

# 비대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동 해석

## Free Vibration Analysis of Thin-walled Circular Arch with Unsymmetric Section

김 문 영\*                      민 병 철\*\*  
KIM, Moon Young    MIN, Byoung Cheol

### ABSTRACT

In this study, analytic solution and finite element formulation for the free vibration analysis of thin-walled circular arch, based on linearized virtual work and Vlasov's assumption, including restrained warping effect and second order terms of finite semitangential rotations, is presented. The total potential energy is derived by applying the Hellinger-Reissner principle. In this formulation, all displacement parameters of deformation are defined at the centroid axis. For the finite element formulation, the two node cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions. In special case, potential energy functional of thin-walled curved beam with monosymmetric cross section is derived. From this methodology, analytic solution for the free vibration of monosymmetric circular arch with simply supported is derived. In order to illustrate the accuracy of this study, various parameter studies for free vibration of circular arches are presented and compared with numerical solution analyzed by the FEM using straight beam element.

### 1. 서 론

박벽 단면을 갖는 부재는 공학에서 널리 적용되는 재료형태이며 주어지는 외력에 대하여 최소한의 단면을 갖는 합리적인 구조이다. 그러나 휨과 비틀의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보이며 현재까지 곡선보에 대한 연구<sup>(1,2)</sup>는 여러 분야에서 다양하게 진행되어 왔다. Kim과 Chang<sup>(3)</sup>은 비대칭 단면을 갖는 직선 박벽보 요소를 이용하여 자유진동해석을 수행한 바 있다. 이외에도 현재까지 박벽보에 대한 여러 가지 해석이론이 연구되고 제시되어 왔지만, 박벽 곡선보의 자유진동에 대한 이론이 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않은 상태라 사료된다. 따라서 본 연구에서는 비대칭 박벽 단면을 갖는 곡선보의 동적거동특성을 파악할 수 있는 적절한 해석이론을 개발하기 위하여, 3차원 연속체로부터 가상일의 원리를 적용하고 박벽단면의 구속된 뒸를 고려한 변위장을 도입하여 곡선보의 총 포텐셜에너지를 유도하였다. 3차의 Hermitian 다항식을 형상함수로 가정하여 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 유도하였으며 결국, 비대칭 박벽 단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석을 수행할 수 있는 유한요소 프로그램을 개발하였다. 또한 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보에 대해서는 엄밀해를 유도하였고, 제시한 이론 및 방법의 타당성을 증명하기 위하여 직선보 요소를 이용한 유한요소 해석결과를 비교하였다.

### 2. 선형화된 가상일의 원리

본 논문에서는 선형화된 가상일의 원리를 적용하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

1. 박벽 곡선보는 선형 탄성 거동을 한다.

\* 성균관대학교 토목공학과 부교수  
\*\* 성균관대학교 토목공학과 박사과정

2. 곡선보의 단면은 뒤틀변형을 제외하고 강체 거동한다.
3. 부재 축을 따라서 단면의 형상은 일정하게 유지된다.

곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계는 Figure 1과 같이 정의된다.

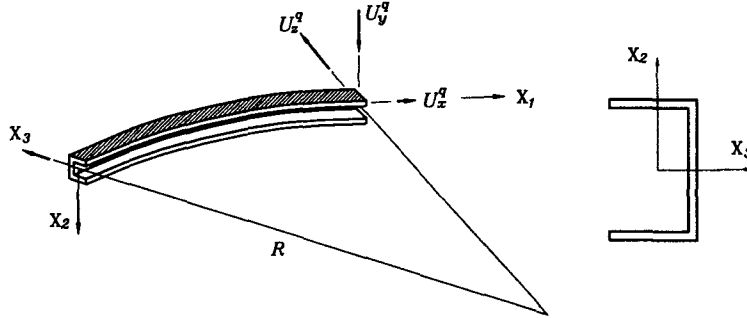


Figure 1. Monosymmetric thin-walled curved beams

비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동 해석을 수행하기 위하여 3차원 연속체에 대한 선형화된 가상일의 원리는 나타내면 다음과 같다.

$$\int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV - \omega^2 \int_V \rho U_i \delta U_i dV = 0 \quad (1)$$

여기서 첫 번째 항은 탄성변형에너지를 나타내고 두 번째 항은 운동에너지를 나타내며 변형도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (U_{ij} + U_{ji}) \quad (2)$$

### 2.1 비대칭 단면을 갖는 원형아치의 변위장

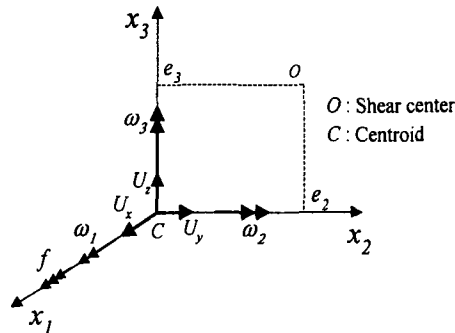


Figure 2. Notation for displacement parameters of curved beam

그림 2는 부재좌표계  $(x_1, x_2, x_3)$ 에 대하여 비대칭단면을 갖는 박벽 공간빔대요소의 변위장을 7개의 변위 파라미터로 나타낸 것으로  $x_1$ 은 도심축,  $x_2$ 와  $x_3$ 는 주축을 나타낸다.  $e_2$ 와  $e_3$ 는 각각  $x_2$ 와  $x_3$ 축에 대한 도심축으로부터 전단중심까지의 거리이고  $U_x, U_y, U_z$ 와  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각각  $x_1, x_2, x_3$ 축방향의 강체이동변위(rigid body translation) 및 강체회전변위(rigid body rotation)를,  $f$ 는 단면의 뒤틀변형에 의한  $x_1$ 축방향으로의 변화율로 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_1 = \theta, \quad \omega_2 = -U_z' + U_x/R, \quad \omega_3 = U_y', \quad f = -\theta' - U_y'/R \quad (3)$$

## 2.2 박벽 곡선보의 변형도-변위관계

부재의 단면이 강체거동하고 축방향에 대하여 뒤틀림만 발생한다고 가정하면, 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박벽 공간뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_x - x_2 U_y' - x_3 (U_z' - \frac{U_x}{R}) - (\theta' + \frac{U_y'}{R}) \Phi(x_2, x_3) \\ U_2 &= U_y - x_3 \theta, \quad U_3 = U_z + x_2 \theta, \quad \Phi = e_2 x_3 - e_3 x_2 + \Phi_s \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\Phi$ ,  $\Phi_s$ 는 각각 도심과 전단중심 축에 대한 뒤틀림 함수를 나타낸다. 본 연구에서는 Vlasov의 가정에 따라 면내변형도와 면내응력을 영으로 가정한다.

## 2.3 비대칭 박벽단면을 갖는 원형아치의 운동방정식

비대칭 박벽 곡선보의 자유진동 해석방법을 제시하기 위해서, 3차원 곡선보 요소의 총포텐셜에너지  $\Pi$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E - T \quad (5)$$

먼저 변위장을 탄성변형에너지에 대입하고 단면에 대하여 적분을 행하면 아래의 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^L [EA(1+Z)(U_x' + \frac{U_z}{R})^2 + E(I_{33} - \frac{I_{233}}{R})(U_y'' - \frac{\theta}{R})^2 + EZAR^2(U_z'' - \frac{U_x'}{R})^2 \\ &\quad + E(I_{\phi\phi} - \frac{I_{\phi\phi 2}}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R})^2 - 2E \frac{I_{223}}{R^2}(U_x' + \frac{U_z}{R})(U_y'' - \frac{\theta}{R}) \\ &\quad + 2EZAR(U_x' + \frac{U_z}{R})(U_z'' - \frac{U_x'}{R}) - 2E(-\frac{I_{\phi 2}}{R} + \frac{I_{\phi 22}}{R^2})(U_x' + \frac{U_z}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R}) \\ &\quad + 2E(-\frac{I_{223}}{R})(U_y'' - \frac{\theta}{R})(U_z'' - \frac{U_x'}{R}) + 2E(I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R})(U_y'' - \frac{\theta}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R}) \\ &\quad + 2E(I_{\phi 2} - \frac{I_{\phi 22}}{R})(U_z'' - \frac{U_x'}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R}) + GJ(\theta' + \frac{U_y'}{R})^2] dx_1 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \int_A \frac{R}{R+x_3} dA &= A(1+Z) \cong A + \frac{I_2}{R^2}, \quad \int_A \frac{Rx_3}{R+x_3} dA = -ZAR, \quad \int_A \frac{Rx_3^2}{R+x_3} dA = AZR^2 \\ J &= \int_A [ \left\{ x_3 + \Phi_{,2} \left( 1 + \frac{x_3}{R} \right) \right\}^2 + \left\{ x_2 + \frac{\Phi}{R} - \Phi_{,3} \left( 1 + \frac{x_3}{R} \right) \right\}^2 ] \frac{R}{R+x_3} dA \end{aligned} \quad (7)$$

한편, 변위장을 운동에너지에 대입하고 단면에 대하여 적분하면 다음과 같이 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 운동에너지  $T$ 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L [A(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + (I_o + \frac{I_{222} + I_{233}}{R})\theta^2 + (I_3 + \frac{I_{233}}{R})U_y'^2 + (I_2 + \frac{I_{222}}{R})(U_z' - \frac{U_x'}{R})^2 \\
& + (I_\phi + \frac{I_{\phi\phi 2}}{R})(\theta' + \frac{U_y'}{R})^2 - 2\frac{I_{\phi 2}}{R}U_x(\theta' + \frac{U_y'}{R}) - 2\frac{I_2}{R}U_y\theta + 2\frac{I_{223}}{R}U_y'(U_z' - \frac{U_x'}{R}) \\
& - 2\frac{I_2}{R}U_x(U_z' - \frac{U_x'}{R}) - 2(I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R})U_y'(\theta' + \frac{U_y'}{R}) + 2(I_{\phi 2} + \frac{I_{\phi 22}}{R})(U_z' - \frac{U_x'}{R})(\theta' + \frac{U_y'}{R})] dx_1 \quad (8)
\end{aligned}$$

### 3. 일축대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 자유진동에 대한 엄밀해

일축 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면의 자유진동에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 식(6)과 (8)로부터 면외거동 및 비틀림과 관련된 항만을 재정리하면 포텐셜에너지는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Pi_E - T = & \frac{1}{2} \int_o^L [E\hat{I}_3(U_y'' - \frac{\theta}{R})^2 + GJ(\theta' + \frac{U_y'}{R}) + E\hat{I}_\phi(\theta'' + \frac{U_y''}{R})^2 + 2E\hat{I}_{\phi 3}(U_y'' - \frac{\theta}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R}) \\
& - \rho\omega^2 \{AU_y^2 + \hat{I}_o\theta^2 + \hat{I}_3U_y'^2 - 2\frac{I_2}{R}U_y\theta + \hat{I}_\phi(\theta' + \frac{U_y'}{R})^2 + \hat{I}_{\phi 3}U_y'(\theta' + \frac{U_y'}{R})\}] dx_1 \quad (9)
\end{aligned}$$

여기서

$$\hat{I}_3 = I_3 - \frac{I_{233}}{R}, \quad \hat{I}_\phi = I_\phi - \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}, \quad \hat{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R} \quad (10a)$$

$$\tilde{I}_3 = I_3 + \frac{I_{233}}{R}, \quad \tilde{I}_\phi = I_\phi + \frac{I_{\phi\phi 2}}{R}, \quad \tilde{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} + \frac{I_{\phi 23}}{R}, \quad \tilde{I}_o = I_o + \frac{I_{222} + I_{233}}{R} \quad (10b)$$

양단이 단순지지된 박벽 곡선보의 면의 자유진동해석을 수행하기 위하여 면외거동에 대한 변위와 비틀림 변위에 대한 변위함수를 다음과 같이 정의한다.

$$U_y = B \sin(\lambda x_1), \quad \theta = D \sin(\lambda x_1), \quad \lambda = n\pi/L \quad (11)$$

여기서  $B$ 와  $D$ 는 미지계수이고  $\lambda$ 는 곡선보의 진동모드를 나타낸다. 정의된 처짐함수를 식(9)에 대입하여 변분을 취하고 유도된 운동방정식을 미지 계수에 대한 특성방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서

$$K_{11} = E\hat{I}_3\lambda^4 + GJ\frac{\lambda^2}{R^2} + E\hat{I}_\phi\frac{\lambda^4}{R^2} + 2E\hat{I}_{\phi 3}\frac{\lambda^4}{R} - \rho\omega^2(A + \tilde{I}_3\lambda^2 + \tilde{I}_\phi\frac{\lambda^2}{R^2} + 2\tilde{I}_{\phi 3}\frac{\lambda^2}{R}) \quad (13a)$$

$$K_{12} = K_{21} = E\hat{I}_3\frac{\lambda^2}{R} + GJ\frac{\lambda^2}{R} + E\hat{I}_\phi\frac{\lambda^4}{R} + E\hat{I}_{\phi 3}(\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{R^2}) - \rho\omega^2(\tilde{I}_\phi\frac{\lambda^2}{R} - \frac{I_2}{R} + \tilde{I}_{\phi 3}\lambda^2) \quad (13b)$$

$$K_{22} = E\hat{I}_3\frac{1}{R^2} + GJ\lambda^2 + E\hat{I}_\phi\lambda^4 + 2E\hat{I}_{\phi 3}\frac{\lambda^2}{R} - \rho\omega^2(\tilde{I}_o + \tilde{I}_\phi\lambda^2) \quad (13c)$$

식(12)로부터 행렬식을 취하면 곡선보의 자유진동에 고유진동수  $\omega^2$ 를 얻을 수 있다.

### 4. 유한요소 정식화

본 연구에서는 곡선 아치의 자유진동해석을 수행하기 위하여 곡선보 요소를 이용한 유한요소를 개발하고 직선보 요소에 의한 해석결과와 비교하여 제시한다. 두 요소의 변위장은 모두 도심축에 대하여 정의되었으며

유한요소의 형상함수는 3차의 Hermitian 다항식을 이용하였다.

#### 4.1 곡선보 요소

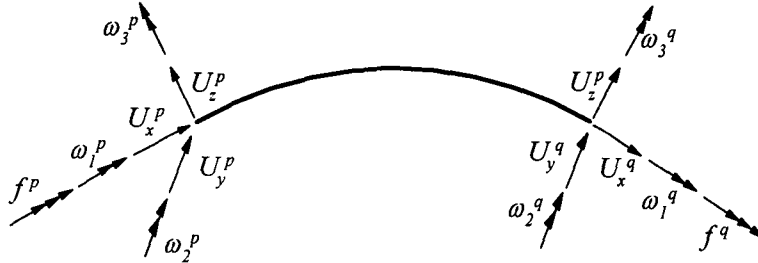


Figure 3. Curved member displacement vector

그림 3은 구속된 비틀림에 의한 휨을 고려한 박벽 곡선보요소의 재단면위벡터를 표시한 것이다. 일반화된 좌표들( $U_x, U_y, U_z, \theta$ )을 재단면위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상 함수들을 선택하여야 한다. 본 논문에서 요소당 2절점을 갖는 3차의 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 3을 참조하여 위의 사항들을 고려하면 박벽 곡선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$U_x = h_1 \cdot U^p + h_2 \cdot L \left( g^p - \frac{W^p}{R} \right) + h_3 \cdot U^q + h_4 \cdot L \left( g^q - \frac{W^q}{R} \right) \quad (14a)$$

$$U_y = h_1 \cdot V^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_3^p + h_3 \cdot V^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_3^q \quad (14b)$$

$$U_z = h_1 \cdot W^p - h_2 \cdot L \left( \omega_2^p - \frac{U^p}{R} \right) + h_3 \cdot W^q - h_4 \cdot L \left( \omega_2^q - \frac{U^q}{R} \right) \quad (14c)$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h_2 \cdot L \left( f^p + \frac{\omega_3^p}{R} \right) + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot L \left( f^q + \frac{\omega_3^q}{R} \right) \quad (14d)$$

여기서  $h_i$ 는 3차의 Hermitian 다항식이므로써 다음과 같다.

$$h_1 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad h_2 = (\xi - 2\xi + x)/L, \quad h_3 = -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad h_4 = (\xi - \xi)/L \text{ and } \xi = x/L \quad (15)$$

식(14)에서 곡률반경 R에 의해 나누어지는 항들은 외력이 작용하지 않고, 곡률을 고려한 곡선보의 선형 평형방정식의 해로부터 유도한 형상함수이다. 이때, 절점 회전변위는 곡률효과를 고려하여 다음과 같이 정의한다.

$$\omega_1^p = \theta(0), \quad \omega_2^p = -U_z'(0) + \frac{U_x(0)}{R}, \quad \omega_3^p = U_y'(0) \quad (16)$$

$$f^p = -\theta'(0) - \frac{U_y'(0)}{R}, \quad g^p = U_x'(0) + \frac{U_z(0)}{R}$$

현재까지의 이론을 고려하여 식(14)을 식(6)과 식(8)에 대입하고 적분을 행하면 다음과 같이 박벽 곡선보에 대한 행렬운동방정식을 얻는다.

$$K_e U_e - \omega^2 M U_e = 0 \quad (17)$$

$$\text{여기서 } U_e = \langle U^p, V^p, W^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, U^q, V^q, W^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \quad (18)$$

위 식에서  $K_E$ 와  $M$ 는 각각 부재좌표계에 대한 탄성강도행렬 및 질량행렬을 나타낸다.  $U_e$ 는 구속된 비틀림을 고려한 부재좌표계에서의 절점변위벡터를 나타낸다. 결과적으로 직접강도법에 의하여 전체 구조물에 대한 운동방정식은 다음과 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$M^o \ddot{U} + K_E^o U = 0 \quad (19)$$

여기서 뒀첨자 'o'는 전체강도행렬을 나타내고 이 식으로부터 곡선 아치의 고유진동수를 계산할 수 있다.

#### 4.2 직선보 요소

곡선보에서의 경우와 마찬가지로 선형화된 가상일의 원리를 적용하면, 구속된 뒀을 고려한 박벽 직선보의 탄성 변형에너지  $\Pi_E$ 와 외력에 의한 포텐셜에너지  $T$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^L [EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 \\ + 2EI_{\phi 3} U_y'' \theta'' + 2EI_{\phi 2} U_z'' \theta'' + 2EI_{23} U_y'' U_z''] dx_1 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^L [A(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + I_o \theta^2 + I_2 U_z'^2 + I_3 U_y'^2 \\ + I_\phi \theta'^2 + 2I_{\phi 2} U_z' \theta' + 2I_{\phi 3} U_y' \theta'] dx_1 \end{aligned} \quad (21)$$

위 식에서  $\Pi_E$ 와  $T$ 는 도심에 대하여 정의된 변위장을 적용하였고 곡률을 무시한 곡선보의 포텐셜에너지와 같으며 식(17)의 관계로부터 직선보에 의한 원형 아치의 고유진동수를 산정할 수 있다.

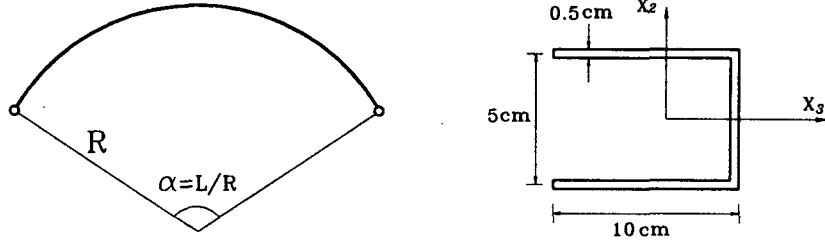
### 5. 해석예제

본 연구에서는 박벽 단면을 갖는 원형 곡선보의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 비대칭 단면에 대한 유한요소 정식화 과정을 제시하고 일축 대칭단면에 대하여는 엄밀해를 제시하였다. 본 논문의 정식화 과정에서 가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체로부터 박벽단면의 비대칭성과 구속된 비틀림(restrained warping)효과를 고려하는 운동방정식을 유도하였다. 또한, 박벽 원형아치를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 운동방정식에 대입하여 5점 가우스적분을 행함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 얻는다. 고유치 문제는 IMSL의 subroutine을 이용하였다. 본 연구에서 제시한 이론 및 개발된 프로그램을 검증하기 위하여, 곡률변화에 따른 박벽 곡선보의 해석결과를 제시하고 문헌의 결과 및 직선보 요소를 이용한 해석과 비교, 검토를 행한다.

#### ◆ 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동해석

본 예제에서는 단순지지된 원형아치의 자유진동에 대한 해석을 수행하였으며 일축대칭 단면의 재료상수와 기하학적 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A = 12.5 \text{ cm}^2, \quad E = 73,000 \text{ kg/cm}^2, \quad G = 28,000 \text{ kg/cm}^2, \quad J = 1.04167 \text{ cm}^4, \quad \hat{e}_3 = 8.61538 \text{ cm}, \\ I_2 = 133.385 \text{ cm}^2, \quad I_3 = 67.9167 \text{ cm}^4, \quad I_\phi = 5682.12 \text{ cm}^6, \quad I_{\phi 3} = -585.128 \text{ cm}^5, \quad I_{22} = -100.0 \text{ cm}^5, \\ I_{\phi 2} = 7465.73 \text{ cm}^7, \quad I_{\phi 23} = -282.051 \text{ cm}^6, \quad I_{233} = -41.6667 \text{ cm}^5, \quad \beta_1 = 16.1042 \text{ cm}^6, \quad \beta_2 = -1.06209 \text{ cm}^6 \end{aligned}$$



(a) Simply supported circular arch (c) Monosymmetric cross section  
 Figure 4. Geometry of circular arch

곡선보를 이용한 유한요소해석에서는 구조물 전체에 대하여 30개의 요소로 모델링하였고, 직선보 요소를 이용하여 해석하는 경우에는 기하학적 대칭성을 고려하여 아치의 반만을 모델링하였으며 아치의 곡선형태가 충분히 반영될 수 있도록 50개의 요소를 사용하였다. 그러나 직선보는 진동형태에 따라 과다강성 또는 과소강성을 갖기 때문에 단면의 비대칭성이 크거나 아치의 길이에 비해 단면의 크기가 상대적으로 큰 경우에 직선보를 이용한 해석결과는 엄밀해보다 작거나 큰 값을 얻게된다. 표 1과 2는 원호의 길이가 1200 cm 및 250 cm를 갖는 박벽 원형 아치의 자유진동에 대한 해석결과를 제시한 것이다. 표 1에서와 같이 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 긴 경우에는 본 연구에서 제시한 엄밀해와 곡선보를 이용한 해석결과가 직선보를 이용한 해석결과와 서로 잘 일치하였으나, 표 4에서와 같이 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 짧은 경우에는 단면의 비대칭효과가 상대적으로 커지기 때문에 본 연구의 엄밀해 및 곡선보에 의한 유한요소 해석결과가 직선보를 이용한 해석결과와 비교할 때 상대적으로 약간 큰 차이를 보여주고 있다.

Table 1. Natural frequency of monosymmetric thin-walled circular arch,  $L = 1200.0$  cm

angle (degree)	mode	Analytic solution	FEM (beam element)	
			curved	straight
90	n=1	0.0000339233 5.04119	0.0000339256 5.04204	0.0000343869 5.03139
	n=2	0.0042211 4.18083	0.00422207 4.18344	0.00423705 4.16936
	n=3	0.0694180 3.27466	0.0694652 3.27870	0.0696487 3.26202
180	n=1	0.0 20.7490	0.000000001973 20.7526	-0.000000000515 20.6753
	n=2	0.000613810 18.4340	0.000614409 18.4461	0.000622853 18.3528
	n=3	0.0125648 15.1514	0.0125854 15.1723	0.0126632 15.0613
360	n=1	0.0000324325 84.8226	0.0000324342 84.8371	0.0000307968 84.5388
	n=2	0.0 79.5830	0.000000510852 79.6365	0.000000161747 78.9973
	n=3	0.00104492 71.4373	0.00105953 71.5425	0.00108232 70.8044

Table 2. Natural frequency of monosymmetric thin-walled circular arch,  $L = 250.0 \text{ cm}$

angle (degree)	mode	Analytic solution	FEM (beam element)	
			curved	straight
90	n=1	0.0318090	0.03182211	0.0324411
		81.7402	82.0258	80.4651
	n=2	13.4646	13.6007	13.8222
		30.5850	30.7473	29.5564
	n=3	33.3731	33.2119	32.3064
		240.323	249.839	245.689
180	n=1	0.0	0.00000106663	0.00000454672
		406.684	408.223	397.025
	n=2	1.29962	1.30524	1.35617
		205.099	207.386	194.984
	n=3	67.8975	69.8263	71.9117
		99.9679	100.535	92.7175
360	n=1	0.0232171	0.0232117	0.0221255
		1848.46	1855.75	1771.16
	n=2	0.0	0.000174405	0.000169055
		1314.99	1334.28	1233.14
	n=3	3.74659	3.78709	4.13519
		725.235	743.539	783.665

## 6. 결론

비대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동해석을 수행하기 위하여, 3차원 연속체로부터 선형화된 가상 일의 원리를 적용하여 총 포텐셜에너지를 유도하였다. 박벽 단면의 구속된 뒹을 고려하는 변위장을 도입하여, 비대칭 단면에 대해서는 곡선보 요소를 이용한 유한요소법을 제시하고 일축대칭 단면에 대해서는 처짐함수를 가정하여 엄밀해를 유도하였다. 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보 요소에 의한 유한요소 해석결과를 직선보 요소를 이용한 수치해석 결과와 비교하였고, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

1. 단순지지되고 일축 대칭단면을 갖는 박벽 원형아치의 자유진동해석을 수행한 결과, 본 연구에서 제시한 엄밀해와 곡선보에 의한 유한요소 해석결과가 직선보에 의한 해석결과와 서로 잘 일치하였다.
2. 직선보는 곡률의 효과가 고려되지 않았기 때문에 과다강성 또는 과소강성을 가지고 있고, 이에 의한 유한요소해석 결과는 엄밀해보다도 작은 값을 갖는 결과가 얻어지게 된다.
3. 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 긴 경우, 단면의 비대칭 효과가 작게 나타나기 때문에 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보에 의한 유한요소 해석결과가 직선보를 이용한 유한요소 해석결과가 서로 잘 일치하였다. 그러나 단면의 크기에 비해 원호의 길이가 짧은 경우, 단면의 비대칭 효과가 크게 나타나기 때문에 직선보의 해석결과와는 약간의 차이를 보여주었다.

## 7. 참고문헌

1. Kou, C.h. and Steven, E.B. and Huang, J.Y., "Free Vibration Analysis of Curved Thin-Walled Girder Bridges" J. Struct. Engrg., ASCE, Vol 118(6), No10, pp2890-2910., 1992.10.
2. 윤기용, "水平曲線 I형橋의 動的舉動 特性", 工學博士學位論文, 고려대학교, 1997.
3. Kim, M.Y. and Chang, S.P. and Kim, S.B., "Spatial Stability and Free Vibration of Shear Flexible Thin-walled Elastic Beams I : Analytic Approach." Int.J.Numer.Methods Engineering, 37, pp4097~4115,1994.12.