

치형수정에 따른 기어구동계의 진동저감에 관한 연구
**A Study on the Reduction of Vibration in Gear Driving
System by Tooth Modification**

신용호(Y. H. SHIN)* , 류성기(S. K. LYU)**

경문대학 기계과*, 경상대학교 기계설계학과, 항공기부품기술연구센터 **

1. 서론

기어는 동력을 전달, 전환하고 있는 기계요소로 회전비의 선택이 자유롭고 확실한 전달비를 가지고 있어 기계회전계에 많이 이용되고 있다. 최근 산업이 고도로 발전함에 따라 기계회전계는 고속, 고부하, 정밀화, 경량화가 요구되고 있으며, 기어구동계도 신뢰도, 정숙성, 효율향상, 내구성 등이 요구되고 있다⁽¹⁾. 최근에는 진동과 소음의 발생으로 인해 기어구동계의 많은 성능을 저하시키고 있어 저진동, 저소음 기어 개발이 시급한 실정이다.

기어구동계에서 진동, 소음의 발생원인 중에서 가장 중요한 요인은 가공오차, 조립오차, 치의 변형, 마모 등으로 인한 불완전한 각운동을 전달하는 전달오차이다. 전달오차는 운동과 힘을 불완전하게 전달할 뿐만 아니라 진동, 소음을 유발하는 직접적인 원인이 되고 있다. 기어 맞물림 과정에서 전달오차로 인해 발생하는 소음은 맞물림 주파수와 맞물림 주파수의 2배, 3배 고차 조화주파수 성분이 발생하여 음압이 낮아도 귀에 거슬리는 화인 소음(whine noise)이 되고 기계계의 성능 저하를 유발시킨다.

승용차에서 발생하는 진동도 실내에 있는 승객에게 불쾌감을 조장하기 때문에 저진동 기어 개발이 시급하다. 그러나 국내 현장에서는 경험에 의존하여 문제점을 해결하고 있어 개발기간이 오래 걸리며 경제적 손실이 발생하고 있어 저진동 기어개발을 할 수 있는 프로그램의 개발이 시급한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 기어구동계의 진동을 저감할 수 있는 치형수정방법을 이용하여 설계단계에서 예상원인을 파악하여 기어구동계의 진동을 최소화하고자 한다.

2. 하중분포와 전달오차

기어는 가능한 한 정확한 형태의 각운동을 전달해야한다. 그러나 실제 기어구동계는 기어치의 탄성력 변화, 흔들림오차, 베어링의 탄성변화 등에 의해 정확한 각운동을 전달하지 못한다. 또한 중동부에서 요구한 이론적인 회전량과 실제 회전량 사이에는 약간의 오차가 발생한다. 이러한 불완전한 운동을 전달오차라 하며 기어구동시 진동과 소음을 발생시키는 요인이 된다.

전달오차를 구하기 위해서는 맞물리는 기어의 이가 접촉하는 각각의 접촉점에 대하여 치의 컴플라이언스를 구해야 한다. 기어의 컴플라이언스는 굽힘과 전달에 의한 외팔보의 변형, 지지되는 부분의 유연성에 의한 치의 강체회전, 접촉으로 인한 변형 요소에 의해 영향을 받는다⁽²⁾. 맞물림 접촉을 하는 기어쌍 중에 한 치가 받는 하중분포와 전달오차는 컴플라이언스와 제작오차를 고려하여 한 쌍, 혹은 두 쌍이 접촉할 때의 경우를 각각 구한다. 하중이 기어의 치폭을 따라 일정하게 분포되어 있다고 가정하면 하중분포와 전체 전달오차는 식(1)으로 부터 각각 구할 수 있다⁽³⁾.

$$\begin{aligned} Q_j^0 W_j^0 + E_{ij} &= E_{pj}^0 \\ Q_j^1 W_j^1 + E_{ij} &= E_{pj}^1 + E_{s0,1} \\ W_j^0 + W_j^1 &= W_n \end{aligned} \quad (1)$$

3. 기어구동계의 동적해석

Fig. 1은 축과 베어링이 강체로 지지되어 있고 전달오차에 의한 내부가진과, 구동토크에 의한 외부가진이 있는 기어구동계 모델이다. 기어물림은 전달오차와 전달하중변화에 의한 시변강성(time varying stiffness), $k(t)$ 와 백래쉬에 의한 편적선형강성변화 $f(p)$ 를 고려하면 비선형 기어구동계 모델이 성립한다. 구동력에 토크변동성분이 존재하고 출력단의 토크변동성분은 없다고 가정하면 기어와 피니언에 작용하는 토크는 식(2)와 같이 각각 평균토크성분, T_{1m} 과 T_{2m} , 변동토크성분 $T_{1a}(t)$ 로 표현된다. 또한, 기어와 피니언의 관성력은 I_1, I_2 , 질량은 m_1, m_2 , 기초원의 반지름은 r_1, r_2 로 각각 표기한다.

$$T_1(t) = T_{1m} + T_{1a}(t), \quad T_2(t) = T_{2m} \quad (2)$$

Fig. 1은 한 쌍의 평치차가 맞물려 회전할 때 비선형 1자유도 모델로서 기어구동계의 운동방정식을 기어와 피니언에 대해서 식(3), 식(4)와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{I_1 \ddot{\theta}_1}{r_1} &= \frac{T_1}{r_1} - k(t)\{r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - e(t)\} \\ &\quad - c\{r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2 - \dot{e}(t)\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{I_2 \ddot{\theta}_2}{r_2} &= -\frac{T_2}{r_2} + k(t)\{r_1\theta_1 - r_2\theta_2 - e(t)\} \\ &\quad + c\{r_1 \dot{\theta}_1 - r_2 \dot{\theta}_2 - \dot{e}(t)\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $k(t)$ 는 기어의 물림강성변화를 의미하며, c 는 기어물림과정에서 감쇠값이 작다고 가정하고 점성감쇠로 가정한 감쇠계수이다. θ_1 는 기어의 회전량, θ_2 는 피니언의 회전량을 의미하며 동적전달오차 $r_1\theta_1 - r_2\theta_2$ 와 정적 전달오차 $e(t)$ 의 차이, 즉 실제 비틀림오차, $p(t)$ 를 아래의 식(5)와 같이 정의하고, $p(t)$ 를 두번

미분한 식에 식(3)과 식(4)의 $\ddot{\theta}_1$ 과 $\ddot{\theta}_2$ 를 대입하면 식(6)과 같이 기어구동계의 1 자유도 운동방정식이 유도된다.

$$p(t) = r_1 \theta_1(t) - r_2 \theta_2(t) - e(t) \quad (5)$$

$$m_{eq} \ddot{p} + c \dot{p} + k(t) f(p) = F_m + F_a(t) - m_{eq} \ddot{e}(t) \quad (6)$$

여기서 각각의 변수는 아래와 같이 정의된다.

$$m_{eq} = \frac{1}{\left(\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2}\right)}, \quad F_a(t) = m_{eq} \frac{T_{1a}(t) r_1}{I_1}, \quad F_m = \frac{T_{1m}}{r_1} = \frac{T_{2m}}{r_2} \quad (7)$$

식(6)으로부터 정적전달오차는 내부가진의 원인이 되고 토크변동에 의한 주파수 성분은 외부가진의 원인이 됨을 알 수 있다. m_{eq} 는 기어쌍의 등가질량을, F_m 은 기어맞물림시 전달되는 평균력을, $F_a(t)$ 는 외부가진에 의한 변동력을 각각 나타낸다. 기어계의 전달오차에 의한 동적 응답, 즉 화인진동만을 고려하려면 백래쉬를 영으로 가정하고 변위 함수를 $f(p) = p$ 로 놓으면 식(8)을 얻을 수 있다.

$$\ddot{p} + \frac{c}{m_{eq}} \dot{p} + \frac{1}{m_{eq}} \left\{ k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(nN\omega t + \alpha_n) \right\} p = \frac{F_m}{m_{eq}} + \frac{F_a(t)}{m_{eq}} - \ddot{e}(t) \quad (8)$$

Table 1의 설계제원과 전달오차와 하중변화를 고려한 강성변화를 식(9)에 대입하고 5차 Runge-kutta법을 이용하여 수치적분한 결과를 각각의 회전수에 따른 주파수분석을 수행하여 도시하면 Fig. 2와 같은 waterfall diagram이 된다. Fig. 2는 전달오차에 의한 물림주파수와 물림주파수의 배수성분이 나타남을 보여 주고 있다. 이러한 물림주파수의 배수성분은 하중조건으로서의 정적전달오차와 강성변화성분에 기인한다. 이상과 같이 기어의 강성변화, 즉 전달오차는 기어 진동의 직접적인 원인이므로 진동이 작은 기어를 만들기 위해서는 전달오차를 적당히 유지하는 기어형상을 만들어야 한다. 기어형상은 시변강성항으로 특정지워지므로 식(6)에서 시변강성만 고려하고 하중변화항을 무시한 제차(homogeneous)항만을 보면 Hill식이 된다. Hill식은 다수의 Fourier계수항을 포함하므로 기어의 전달오차를 충분히 고려할 수 있으나 결국 안정성의 문제이고, 안정성은 상수항과 1차항에 따라 결정하여도 무방하므로 상수항과 1차항만을 고려하면 식(10)과 같은 Mathieu식⁽⁴⁾이 된다. 적절한 기어형상이 되기 위해서는 Mathieu식의 안정, 불안정영역을 표시하는 strutt diagram의 안정영역에 설계변수들이 존재하여야 한다.

$$\ddot{p} + \left\{ \frac{c}{m_{eq}} \right\} \dot{p} + \frac{1}{m_{eq}} \{ k_0 + k_1 \cos(N\omega t) \} p = 0 \quad (9)$$

불안정, 안정영역을 표시하는 Mathieu식의 strutt diagram은 계산 가능한 변수 범위로 한정되어 있으나, 본 연구에서 사용된 실험장치는 일반적인 strutt diagram의 범위를 크게 벗어나므로 직접적으로 수치적분에 의해 해의 안정성을 판별할 수밖에 없다. 수치적분의 적분간격을 적절히 유지하기 위해 $\tau = N\omega t$ 로

시간 축을 변환하면 식(10)이 성립한다.

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + \gamma \frac{dp}{d\tau} + (\alpha + \beta \cos \tau) p = 0 \quad (10)$$

여기서

$$\alpha = \frac{1}{m_{eq}} \left\{ \frac{1}{N\omega} \right\}^2 k_0, \quad \beta = \frac{1}{m_{eq}} \left\{ \frac{1}{N\omega} \right\}^2 k_1, \quad \gamma = \frac{c}{m_{eq}} \left\{ \frac{1}{N\omega} \right\} \quad (11)$$

Table 1의 설계제원을 이용하여 각각의 α , β 조합과 감쇠값 $\gamma=0$ 와 $\gamma=0.01$ 의 경우에 대해 수치 적분하면 Fig. 3과 같은 불안정영역이 존재함을 알 수 있다. 여기서 불안정영역이란 수치계산상의 응답이 무한대로 증가하는 경우이다. 기어의 진동을 줄이기 위해서는 설계변수, 특히 치형수정에 의해 α , β 값이 Fig. 3의 안정영역에서 기어가 운전될 수 있도록 설계하여야 한다.

4. 치형수정에 의한 응답특성

기어 구동계의 진동특성에 영향을 미치는 전달오차를 감소시키기 위하여 4가지 형태로 치형을 수정하고 전달오차를 계산하여 치형을 수정하지 않았을 때의 전달오차와 비교 검토하였다. 또한 치형을 수정한 경우와 수정하지 않은 경우에 대하여 동적응답특성을 Mathieu방정식을 이용하여 기어 구동계의 안정과 불안정 영역을 검토하였다. Fig. 4는 A형태로 인벌류트 곡선보다 치두께를 $5\mu\text{m}$ 두껍게 수정한 전달오차이며, Fig. 5는 B형태로 치두께를 $5\mu\text{m}$ 얇게 치형을 수정한 전달오차이다. Fig. 6은 C형태로 피치점 부분을 $3\mu\text{m}$ 두껍게 치형을 수정한 볼록한(convex)형태의 전달오차이며, Fig. 7은 D형태로 피치점 부분을 $3\mu\text{m}$ 얇게 치형을 수정한 오목한(concave) 형태의 전달오차이다. 4가지 치형수정 형태 중 Fig. 6에 나타낸 C형태의 경우가 두 쌍이 물리는 구간의 치두께를 감소시키고 한 쌍이 물리는 구간의 치 두께를 증가시키는 구간으로 전체적으로 전달오차를 감소시키고 있음을 알 수 있다. Table 2에 치형을 수정하지 않았을 때와 치형을 수정한 4가지 형태의 불안정 영역을 비교하여 나타내었다. 피치점 부분을 볼록하게 수정한 C형태가 불안정 영역이 가장 작게 나타냄을 알 수 있다.

5. 결론

기어구동계에서 발생하는 진동을 저감하기 위하여 전달오차를 고려한 비선형 운동방정식을 유도하고 물림강성 변화가 시간에 대하여 변하는 시변물림강성이므로 기어 구동모델로부터 Mathieu식을 유도하여 불안정영역을 예측할 수 있도록 프로그램화하였다.

전달오차와 물림강성변화에 따라 진동발생을 최소화하기 위하여 치형을 4가지 형태로 수정해 본 결과 치형을 수정한 치형의 전달오차가 치형을 수정하지 않은

치형에 비하여 작게 나타남을 알 수 있으며 치형수정 방법 중 피치점 부분을 불
 록하게 수정한 치형이 전달오차가 작게 나타남을 알 수 있었다.

치형을 수정한 치형의 불안정 영역 폭이 치형을 수정하지 않은 치형에 비해 좁
 게 나타나며 치형수정 방법 중 피치점 부분을 불록하게 수정한 치형이 불안정
 영역의 폭이 좁게 나타남을 알 수 있었다.

참고문헌

1. Choy, F. K. and Tu, Y. K., 1991, " Effect of Gear Box Vibration and Mass Imbalance on the Dynamics of Multistage Gear Transmission." Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, pp. 33-344.
2. Tavakoli, M. S. and Houser, D. R. 1986, "Optimum Profile Modification for the Minimization of Static Transmission Error of Spur Gears," ASME, Vol. 108, pp. 86-95.
3. Tarutani, I. and Yoshikawa, K., 1994, "Analysis of Gear Transmission Error," SAE 945029.
4. Chihiro Hayashi, 1964, "Nonlinear oscillations in physical systems," Princeton, New Jersey.

Table. 1 The design parameters of gear and pinion

	Radius of pitch circle	Module	Pressure angle	Number of tooth	Tooth width	Damping ratio	Input torque
Gear	50	2	20	46	18	0.0082	14.5kg.m
Pinion	18			14			

Table 2 Unstable operating speed of modified gear

rpm type	unstable region (rpm)				
	1200	1300	1400	1500	1600
Non					
A					
B					
C					
D					

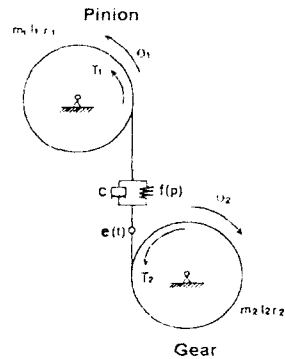


Fig. 1 Nonlinear model of meshing gear

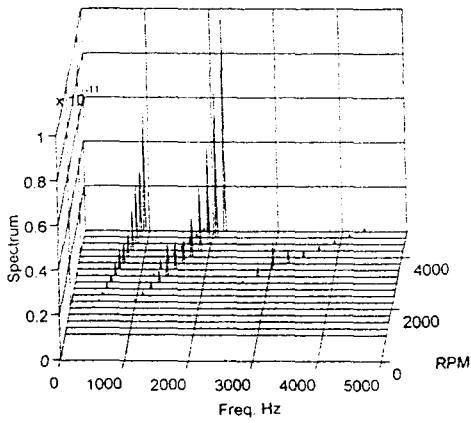


Fig. 2 Dynamic response of spur gear(Numerical)

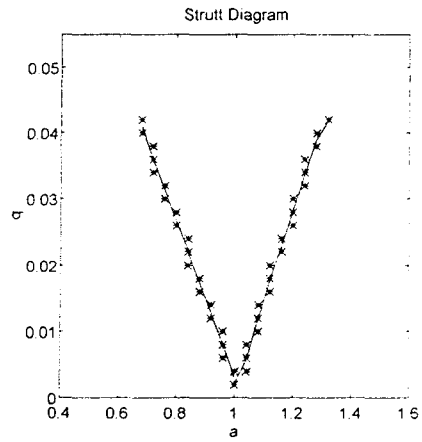


Fig. 3 Unstable regions of Mathieu equation

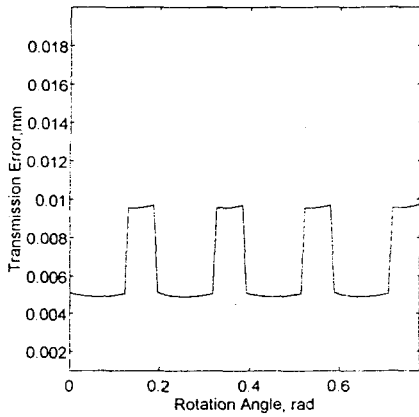


Fig. 4 Transmission error of spur gear with modifications(type A)

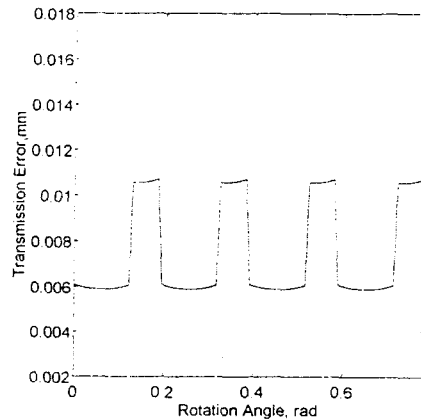


Fig. 5 Transmission error of spur gear with modifications(type B)

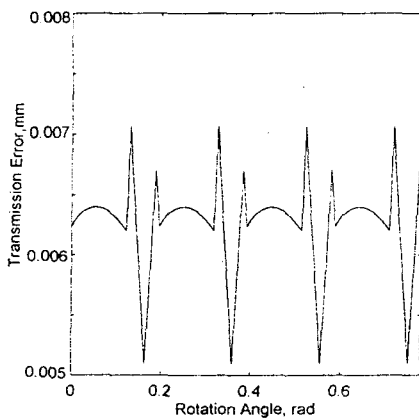


Fig. 6 Transmission error of spur gear with modifications(type C)

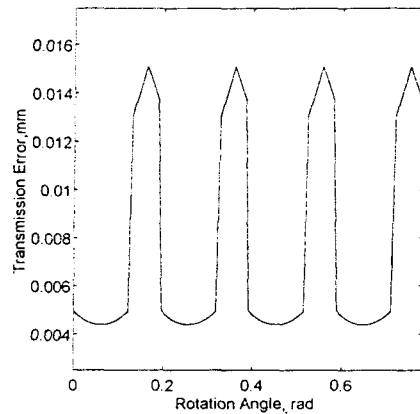


Fig. 7 Transmission error of spur gear with modifications(type D)