

일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 면외좌굴해석 Spatial Stability of Monosymmetric Thin-walled Circular Arch

김 문 영* 민 병 철**
KIM, Moon-Young MIN, Byoung-Cheol

ABSTRACT

A consistent finite element formulation and analytic solutions are presented for spatial stability of thin-walled circular arch. The total potential energy is derived by applying the principle of linearized virtual work and including second order terms of finite semitangential rotations. As a result, the energy functional corresponding to the semitangential rotation is obtained, in which the elastic strain energy terms are considered restrained warping effects. We have obtained analytic solution for the lateral buckling of monosymmetric thin-walled curved beam subjected to pure bending or uniform compression and its boundary conditions are simply supported. For finite element analysis, the two node cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions. In order to illustrate the accuracy of this study, parameter studies for lateral buckling problems of circular arch are presented and compared with available solutions and numerical results analyzed by the FEM using straight beam element.

1. 서 론

아치교나 곡선교는 교량건설에 있어서 널리 적용되는 구조이며 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 경제적인 교량구조가 될 수 있다. 일반적으로 강 곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 비틀림 모멘트를 항상 받기 때문에 휨과 비틀의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 좌굴거동을 정확히 파악할 수 있어야 한다. Vlasov⁽¹⁾는 뒹 효과를 고려한 직선 및 곡선 박벽보에 대한 체계적인 이론을 제시하였고 Papangelis와 Trahair⁽²⁾는 아치의 횡좌굴하중에 대한 이론식을 유도하고 실험을 통하여 검증하였다. 또한 Kang과 Yoo⁽³⁾는 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성에 대한 엄밀해를 제시하였고 Kim과 Chang^(4,5)은 단면회전각의 2차항을 고려하여 비대칭 단면을 갖는 박벽 직선보의 안정성해석을 수행하였다. 이외에도 현재까지 박벽보에 대한 여러 가지 해석이론이 제시되어 왔지만, 박벽 곡선보의 횡좌굴거동에 대한 이론이 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않은 상태라 사료된다. 따라서 본 연구에서는 일축대칭 박벽 단면을 갖는 곡선보의 횡-비틀좌굴거동을 파악할 수 있는 적절한 해석이론을 개발하기 위하여 단면회전의 2차항 및 구속된 비틀 뒹을 고려한 박벽 곡선보의 총 포텐셜에너지를 유도하였다. 유한요소 이론 및 해석방법을 제시하기 위하여, 곡선보의 변위장을 도심에 대하여 정의한 후 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 운동방정식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 기하학적인 강도행렬을 산정하였고 이로부터 고유치 해석을 수행함으로써 좌굴하중을 산정하였다. 또한 처짐함수를 가정하여 단순지지 경계조건을 갖는 일축대칭 단면의 원형아치에 대한 엄밀해를 유도하였으며, 얻어진 결과를 다른 연구자의 엄밀해 및 직선보 요소를 이용한 유한요소 해석결과와 비교 검토를 함으로써 본 연구의 타당성을 입증하였다.

2. 선형화된 가상일의 원리

본 논문에서는 선형화된 가상일의 원리를 적용하기 위하여 3가지 가정을 도입한다. 첫째, 박벽 곡선보는 선형 탄성 거동을 한다. 둘째, 곡선보의 단면은 뒹변형을 제외하고 강체 거동하며 부재 축을 따라서 단면의 형

* 성균관대학교 토목공학과 부교수
** 성균관대학교 토목공학과 박사과정

상은 일정하게 유지된다. 셋째, 곡선보의 전좌굴(prebuckling) 또는 국부좌굴(local buckling) 현상은 없다. 그리고, 본 연구에서 채택한 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계는 그림 1과 같이 정의된다.

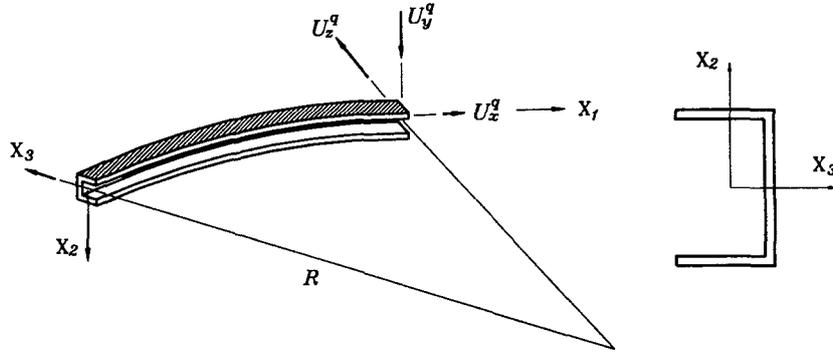


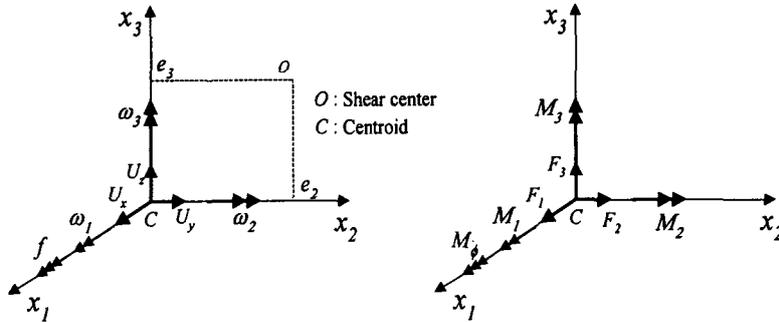
Figure 1. Monosymmetric thin-walled curved beams

일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성해석을 수행하기 위하여 3차원 연속체에 대한 선형화된 가상일의 원리는 나타내면 다음과 같다.

$$\int_V (\tau_{ij} \delta e_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta n_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta e_{ij}^*) dV + \int_S {}^oT_i \delta U_i^* dS = \int_S T_i \delta U_i dS \quad (1)$$

여기서 첫 번째 항은 탄성변형에너지를 나타내고 두 번째는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지를 나타내며 세 번째 항은 단면 회전에 대한 2차항을 고려했을 때 나타나는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지이다. 네 번째 항과 마지막 항은 각각 표면력과 요소의 절점력에 대응하는 포텐셜에너지를 나타낸다.

2.1 비대칭 단면을 갖는 원형아치의 변위장



(a) Displacement parameters (b) Stress resultants

Figure 2. Notation for displacement parameters and stress resultants

그림 2는 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3) 에 대하여 박벽 곡선보의 변위장을 7개의 변위 파라미터로 나타낸 것이며 x_1 은 도심축, x_2 와 x_3 는 주축을 나타낸다. e_2 와 e_3 는 각각 x_2 와 x_3 축에 대한 도심축으로부터 전단중심까지의 거리이고 U_x, U_y, U_z 와 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 는 각각 x_1, x_2, x_3 축 방향의 강체이동변위 및 강체회전변위를, f 는 단면의 뒹변형에 의한 x_1 축방향으로의 변화율로 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_1 = \theta, \quad \omega_2 = -U_z' + U_x/R, \quad \omega_3 = U_y', \quad f = -\theta' - U_y'/R \quad (2)$$

2.2 박벽 곡선보의 변형도-변위관계

부재의 단면이 강체거동하고 축방향에 대하여 뒤틀림변형만 발생한다고 가정하면, 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박벽 공간뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_x - x_2 U_y' - x_3 (U_z' - \frac{U_x'}{R}) - (\theta' + \frac{U_y'}{R}) \Phi(x_2, x_3) \\ U_2 &= U_y - x_3 \theta, \quad U_3 = U_z + x_2 \theta, \quad \Phi = e_3 x_2 + \Phi_s \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)은 변위에 대한 1차항만을 나타낸 것이며, 곡선보의 안정성 해석에서 변위에 대한 2차항은 매우 중요하므로 본 연구에서는 2차항을 고려하였다. Φ , Φ_s 는 각각 도심과 전단중심 축에 대한 뒤틀림 함수를 나타낸다. 박벽단면의 면내응력은 평면응력, 면내변형은 강체로 가정하는 경우에 그림 2(b)에서 나타낸 바와 같이 도심 축에 대한 단면력을 아래와 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA, \quad F_3 = \int_A \tau_{13} dA, \quad M_1 = \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dA \\ M_2 &= \int_A \tau_{11} x_3 dA, \quad M_3 = - \int_A \tau_{11} x_2 dA, \quad M_\Phi = \int_A \tau_{11} \Phi_s dA, \quad M_p = \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 F_1 은 축방향력을 나타내고 F_2 와 F_3 는 전단중심에 작용하는 전단력을 나타낸다. M_1 는 도심축에 대한 비틀림모멘트이고 M_2 와 M_3 는 각각 x_2 와 x_3 에 대한 휨모멘트이다. M_Φ Wagner 효과를 표시하는 단면력이고 M_p 는 구속된 비틀에 의한 단면력을 나타낸다.

2.3 일축 박벽단면을 갖는 원형아치의 총포텐셜에너지

박벽 곡선보의 안정성 및 자유진동 해석법을 제시하기 위해서, 3차원 곡선보 요소의 총포텐셜에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G \quad (5)$$

먼저 변위장을 탄성 변형에너지에 대입하고 단면에 대하여 적분을 행하면 아래의 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^L [EA(1+Z)(U_x' + \frac{U_z}{R})^2 + E(I_3 - \frac{I_{233}}{R})(U_y'' - \frac{\theta}{R})^2 + EZAR^2(U_z'' - \frac{U_x'}{R})^2 \\ &+ E(I_\Phi - \frac{I_{\Phi 2}}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R})^2 + 2EZAR(U_x' + \frac{U_z}{R})(U_z'' - \frac{U_x'}{R}) \\ &+ 2E(I_{\Phi 3} - \frac{I_{\Phi 23}}{R} + \frac{I_{\Phi 223}}{R^2})(U_y'' - \frac{\theta}{R})(\theta'' + \frac{U_y''}{R}) + GJ(\theta' + \frac{U_y'}{R})^2] dx_1 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} \int_A \frac{R}{R+x_3} dA &= A(1+Z) \cong A + \frac{I_2}{R^2}, \quad \int_A \frac{Rx_3}{R+x_3} dA = -ZAR, \quad \int_A \frac{Rx_3^2}{R+x_3} dA = AZR^2 \\ J &= \int_A [\left\{ x_3 + \Phi_{,2} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) \right\}^2 + \left\{ x_2 + \frac{\Phi}{R} - \Phi_{,3} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) \right\}^2] \frac{R}{R+x_3} dA \end{aligned} \quad (7)$$

한편, 초기응력과 표면력에 의한 포텐셜에너지 Π_G 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Pi_G = & \frac{1}{2} \int_L F_1 \delta [U_y'^2 + (U_z' - \frac{U_x}{R})^2] dx_1 + \frac{1}{2} \int_L M_p \delta (\theta' + \frac{U_y'}{R})^2 dx_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_L M_2 \delta [\theta U_y'' - U_y' \theta' - \frac{1}{R} U_y'^2 - \frac{1}{R} \theta^2] dx_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_L M_3 \delta [\theta (U_z'' - \frac{U_x'}{R}) - (U_z' - \frac{U_x}{R}) (\theta' + \frac{U_y'}{R})] dx_1 \quad (8) \\
& + \int_L M_\phi \delta [\frac{1}{R} (U_z' - \frac{U_x}{R}) (\theta' + \frac{U_y'}{R})] dx_1 + \frac{1}{2} \int_L \{ F_2 \delta [\theta (U_z' - \frac{U_x}{R})] - F_3 \delta [\theta U_y'] \} dx_1 \\
& + \frac{1}{2} \int_L M_1 \delta [(U_z' - \frac{U_x}{R}) (U_y'' - \frac{\theta}{R}) - U_y' (U_z'' - \frac{U_x'}{R})] dx_1
\end{aligned}$$

3. 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외좌굴에 대한 엄밀해

단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외 좌굴에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 식(6)과 (8)로부터 면외거동 및 비틀림과 관련된 항만을 재정리하면 포텐셜에너지는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Pi_E + \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[E\hat{I}_3 (U_y'' - \frac{\theta}{R})^2 + GJ (\theta' + \frac{U_y'}{R})^2 + 2E\hat{I}_{\phi 3} (U_y'' - \frac{\theta}{R}) (\theta'' + \frac{U_y''}{R}) \right. \\
& \left. + E\hat{I}_\phi (\theta'' + \frac{U_y''}{R})^2 + F_1 U_y'^2 + M_p (\theta' + \frac{U_y'}{R})^2 + M_2 (U_y'' \theta - U_y' \theta' - \frac{U_y'^2}{R} - \frac{\theta^2}{R}) \right] dx_1 \quad (9)
\end{aligned}$$

여기서

$$\hat{I}_3 = I_3 - \frac{I_{233}}{R}, \quad \hat{I}_\phi = I_\phi - \frac{I_{\phi 02}}{R}, \quad \hat{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R} \quad (10)$$

식(4)에서 고차항 및 면내 변형과 관계된 항들을 무시하면 곡선보에 분포하는 내력은 다음과 같다.

$$F_1 \cong EA (U_x' + \frac{U_z}{R}) + \frac{EI_2}{R} (U_z'' + \frac{U_z}{R}) \quad (11a)$$

$$M_2 = -EZAR (U_x' + \frac{U_z}{R}) - EZAR^2 (U_z'' - \frac{U_x'}{R}) \cong -EI_2 (U_z'' + \frac{U_z}{R}) \quad (11b)$$

$$M_p \cong \frac{I_2 + I_3}{A} (F_1 + \frac{M_2}{R}) + \frac{I_{233} + I_{222}}{I_2} M_2 = \beta_1 F_1 + (\frac{\beta_1}{R} + \beta_2) M_2 \quad (11c)$$

양단이 단순지지된 박벽 곡선보의 면외좌굴하중을 산정하기 위하여 면외거동에 대한 변위와 비틀림 변위에 대한 변위함수를 다음과 같이 정의한다.

$$U_y = B \sin(\lambda x_1), \quad \theta = D \sin(\lambda x_1), \quad \lambda = n\pi/L \quad (12)$$

여기서 B 와 D 는 미지계수이고 λ 는 곡선보의 좌굴모드를 나타낸다. 정의된 처짐함수를 식(9)에 대입하여 변분을 취하고 유도된 운동방정식을 미지 계수에 대한 특성방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$K_{11} = E\hat{I}_3\lambda^4 + GJ\frac{\lambda^2}{R^2} + E\hat{I}_\phi\frac{\lambda^4}{R^2} + 2E\hat{I}_{\phi 3}\frac{\lambda^4}{R} + F_1(\lambda^2 + \beta_1\frac{\lambda^2}{R^2}) + M_2(\beta\frac{\lambda^2}{R^2} - \frac{\lambda^2}{R}) \quad (14a)$$

$$K_{12} = K_{21} = E\hat{I}_3\frac{\lambda^2}{R} + GJ\frac{\lambda^2}{R} + E\hat{I}_\phi\frac{\lambda^4}{R} + E\hat{I}_{\phi 3}(\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{R^2}) + F_1(\beta_1\frac{\lambda^2}{R}) + M_2(\beta\frac{\lambda^2}{R} - \lambda^2) \quad (14b)$$

$$K_{22} = E\hat{I}_3\frac{1}{R^2} + GJ\lambda^2 + E\hat{I}_\phi\lambda^4 + 2E\hat{I}_{\phi 3}\frac{\lambda^2}{R} + F_1(\beta_1\lambda^2) + M_2(\beta\lambda^2 - \frac{1}{R}) \quad (14c)$$

식(14)에서 $F_1 = 0$ 이라 하고, 행렬식을 취하면 일축대칭 단면을 갖는 곡선보의 좌굴하중 M_2 를 다음과 같이 2차 방정식 형태로 나타낼 수 있다.

$$A_1M_{2cr}^2 + A_2M_{2cr} + A_3 = 0 \quad (15)$$

여기서

$$A_1 = -1 + \frac{\beta}{R}, \quad A_2 = E\hat{I}_3(\beta v + \frac{1}{R}) + GJ\frac{1}{R} + E\hat{I}_\phi\frac{\lambda^2}{R} + 2E\hat{I}_{\phi 3}\lambda^2, \quad A_3 = v[E\hat{I}_3(GJ + E\hat{I}_\phi\lambda^2) - (E\hat{I}_{\phi 3}\lambda)^2] \quad (16)$$

위 식에서 $v = \lambda^2 - 1/R^2$ 이고, 식(14)에서 $M_2 = 0$ 라 놓고 행렬식을 취하면 균일압축상태 하에서 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 좌굴하중을 아래와 같이 2차 방정식 형태로 표현할 수 있다.

$$B_1F_{1cr}^2 + B_2F_{1cr} + B_3 = 0 \quad (17)$$

여기서

$$B_1 = \beta_1\lambda^2, \quad B_2 = E\hat{I}_3(\beta_1 v^2 + \frac{1}{R^2}) + GJ\lambda^2 + E\hat{I}_\phi\lambda^4 + 2E\hat{I}_{\phi 3}\frac{\lambda^2}{R}, \quad B_3 = v^2[E\hat{I}_3(GJ + E\hat{I}_\phi\lambda^2) - (E\hat{I}_{\phi 3}\lambda)^2] \quad (18)$$

4. 유한요소 정식화

본 연구에서는 일축 박벽 단면을 갖는 곡선보 요소를 이용한 유한요소를 개발하고 직선보 요소에 의한 해석결과와 비교하여 제시한다. 두 요소의 변위장은 모두 도심축에 대하여 정의되었으며 형상함수는 3차의 Hermitian 다항식을 이용하였다.

4.1 곡선보요소를 이용한 유한요소 해석

일반화된 좌표들을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 논문에서 2절점을 갖는 3차의 Hermitian 다항식을 사용한다. 그림 2를 참조하여 위의 사항들을 고려하면 박벽 곡선보요소의 변위장은 다음과 같이 표시된다.

$$U_x = h_1 \cdot U^p + h_2 \cdot L(g^p - \frac{W^p}{R}) + h_3 \cdot U^q + h_4 \cdot L(g^q - \frac{W^q}{R}) \quad (19a)$$

$$U_y = h_1 \cdot V^p + h_2 \cdot L \cdot \omega_3^p + h_3 \cdot V^q + h_4 \cdot L \cdot \omega_3^q \quad (19b)$$

$$U_z = h_1 \cdot W^p - h_2 \cdot L(\omega_2^p - \frac{U^p}{R}) + h_3 \cdot W^q - h_4 \cdot L(\omega_2^q - \frac{U^q}{R}) \quad (19c)$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h_2 \cdot L(f^p + \frac{\omega_3^p}{R}) + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot L(f^q + \frac{\omega_3^q}{R}) \quad (19d)$$

여기서 h_i 는 3차의 Hermitian 다항식을 나타내며 곡률반경 R 에 의해 나누어지는 항들은 외력이 작용하지 않고, 곡률을 고려한 곡선보의 선형 평행방정식의 해로부터 유도한 형상함수이다. 이때, 절점 회전변위는 곡률효과를 고려하여 다음과 같이 정의한다.

$$\omega_1^p = \theta(0), \quad \omega_2^p = -U_z'(0) + \frac{U_x(0)}{R}, \quad \omega_3^p = U_y'(0), \quad f^p = -\theta'(0) - \frac{U_y'(0)}{R}, \quad g^p = U_x'(0) + \frac{U_z(0)}{R} \quad (20)$$

현재까지의 이론을 토대로 식(19)를 식(6)과 식(8)에 대입하고 적분을 행하면 다음과 같이 박벽 곡선보에 대한 행렬운동방정식을 얻는다.

$$(K_E + K_G) U_e = F_e \quad (21)$$

$$\text{여기서 } U_e = \langle U^p, V^p, W^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, U^q, V^q, W^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \quad (22a)$$

$$F_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, M_\phi^p, 0, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_\phi^q, 0 \rangle \quad (22b)$$

위 식에서 K_E 와 K_G 는 각각 요소좌표계에 대한 탄성 및 기하학적 강도행렬을 나타내고 U_e 와 F_e 는 각각 구속된 비틀을 고려한 요소좌표계에서의 절점변위벡터와 부재력을 나타낸다. 결과적으로 직접강도법에 의하여 전체 구조물에 대한 운동방정식은 다음과 같이 바뀌어 나타낼 수 있다.

$$[K_E^o + \bar{\lambda} K_G^o] U = 0 \quad (23)$$

여기서 $\bar{\lambda}$ 는 하중파라미터이고 윗첨자 'o'는 전체강도행렬을 나타낸다.

4.2 직선보요소를 이용한 유한요소 해석

곡선보에서의 경우와 마찬가지로 선형화된 가상일의 원리를 적용하면, 구속된 퓌를 고려한 박벽 직선보의 탄성 변형에너지 Π_E 와 외력에 의한 포텐셜에너지 Π_G 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^L [EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2 \\ + 2EI_{\phi 3} U_y'' \theta'' + 2EI_{\phi 2} U_z'' \theta'' + 2EI_{23} U_y'' U_z''] dx_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = \frac{1}{2} \int_0^L [F_1(U_y'^2 + U_z'^2) + M_\phi \theta'^2 + M_1(U_z' U_y'' - U_z'' U_y') \\ + M_2(U_y'' \theta - U_y' \theta') + M_3(U_z'' \theta - U_z' \theta') + F_2 U_z' \theta + F_3 U_y' \theta] dx_1 \end{aligned} \quad (25)$$

위 식에서 Π_E 와 Π_G 는 도심에 대하여 정의된 변위장을 적용하였고 곡률을 무시한 곡선보의 포텐셜에너지와 같으며 식(23)로부터 직선보에 의한 원형 아치의 좌굴하중을 산정할 수 있다.

5. 해석예제

본 연구에서는 일축대칭 단면을 갖는 곡선보에 대한 유한요소 정식화 과정을 제시하고 엄밀해를 유도하였다. 유한요소 정식화 과정에서는 박벽 원형아치를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타내고 이를 운동방정식에 대입하여 5점 가우스적분을 행함으로써 탄성강도행렬과 질량행렬을 얻는다. 얻어진 행렬로부터 IMSL를 이용함으로써 고유치 문제를 해결하였다.

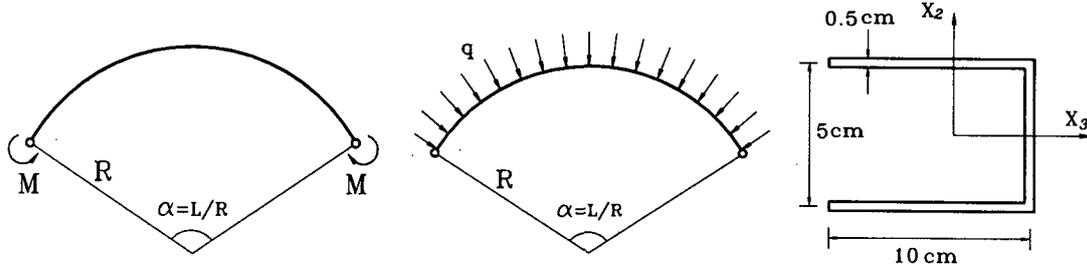
◆ 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 면외 좌굴해석

본 예제에서는 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 면외 좌굴해석을 수행하였으며 일축대칭 단면의 재료상수와 기하학적 물성치는 다음과 같다.

$$A = 12.5 \text{ cm}^2, E = 73,000 \text{ kg/cm}^2, G = 28,000 \text{ kg/cm}^2, J = 1.04167 \text{ cm}^4, \hat{e}_3 = 8.61538 \text{ cm},$$

$$I_2 = 133.385 \text{ cm}^2, I_3 = 67.9167 \text{ cm}^4, I_\phi = 5682.12 \text{ cm}^6, I_{\phi 3} = -585.128 \text{ cm}^5, I_{222} = -100.0 \text{ cm}^5,$$

$$I_{\phi\phi 2} = 7465.73 \text{ cm}^7, I_{\phi 23} = -282.051 \text{ cm}^6, I_{233} = -41.6667 \text{ cm}^5, \beta_1 = 16.1042 \text{ cm}^6, \beta_2 = -1.06209 \text{ cm}^6$$



(a) Positive bending moment (b) Uniformly distributed radial load (c) Cross section

Figure 3. Simply supported circular arch with monosymmetric cross section

직선보 요소를 이용하여 해석하는 경우에는 기하학적 대칭성을 고려하여 아치의 반만을 모델링하였고 아치의 곡선형태가 충분히 반영될 수 있도록 50개의 요소로 사용하였다. 그러나 직선보는 진동형태에 따라 과다강성 또는 과소강성을 갖기 때문에 아치의 길이에 비해 단면의 크기가 상대적으로 큰 경우에 직선보를 이용한 해석결과는 엄밀해보다 작은 값을 얻게된다. 표 1은 원호의 길이가 250cm를 갖는 원형아치의 면외좌굴에 대한 해석결과를 제시한 것이다. 본 예제는 원호의 길이에 비해 단면의 크기가 큰 경우로써, 단면의 비대칭효과가 커지기 때문에 본 연구의 엄밀해 및 곡선보에 의한 유한요소 해석결과가 직선보를 이용한 해석결과와 비교할 때 상대적으로 약간 큰 차이를 보여주고 있다. 표에서 방법 1은 식(10)을 그대로 이용한 것이고 방법 2는 곡률효과를 무시하여 I_3 와 I_ϕ 그리고 $I_{\phi 3}$ 만을 이용하여 해석한 것이다. 그 결과, 방법 2에 의해 해석된 좌굴하중은 방법 1과 직선보를 이용한 해석결과의 중간 값을 나타내었으며 이 사실로부터 곡률효과가 정확하게 고려된 본 연구의 해석방법이 가장 정확하다는 결론을 얻을 수 있다.

Table 1. Lateral buckling moment of thin-walled circular arch subjected to the pure bending

mode	angle (degree)	This study				Vlasov	Papangelis
		Analytic solution		FEM (beam element)			
		Method 1	Method 2	curved	straight		
Symm.	0	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73	-16099.6 1777.73
	90	-1135.74 18875.7	-1139.47 18725.0	-1135.80 18875.7	-1150.97 18653.2	-1177.07 18236.4	-889.707 18094.9
	180	0 50010.5	0 49467.9	0 50010.5	-11.4906 49333.2	0 48440.5	0 48334.9
	270	435.780 82057.0	436.032 80892.1	435.832 82057.0	419.421 80724.3	450.743 79371.0	-564.026 79286.8
	360	751.479 114439.	751.363 112418.	751.504 114439.	726.743 112245.	777.578 110425.	-2334.09 110358.
Antisymm.	0	-60335.7 3048.08	-60335.7 3048.08	-60336.5 3048.11	-60335.6 3048.08	-60335.7 3048.08	-60335.7 3048.08
	90	-29288.3 5887.03	-29473.5 5814.70	-29289.7 5887.29	-29749.3 5765.90	-31279.2 5512.10	-30724.5 5260.89
	180	-7589.02 18193.0	-7744.72 17619.3	-7591.89 18194.1	-7949.83 169168.	-9214.89 14968.3	-7555.16 13692.4
	270	-1736.13 46475.4	-1759.57 45082.5	-1740.35 46476.1	-1824.77 441253.	-2046.27 39320.2	-919.194 38295.7
	360	0 79014.8	0 76695.5	0 79014.8	-53.8885 75835.7	0 68794.4	0 68115.8

표 2는 각각 균일압축을 받는 박벽 원형 아치의 면외 좌굴에 대한 해석결과를 제시한 것이다. 엄밀해 및 곡선보를 이용하여 얻어진 좌굴하중 F_{cr} 이 직선보를 이용한 해석결과와 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 2. Lateral buckling load of circular arch subjected to the uniform compression radial load

mode	angle (degree)	Analytic solution		FEM (beam element)	
		Method 1	Method 2	curved	straight
Symm.	0	278.430	278.430	278.431	278.431
	90	19.9688	20.0200	19.8533	20.2843
	180	0	0	0.000662	0.002729
	270	4.62555	4.62971	4.60483	4.30883
	360	14.3908	14.3963	14.3305	13.6717
Antisymm.	0	552.765	552.765	552.770	552.766
	90	2195.10	2217.34	2146.90	2220.77
	180	211.867	214.607	206.367	217.243
	270	23.5642	23.8010	23.0855	25.0300
	360	0	0	0.041849	0.026634

6. 결 론

본 연구에서는 박벽 원형아치의 안정성해석을 수행하기 위하여, 선형화된 가상일의 원리를 적용함으로써 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였다. 박벽단면의 비대칭성과 뒹(warping)을 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 변위장을 도입하여, 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보 요소를 이용한 유한요소법을 제시하였으며 처짐함수를 가정하여 엄밀해를 유도하였다. 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보에 의한 안정성 해석결과를 다른 연구자의 엄밀해 및 직선보 요소를 이용한 수치해석결과와 비교하였고, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

1. 순수 휨이 작용하고 경계조건은 단순지지이며 일축대칭 단면을 갖는 박벽 원형아치의 좌굴하중을 계산한 결과, 본 연구방법에 의한 결과와 Vlasov 및 Papangelis의 해석결과가 부분적인 일치를 보였다.
2. 직선보를 이용한 유한요소해석을 수행하였고, 해석결과가 다른 연구자들의 해석 결과보다는 본 연구의 해석결과에 보다 근접함을 보였으며, 결과적으로 본 연구의 타당성 및 정확성을 입증하였다.
3. 본 연구에서는 임의의 지지조건과 일축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보에 대한 유한요소를 개발하였으며, 단순지지되고 일축대칭 단면을 갖는 원형 아치의 면외 좌굴에 대한 엄밀해를 유도함으로써 곡선보가 이용되는 제반 구조물의 해석에 유용하게 쓰여질 수 있을 것으로 판단된다.

7. 참고문헌

1. Vlasov, V.Z. (1991). Thin-walled elastic beams. 2nd Ed., National Science Foundation, Washington, D.C.
2. Papangelis, T.P., and Trahair, N.S. (1987a). "Flexural-torsional buckling of arches." *J. Engrg., ASCE*, 113(4), 889-906.
3. Kang, Y.J., and Yoo, C.H. (1994). "Thin-walled curved beams. II : Analytical solution for buckling of arches." *J. Engrg. Mech., ASCE*, 120(10) 2102-2125.
4. Kim, M.Y., and Chang, S.P., and Kim, S.B., "Spatial Stability Analysis of Thin-walled Space Frames." *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 39, pp499~525, 1996.2.
5. Chang, S.P., and Kim, M.Y., and Kim, S.B., "Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches." *ASCE Journal of Eng. Mechanics*, 122, pp844~854, 1996.9.