_e=C\left\{1-\frac{(kh)^2}{3\left[1-\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)(kh)^2\right][1-\alpha(kh)^2]}\right\} \tag{9}$$

3. 수치실험

공간상으로 1차원의 경우에 대하여 수치실험을 수행하였다. 계산영역의 좌·우경계에 스폰지층을 두어 이 경계로부터 파랑에너지의 반사를 억제하였다. 식 (1)과 (2)를 공간상으로 1차원의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\eta)u]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{z_a^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)h\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(z_a+\frac{h}{2}\right)h\frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu)\right]=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}+g\frac{\partial\eta}{\partial x}+z_a\left[\frac{z_a}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+wu=0 \tag{11}$$

여기서 w는 스폰지층 밖에서는 0이고 스폰지층의 시작점부터 끝점까지는 0부터 ω까지 기하급수적으로 증가한다.

식 (10)과 (11)에서 u와 η를 공간적으로 교호격자(staggered grid) 상에 두고, 공간상의 미분식은 $O(\Delta x^4)$의 오차가 발생할 때까지 차분하였다. 먼저 식 (10)에서 n번째 시간단계에서의 값을 이용하여 ($n+1/2$)단계에서의 η에 해당되는 $\eta_0^{n+1/2}$를 구하였다. 다시 식 (10)에서 공간미분식에 있는 η를 $\eta_0^{n+1/2}$로 써서 ($n+1/2$)단계에서의 $\eta^{n+1/2}$를 구하였다. $\eta^{n+1/2}$를 표현하는 식에는 u가 $(u^n+u^{n+1})/2$로 나타나기 때문에 미지의 값인 u^{n+1}이 포함되어 있다. 그리고, 식 (11)을 n단계와 ($n+1$)단계 사이에서 시간차분하였다. 이때 η는 $\eta^{n+1/2}$로 나타내었다. 식 (11)을 차분하는 과정에서 미지수 u^{n+1}이 다음과 같은 hepta-diagonal 행렬로 표현된다.

$$A_i u_{i-3}^{n+1}+B_i u_{i-2}^{n+1}+C_i u_{i-1}^{n+1}+D_i u_i^{n+1}+E_i u_{i+1}^{n+1}+F_i u_{i+2}^{n+1}+G_i u_{i+3}^{n+1}=H_i \tag{12}$$

여기서 $A_i, \cdots, H_i$는 n단계에서의 기지의 값인 η^n, u^n으로 표현된 계수이고, 아래첨자 i는 i번째 공간지점을 의미한다. 이 식을 풀면 ($n+1$)단계에서의 u^{n+1}를 얻게 된다. 식 (10)을 n단계와 ($n+1$)단계 사이에서 시간차분하였다. 이때 u를 $(u^n+u^{n+1})/2$로 나타내었다. 식 (10)을 차분하는 과정에서 미지수 η^{n+1}이 다음과 같은 penta-diagonal 행렬로 표현된다.

$$\alpha_i \eta_{i-5/2}^{n+1} + \beta_i \eta_{i-3/2}^{n+1} + \gamma_i \eta_{i-1/2}^{n+1} + \delta_i \eta_{i+1/2}^{n+1} + \varepsilon_i \eta_{i+3/2}^{n+1} = \sigma_i \tag{13}$$

여기서 $\alpha_i, \cdots, \sigma_i$는 n단계에서의 기지의 값인 η^n, u^n과 ($n+1$)단계에서의 기지의 값인 u^{n+1}으로 표현된 계수이다. 이 식은 풀면 ($n+1$)단계에서의 η^{n+1}를 얻게 된다.

격자간격은 $\Delta x = L/20$ (L은 파장임)로 두어 공간적으로 충분한 해상도를 얻었고, Courant 수는 $C_r = C_e \Delta t/\Delta x = 0.2$ (Δt는 시간간격임)로 두어 수치적으로 안정한 해를 얻을 수 있었다. 서서히 조파하기 위하여 식 (3)으로 표현되는 η^*에 $\tanh(t/T)$ (T는 파의 주기임)를 곱하였다. 그리고, 좌·우경계에는 완전반사조건을 사용하였다.

먼저 Larsen과 Dancy(1983)가 cnoid 파를 내부조파한 것과 같은 경우에 수치실험을 하였다. 즉, 계산영역은 400 m의 내부영역과 오른쪽 경계에 스폰지층으로 구성되어 있고 조파점은 내부영역의 가운데에 두었다. 입사파의 주기는 T=20 sec, 파고는 H=0.5 m, 수심은 h=10 m이다. 이때 파장은 L=195 m이고, 상대수심은 kh=0.1 π이고, 파형경사는 a/h=0.025이고, Ursell 수는 $U_r = (a/h)/(kh)^2$=0.24이다. 에너지전송 및 질량전송의 관점을 사용하여 조파 시작 후 10주기부터 11주기가 경과한 시각에 1/10주기 단위로 수면변위를 그림 1에 도시하였다. 이는 Larsen과 Dancy의 Fig. 2와 비교가 가능하다. 본 연구의 두 결과가 Larsen과 Dancy의 결과와 거의 같음을 알 수 있다. 이는 kh=0.1 π의 천해에서는 Peregrine의 Boussinesq 방정식과 Nwogu의 Boussinesq 방정식이 거의 같기 때문이다. 질량전송에 의한 결과가 에너지전송에 의한 결과보다 약간 크게 나왔는데 그 비율은 C/C_e=1.03과 일치하였다.

두 번째 수치실험으로서 천해($kh=0.05\pi$)에서부터 심해($kh=5\pi$)까지 상대수심을 달리하면서 정현파를 내부조파하였다. 파의 주기는 T=10초, 파형경사는 a/h=0.01로 하고, 질량전송 및 에너지전송의 두 관점을 사용하여 내부조파하였다. 계산영역은 $8L$의 내부영역과 좌·우로 각각 $2.5L$ 두께의 스폰지층으로 구성되어 있다. 내부조파점은 계산영역의 가운데에 두었다. 조파 시작 후 10주기가 경과한 시각에 조파점의 오른쪽으로 L과 $3L$사이의 거리에서 파고를 측정하였다. 측정된 파고 대 입사파의 파고의 비를 Fig. 2에 나타내었다. 에너지전송에 의하여 조파된 파고는 입사파의 파고와 거의 일치하였으나 질량전송에 의하여 조파된 파고는 입사파의 파고와 일치하지 않고 그 비가 C/C_e에 근접하였다. 즉, Nwogu의 Boussinesq 방정식에서 질량전송의 조파원리가 맞지 않고 에너지전송의 원리가 맞다는 것을 알 수 있다.

세 번째 수치실험으로서 에너지전송의 원리를 사용하여 천해에서의 cnoid 파를 조파하였

다. 파의 주기와 수심은 첫 번째 수치실험과 같게 하였고 파고는 H=0.1 m, 0.5 m, 3 m의 세가지 경우에 수치실험을 하였다. 이때 Ursell 수는 각각 U_r=0.05, 0.24, 1.44이다. 계산영역은 $8L$의 내부영역과 좌·우로 각각 $2.5L$ 두께의 스폰지층으로 구성되어 있다. 내부조파점은 계산영역의 가운데에 두었다. 조파 시작 후 10주기가 경과한 시각에 수면변위를 그림 3에 나타내었다. H=0.1 m인 경우에 재현된 파는 정현파에 가까웠다. 그리고, 파고가 크면 클수록 파봉은 더 뾰족하고 파곡은 더 평평하였다. 이것은 천해에서의 비선형파의 특징이다. 특이한 사항은 파고가 크면 클수록 파장도 길어지고 파속도 빨라졌다.

4. 결론

Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에서 내부조파를 할 때 올바른 조파원리가 질량전송인지 아니면 에너지전송인지 규명하였다. 천해에서부터 심해까지 수심을 달리하면서 정현파를 내부조파한 결과 에너지전송의 원리를 사용하면 원하는 파의 에너지를 제대로 얻을 수 있었고 질량전송의 원리를 사용하면 수치적으로 재현된 파고가 원하는 파고에 비하여 C/C_e의 비로 다르게 나왔다. 내부조파를 하면 파랑이 조파점을 통과할 때 아무런 교란이 생기지 않음을 확인하였다. 또한, 파고가 커짐에 따라 파봉이 뾰족해지고 파곡이 평평해지고 파장이 길어지고 파속이 빨라지는 특성도 확인하였다. 쌍곡선형의 파랑식에서 내부조파를 할 때 에너지전송의 원리는 수치실험한 모든 경우(Radder와 Dingemans의 완경사방정식, Copeland의 완경사방정식, Nwogu의 Boussinesq 방정식)에 바른 결과를 얻을 수 있었다. 이제 쌍곡선형의 파랑식에서의 올바른 조파원리는 질량전송이 아닌 에너지전송이라는 결론을 내릴 수 있겠다.

참고문헌

1. 이창훈. (1997). "시간의존 완경사방정식에서의 내부조파기법," 대한토목학회논문집, Vol. 17 (2-2), pp. 359-366.
2. Copeland, G.J.M. (1985). "A practical alternative to the mild-slope wave equation," *Coastal Eng.*, Vol. 9, pp. 125-149.
3. Larsen, J. and Dancy, H. (1983). "Open boundaries in short wave simulation - a new approach," *Coastal Eng.*, Vol. 7, pp. 285-297.
4. Madsen, P.A. and Larsen, J. (1987). "An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation," *Coastal Eng.*, Vol. 11, pp. 329-351.
5. Nwogu, O. (1993). "Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation," *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, Vol. 119, pp. 618-638.
6. Peregrine, D.H. (1967). "Long waves on a beach," *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp. 815-827.
7. Radder, A.C. and Dingemans, M.W. (1985). "Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves," *Wave Motion,* Vol. 7, pp. 473-485.

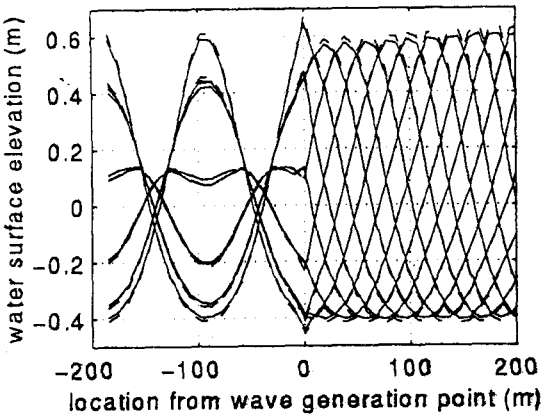

그림 1. cnoid 파의 내부조파 (——— = 에너지전송, - - - = 질량전송).

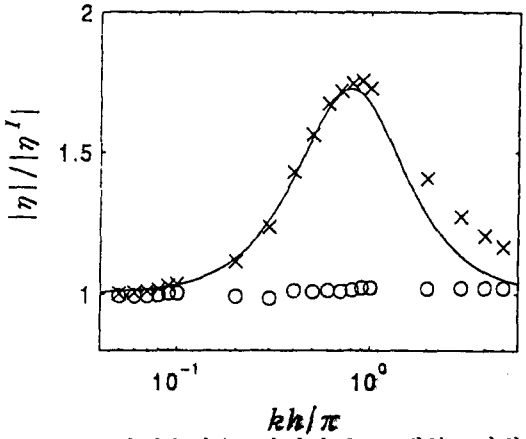

그림 2. 상대수심을 달리하면서 내부조파한 정현파의 파고 대 입사파의 파고비 (o = 에너지전송, x = 질량전송, ——— = C/C_e).

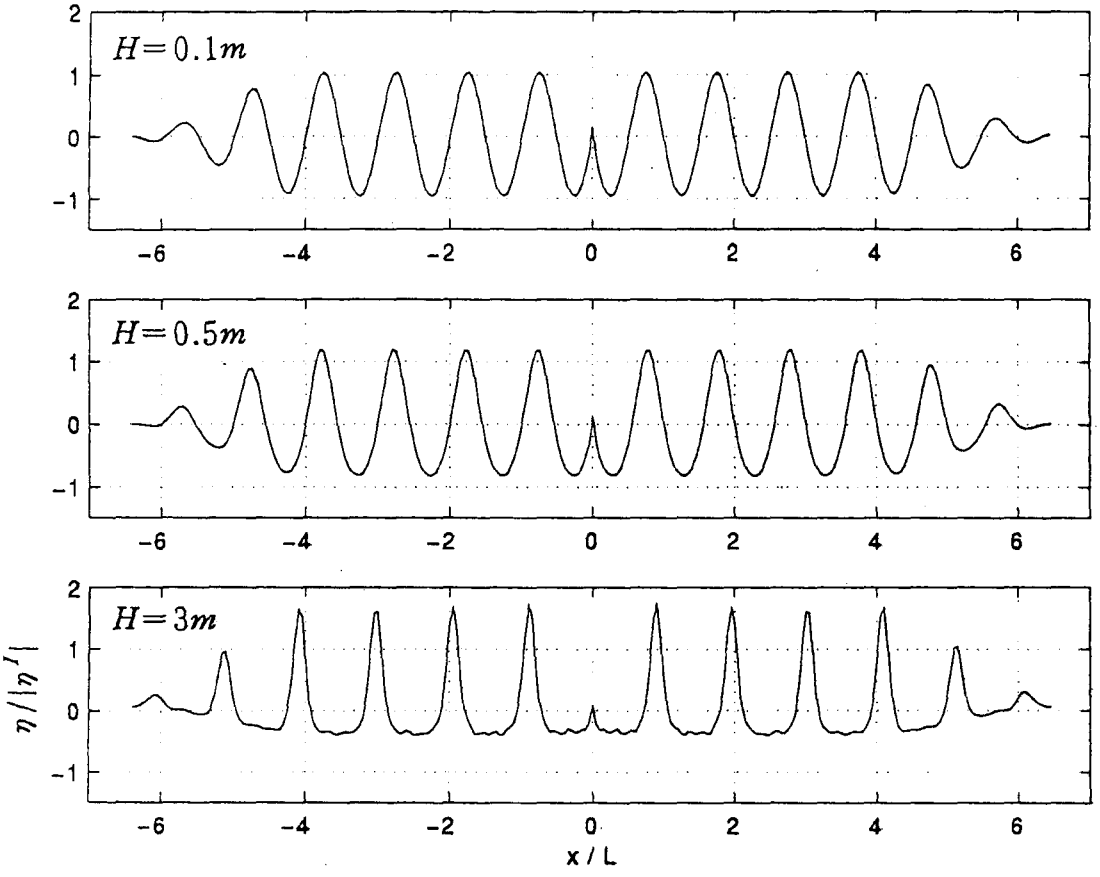

그림 3. 에너지전송의 원리를 사용하여 파고를 달리하면서 내부조파한 cnoid 파의 무차원 수면변위