

SOWMAC법을 이용한 2차원 오염물질 전송모형

A Two-Dimensional Pollutant Transport Model Using SOWMAC Scheme

이 동 수* · 박 원 경* · 윤 병 만** · 편 종 근**

1. 서 론

고도의 산업발달은 인간환경과 밀접한 하구와 해안의 오염을 심화시켜 최근 사회적 문제로 대두되고 있으며, 이에 오염물질의 이동을 예측하고 제어하려는 노력이 꾸준히 진행되어 왔다. 이같은 노력은 수치모형을 이용한 수질관리 연구에도 많은 진전을 가지고 왔으며, 오일러적 모형, 라그랑주적 모형, 오일러-라그랑주적 모형이 대표적이다. 오일러-라그랑주적 모형은 이류에 대해 라그랑주적 방법, 확산에 대해 오일러적 방법으로 해석함으로써 각 방법들의 장점을 취하여 수치적 진동, 수치적 확산이 적고 효율성이 뛰어나 최근 많이 연구되고 있다. 그러나 고정격자점에서의 이류에 대한 라그랑주적 방법의 도입은 모형의 2차원, 3차원으로의 확장에 있어 보다 높은 정확성을 위한 상위 보간 알고리즘을 필요로 하며, 이에 더 많은 계산시간이 요구되는 문제점이 지적된 바 있다.

이(1998)는 이류에 대해 후방추적 방법을 이용하는 기존의 오일러-라그랑주적 방법과는 달리 보간 기법이 불필요한 전방추적 방법을 제안하였다. Komatsu 등(1997)은 이류에 대한 기존의 방정식보다 정확성과 안정성을 갖는 파동방정식으로 변환하여 해석하고, 절단오차를 최소화하였으며, 3점 보간만으로도 다차원으로의 확장을 용이하게 할 수 있는 SOWMAC (Second Order Wave equation Method for Advective Calculation)법을 제안하였다. 그러나 대부분의 모형들이 수치해석상의 문제를 제안하였을 뿐 실무에 필요한 현장에서의 적용성 검증은 이루어지지 못한 실정이다.

본 연구에서는 2차원 이류-확산 모형을 수립하기 위하여 Komatsu 등(1997)이 제안한 SOWMAC법을 이용하여 이류항을 해석한 후, ADI 방법으로 확산항을 해석하는 오일러-라그랑주적 방법을 이용하였다. 개발된 모형은 이론해 및 타 모형들과의 비교를 통한 모형검증 및 실제해역에 적용하여 기존의 라그랑주적 모형인 Random Walk모형의 결과와 비교하였으며, 매우 만족스러운 결과를 얻을 수 있었다.

2. 기본방정식 및 해석방법

농도의 연직변화를 무시할 수 있는 경우 오염물질의 이류-확산은 다음과 같은 2차원 수심적분된 물질보존 방정식으로 표현할 수 있다(Falconer, 1991).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial CU}{\partial x} + \frac{\partial CV}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[HD_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + HD_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} \right] - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left[HD_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + HD_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \right] - q_c \quad (1)$$

여기서, C 는 농도, H 는 총수심, U, V 는 x, y 방향의 수심평균 유속, q_c 는 sink/source항, $D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, D_{yy}$ 는 수심평균된 분산과 난류확산 계수의 x, y 방향 성분이다.

* (주) 대영엔지니어링 부설기술연구소

** 명지대학교 토목·환경공학과

한편 식 (1)은 이류와 확산이 별개의 연속적인 과정이라는 가정하에 도입된 연산자 분리법을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[HD_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} + HD_{xy} \frac{\partial C}{\partial y} \right] + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left[HD_{yx} \frac{\partial C}{\partial x} + HD_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \right] + q_c \quad (3)$$

2.1 SOWMAC 법

식 (2)에 포함된 1계 공간 도함수의 수치적 damping, phase errors, oscillation 등을 최소화하고자 Komatsu 등(1997)은 식 (2)를 2계 도함수로 표현하여 해석하였다. 식 (2)를 1차원만을 고려하여 x 와 t 에 관해 각각 미분하고, U 가 일정하다는 가정하에 정리하면 다음의 파동방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - U^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

상기식을 차분식으로 표현하면 다음과 같다.

$$(1-x)(C_{i-1}^{n+1} - 2C_{i-1}^n + C_{i-1}^{n-1}) + x(C_i^{n+1} - 2C_i^n + C_i^{n-1}) - a^2[\theta(C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + (1-\theta)(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)] = 0 \quad (5)$$

여기서, $a = U\Delta t/\Delta x$ 의 Courant 수이며, x 와 θ 는 weighting parameter이다. 그림 1에 나타낸 것과 같이 특성곡선상의 임의 시간단계 $(n-1)'$ 를 도입하여 $C_i^{(n-1)'} = C_i^n$, $C_i^{(n-1)'} = C_{i-1}^n$ 로 표현하면, 식 (5)에 포함된 $(n-1)$ 시간단계의 값들은 시간축의 $(n+1)$, (n) , $(n-1)'$ 단계의 3점들로부터 보간을 통하여 구할 수 있으며, 이를 정리하면 식 (5)는 다음 식으로 변환되어진다.

$$2(1-x)[C_{i-1}^{n+1} - (a+1)C_{i-1}^n + aC_i^n] + 2x[C_i^{n+1} - (a+1)C_i^n + aC_{i+1}^n] = a(a+1)\theta(C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + a(a+1)(1-\theta)(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (6)$$

Komatsu 등(1997)은 x 와 θ 를 일반적인 상수로 취급하지 않고 차분화 과정에 포함된 절단오차를 최소화하기 위해 a 의 함수로서 표현하여 다음 식을 구하였다.

$$x = 0.5155a + 0.9688, \quad a\theta = -0.1691a - 0.3152 \quad (7)$$

지금까지의 유도과정은 $U > 0$ 일때의 경우이나, 음의 유속 일때에도 mirror image를 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 즉, $i+1 \rightarrow i-1$, $i-1 \rightarrow i+1$, $a \rightarrow |a|$ 로 하여 식 (6)을 표현하면 되며, 이 두조건을 모두 만족할 수 있도록 정리하여 얻어진 최종식은 다음과 같다.

$$p_1 C_{i-1}^{n+1} + p_2 C_i^{n+1} + p_3 C_{i+1}^{n+1} = p_4 C_{i-1}^n + p_5 C_i^n + p_6 C_{i+1}^n \quad (8)$$

여기서, $p_1 = 0.3776a_{0-} + 0.3152a_{0-} - 0.5467a_{1+} + 0.4843a_{1-} + 0.1691a^2$

$$p_2 = 1.3072 + 0.0624|a| - 0.3382a^2$$

$$p_3 = 0.3152a_{0+} + 0.3776a_{0-} + 0.4843a_{1-} - 0.5467a_{1+} + 0.1691a^2$$

$$p_4 = 0.3776a_{0+} + 0.3152a_{0-} + 0.5157a_{1+} - 0.4533a_{1-} + 0.1381a^2$$

$$p_5 = 1.3072 + 0.0624|a| - 0.2762a^2$$

$$p_6 = 0.3152a_{0+} + 0.3776a_{0-} - 0.4533a_{1+} + 0.5157a_{1-} + 0.1381a^2$$

$$a_{0+} = AINT\left\{\frac{a+1}{|a|+1}\right\}, \quad a_{0-} = AINT\left\{\frac{1-a}{1+|a|}\right\}$$

$$a_{1+} = \frac{|a|+a}{2}, \quad a_{1-} = \left|\frac{a-|a|}{2}\right|, \quad a = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$$

식 (8)에 적절한 경계조건을 부여하여 3중 대각행렬을 구성한 후, Thomas algorithm을 이용하면 쉽게 해를 구할 수 있다.

2.2 해석방법

전반단계에서는 이류에 관한 식 (2)를 x, y 방향으로 각각 SOWMAC 법으로 해석하고, 확산식 (3)은 x 방향으로 implicit, y 방향으로 explicit으로 해석한 후, 후반단계에서는 전반 단계와 마찬가지로 이류식은 SOWMAC법, 그리고 확산식은 x 방향으로 explicit, y 방향으로 implicit으로 해석하였다. 그림 2는 모형의 계산 흐름도이다.

3. 모형의 검증

본 연구에서 개발된 모형의 검증을 위하여 이론해 및 타 scheme들과 비교, 검토하였으며, 표 1은 검증을 하기 위한 모형의 실험조건이다.

표 1. 모형검증을 위한 실험조건

조건 \ 실험	Case1	Case2	Case3	Case4
농도 (C_0)	10.0ppm, 6.5ppm (3,000m, 3,000m), (2,000m, 2,000m)	1,000,000kg/m ³ (1,000m, 3,600m)	10,000kg/m ³ /s (600m, 1,020m)	10.0ppm (1,500m, 1,500m)
위치 (x, y) 부하형식	Gaussian 분포($\sigma=264m$)	순간점원	연속점원	Gaussian 분포($\sigma=200m$)
유동장	$U=V=0.5m/s$	$U=0.2m/s, V=0.0m/s$	$U=1.0m/s, V=0.0m/s$	$\omega = \frac{2\pi}{12,000}$
확산계수 (D)	0.0m ² /s	2.0m ² /s, 10.0m ² /s	10.0m ² /s	0.0m ² /s, 10.0m ² /s
격자간격 (Δx)	200m	100m	20m	50m
시간간격 (Δt)	100초	100초	10초	25초
총 계산시간	9,600초	20,000초	1,000초	12,000초
검토내용	이론해 및 타모형 비교	이론해 비교	이론해 비교	이론해 비교

Case1은 이류항 해석에 도입된 SOWMAC법의 검토를 위해 이류만을 고려한 실험이며, 이론해 및 타 scheme들의 결과를 그림 3에 함께 나타내었다. Case2는 오염물질이 순간적으로 부하된 경우로서 이론해는 식 (9)와 같다. 실험결과는 이론해와 비교하여 그림 4에 도시하였다. 확산계수 2.0m²/s 인 경우 Peclet 수 ($P_e = U\Delta x/D$)가 10으로서 음해법에서의 한계값에 해당하며, 모형의 결과에서 처럼 흐름의 후방쪽에 수치적 진동이 미미하게 발생하였다. 그러나 확산계수 10.0m²/s 인 안정조건에서는 이론해와 거의 일치함을 알 수 있다.

$$C_{(x,y,t)} = \frac{C_0}{4\pi Dt} \cdot \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2 + (y-Vt)^2}{4Dt}\right] \quad (9)$$

Case3은 오염물질이 연속적으로 부하되는 경우로서 이론해는 식 (10)과 같다. 실험결과는 이론해와 비교하여 그림 5에 도시하였으며, 본 모형에 의한 계산결과는 이론해와 상당

히 일치함을 알 수 있다.

$$C_{(x,y,t)} = \frac{C_0}{4\pi D} \exp\left[\frac{xU}{2D}\right] \int_0^t \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{4D\tau} - \frac{U^2\tau}{4D}\right] d\tau \quad (10)$$

Case4는 공간적으로 일정하지 않은 정상순환류에 대한 모형의 타당성을 검증하여 현장 적용성을 검토하고자 하였다. 그림 6은 이류만을 고려한 실험결과로 농도분포와 위상이 이론해와 거의 일치하였다. 그림 7은 이류-확산을 동시에 고려하여 $t=1,500s, 4,500s, 7,500s, 10,500s$ 일때의 이론해와의 비교 결과로서 매우 만족스런 결과를 얻을 수 있었다.

4. 모형의 적용

본 연구에서 개발 수립된 오염물질 예측모형의 현지 적용성을 검토하고자 우리나라 동남해역에 위치한 부산 북항 및 남항 인근해역을 대상영역으로 선택하였다. 검토방법은 현지 실측자료의 부족으로 인한 절대적인 평가는 피하고, 현재 국내에서 많이 적용되고 있는 Random Walk 모형과 상대적인 비교 평가를 하였다. 오염물질 예측시 필요한 유동장은 2차원 수심적분모형인 DIVAST 모형(Falconer, 1986)으로 재현하였으며, 창조류 및 낙조류 계산결과를 그림 8과 그림 9에 도시하였다.

오염물질 이동 경향을 예측하기 위한 실험조건은 표 2와 같으며, 침강 및 난류확산은 고려하지 않았다. Random walk 모형의 경우 매시간 방출입자 갯수를 500개로 하였다. 그림 10은 본 모형에 의한 계산결과이며, 그림 11은 Random Walk 모형의 오염물질 확산실험 결과로서 창조, 낙조의 특정시간대의 확산 범위를 나타낸 것이다.

표 2. 오염물질 확산실험 개요

구 분	내 용	구 분	내 용
대상영역	유동실험과 동일 ($\Delta x = \Delta y = 50m$)	시간간격	SOWMAC ; 60초
오염부하량	6,000kg/day		Random-Walk 모형 ; 150초
확산계수	$D_{xx} = D_{yy} = 5.0m^2/s$	총계산시간	64시간(약 5.0 조석주기)

5. 결론

본 연구에서는 수치적 확산과 위상 오차를 상당히 제거할 수 있으며, 다차원 모형을 보다 간단하면서 정확하게 개발할 수 있는 SOWMAC법을 이용하여 오염물질 예측 모형을 개발하였다. 모형은 여러 이론해와 비교를 통하여 타당성을 검토하였으며, 검토결과 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 현지 적용성을 검토하고자 부산인근해역에 적용하였으며, 기존의 Random Walk 모형과도 함께 비교하였다. 비교 결과 모형의 적용성을 확인할 수 있었으며, 오염물질 예측시 장시간을 모의 해야 하는 특성상 계산시간에 많은 노력이 요구되나 본 모형은 상당히 짧은 연산시간이 소요됨으로서 실제적인 문제에서 매우 경제적인 운용을 기대할 수 있을 것으로 사료된다.

향후 본 모형을 근간으로 하여 퇴적물 이동 예측 모형과 수질 예측 모형 등을 개발하고, 관측치와의 비교, 검증을 수행할 예정이다.

6. 참고문헌

이정렬, 1998. 전방추적법에 의한 오염물질의 전송 모형, 한국해양·해양공학회지, 10(1), pp. 37-44.

이종섭, 김호진, 1995. Random Walk 모형에 의한 확산해의 민감도 분석, 대한토목학회지, 15(5), pp. 1267-1277.

Falconer, R.A., 1986. A two-dimensional mathematical model study on the nitrate levels in an inland natural basin, Proc. Inter. Water Quality Modellings in the Inland Natural Environment, BHRA, Fluid Engineering Centre, Bournemouth, Paper J1, pp. 322-344.

Falconer, R.A., 1991. Review of modelling flow and pollutant transport processes in hydraulic basins, Proc. of 1st Int. Conf. Water Quality Modellings in the Inland Environ., BHRA, Fluid Engineering, Bournemouth, Paper J1, pp. 325-344.

Komatsu, T., Ohgushi, K. and Asai, K., 1997. Refined numerical scheme for advective transport in diffusion simulation, J. Hydr. Engrg., ASCE, 123(1), pp. 41-50.

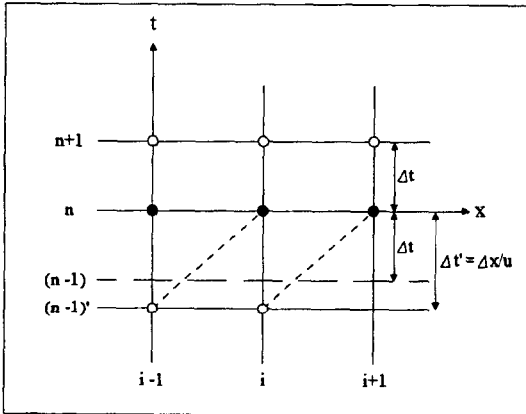


그림 1. 전 시간단계의 농도평가

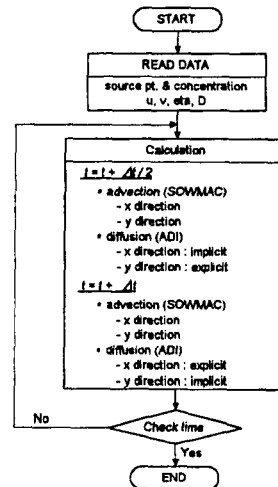


그림 2. 모형의 계산 흐름도

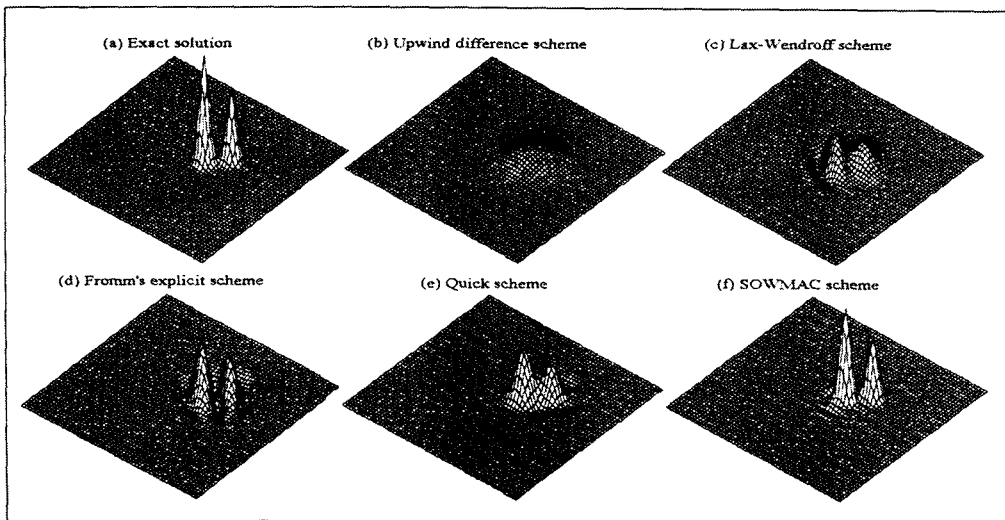


그림 3. 2차원 이류에 대한 타 scheme들과의 비교(Case1)

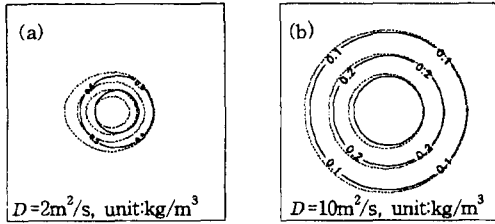


그림 4. 순간점원에 대한 이론해 비교(Case2)

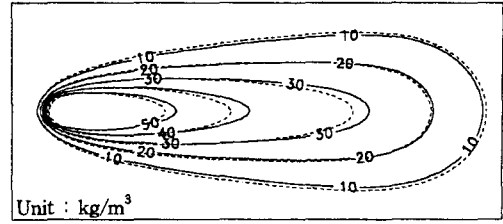


그림 5. 연속점원에 대한 이론해 비교(Case3)

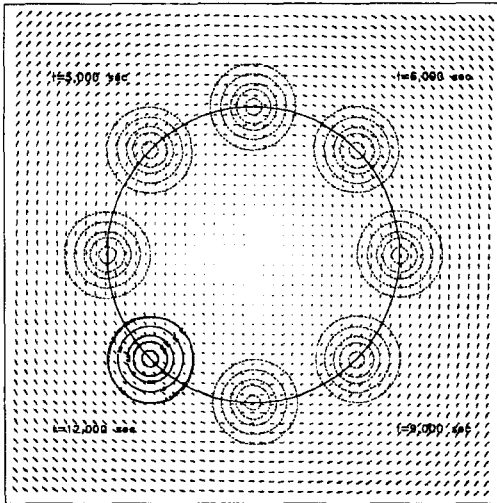


그림 6. 순환류에 대한 이론해 비교(Case4, $D=0m^2/s$)

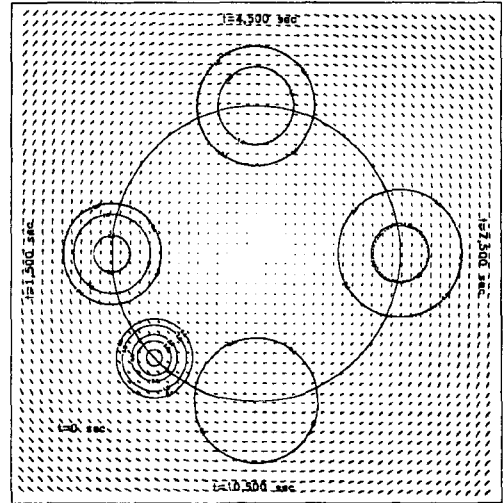


그림 7. 순환류에 대한 이론해 비교(Case4, $D=10m^2/s$)

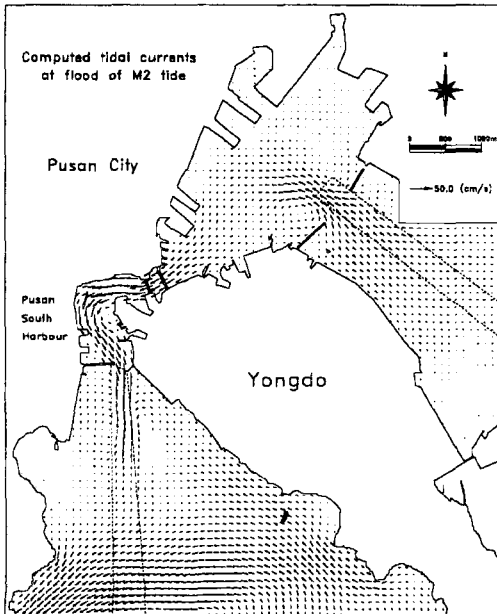


그림 8. 대상해역의 창조류 벡터도

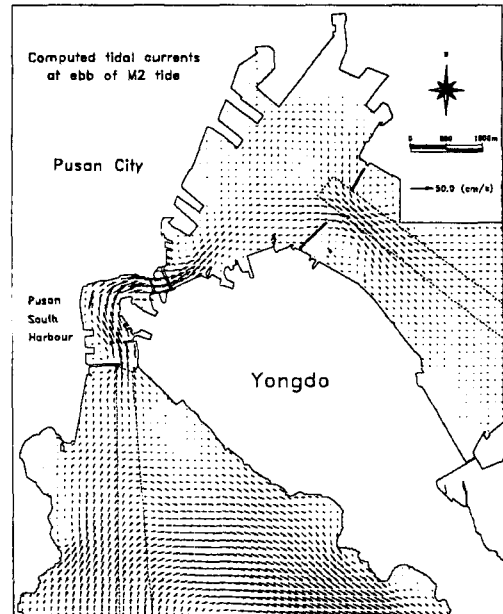


그림 9. 대상해역의 낙조류 벡터도

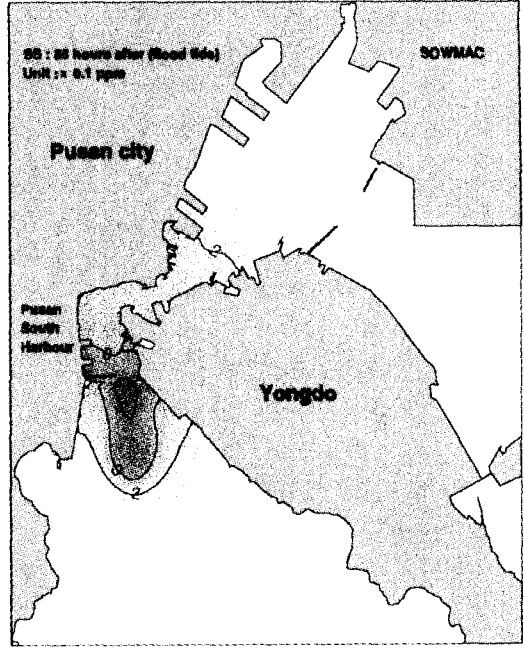
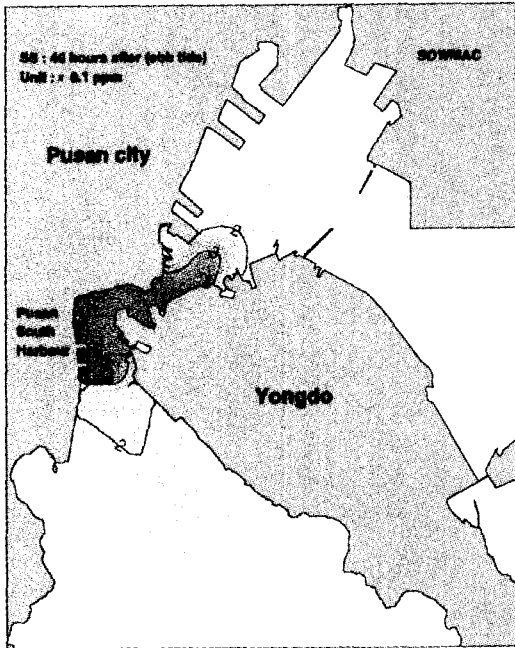


그림 10. 본 모형에 의한 오염물질 확산범위

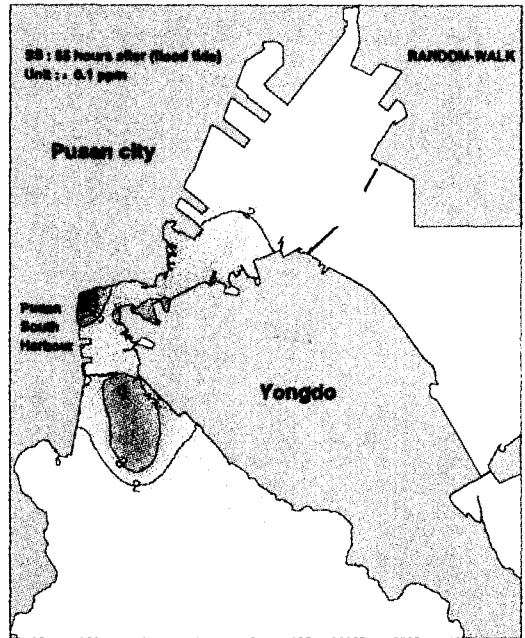
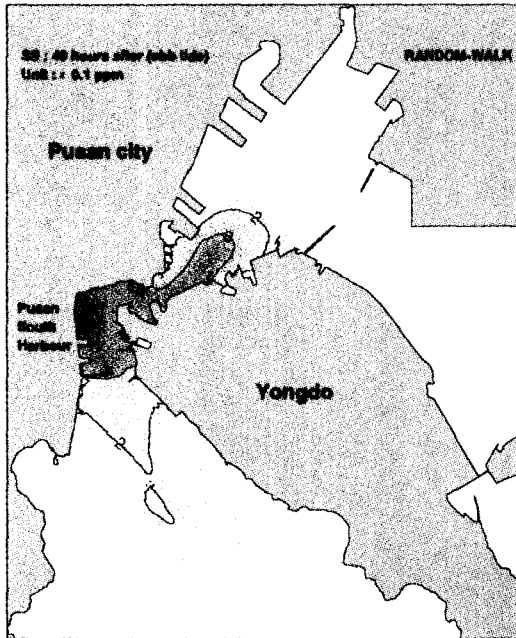


그림 11. Random-Walk 모형에 의한 오염물질 확산범위