한국전산구조공학회
1998년도 봄학술발표회 논문집

형상과 단부조건에 따른 아치의 비선형 동적거동

A Study on the Nonlinear Dynamic Behaviors of Arches due to the Change of Shapes and Boundary conditions

여 동 훈* 이 상 호**
Yeo, Dong-Hun Lee, Sang-Ho

ABSTRACT

In this study, an explicit transient analysis program considering material and geometric nonlinearities has been developed and used to analyze the dynamic behaviors of circular, parabolic, sinusoidal and catenary arches according to the change of shapes and boundary conditions. To understand dynamic behaviors of arches, first of all, the results of free vibration analysis for four kinds of arches are discussed. The results of transient analysis under impact loads are discussed in respect of boundary condition, change of height, and arch-shape. The dynamic behaviors of arches by nonlinear transient analysis considering both material and geometric nonlinearities are also discussed.

1. 서 론

구조물의 사회에 대한 기여도가 증가함에 따라 근래에 들어서는 구조물의 정적거동 뿐만 아니라, 사용에 따른 동적 반복하중, 지진하중, 예기치 않은 상황의 발생에 따른 충격하중 등에 대한 구조물의 동적거동 및 응답을 보다 정확히 예측하고 또한 이를 설계에 반영할 필요성이 증대되고 있다.

본 연구의 적용대상인 아치는 구조적으로 매우 이상적일 뿐만 아니라 그 미적인 감각 때문에 예로부터 교량 등 각종 구조물에 많이 이용되고 있다. 과거에는 단면이 크고 지간이 짧은 아치 구조물이 대부분이고 하중이 과대하지 않았기 때문에 정적해석만으로 안전한 설계가 가능하였으나, 재료가 고강도화되고 설계기술이 발달됨에 따라 단면은 작아지는 반면 지간은 더욱 길어지고 대형화되는 추세에 있으며 또한 충격, 지진 등 예기치 않은 큰 하중을 받는 경우가 많아지게 되었다. 따라서, 아치를 동하중을 받는 구조물로 이용하는 경우에는 아치구조의 동적거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요청된다.

아치는 기하학적 형태와 단부조건에 따라 서로 다른 동적특성을 나타내며 구조적 특성상 과대한 변형을 야기시킬 수 있으므로 동하중 작용시 대변형이 고려된 비선형 해석이 중요한 과제로 등장하게 되었다.

따라서, 본 연구에서는 단부조건과 곡률반경이 다른 아치들에 대하여 자유진동 특성을 분석하고 개발된 재료 및 기하학적 비선형성을 고려하는 명시적 동적해석 프로그램을 사용하여, 아치의 비선형동적거동을 분석하고자 한다.

* 현대건설 토목설계실
** 정회원, 연세대학교 토목공학과 조교수

2. 비선형을 고려한 보요소

재료의 비선형성을 고려하기 위하여 Von Mises의 항복조건식과 흐름법칙(flow rule)을 기초로 한 등방성 일축응력-변형률의 관계를 이용하고, 대변형 소변형률을 전제로 하는 대류좌표계(convected coordinates)를 이용하여 기하학적 비선형성을 고려함으로써 명시적 시간적분법인 중앙차분법을 바탕으로 구조물의 동적 과도해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 본 연구에 사용하는 대류좌표계 방법은 증분변위를 회전변위와 순수변형성분으로 분리시켜서, 강체회전은 요소의 방향변화를 결정하고 순수변형은 부재력 증분을 산정하여 기하학적 비선형성을 고려하게 된다.[1)]

그림 1은 대류좌표계에서 보요소의 형상을 나타낸 것이다. 보요소에서 대류좌표계의 $\hat{x}$축은 두 절점을 잇는 선이다. 횡방향 변위(transverse displacement)는 $\hat{x}$축상에서 3차함수, 축변형은 직선으로 가정한다. 보의 강체회전은 요소 길이에 따라 변하지만 변형률이 작으면 $\hat{x}$에 대한 회전이 작으므로 $\hat{x}$축의 회전각 θ는 전체요소의 강체회전에 대해 간략하게 표현할 수 있다.

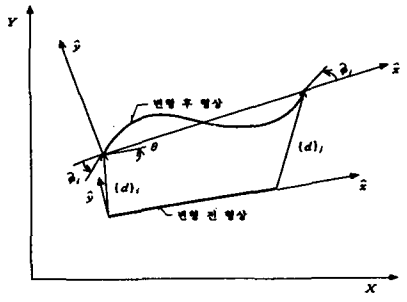


그림 1 보요소의 형상

대류좌표계를 이용한 보요소의 변형변위는 $\hat{x}$축에 대한 절점회전 $\hat{\phi}_i$와 midplane 변형률 $\hat{\varepsilon}_m$로 구할 수 있으며, 단면적 A_c를 가진 보에 대한 변형변위에 상응하는 절점력을 계산할 수 있다. 대류좌표계를 이용한 동적 과도해석의 흐름도와 보요소의 절점력을 계산하는 절차를 그림 2와 그림 3에 정리하였다.

3. 아치의 자유진동해석

그림 4는 대상으로 택한 원호아치, 포물선아치, 정현아치, 현수아치의 기하학적 형상를 나타내며 자유진동해석을 수행하여 그 결과를 운동방정식으로부터 유도된 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식[2-3)]으로부터 얻어진 고유진동수와 비교하고, 아치의 높이와 단부조건에 따른 자유진동 특성을 분석하였다.
아치의 단부조건를 고정단-고정단, 고정단-회전단, 회전단-회전단으로 세분한 단부조건과, 지간길이에 대한 높이비인 f와, 식 (1)의 무차원 고유진동수인 C_n을 사용하여 높이변화에 따른 아치의 자유진동 특성을 분석하였다.

$$C_n = \omega_n s l \sqrt{\frac{\gamma}{E}} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \cdots) \tag{1}$$

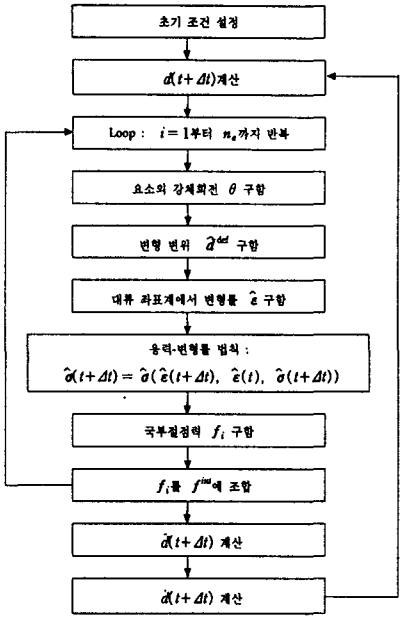


그림 2 대류좌표계를 이용한 동적 과도해석의 흐름도

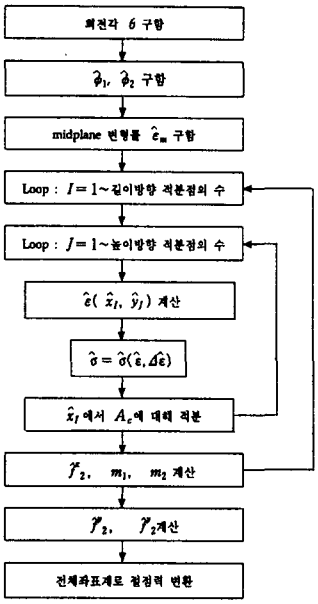
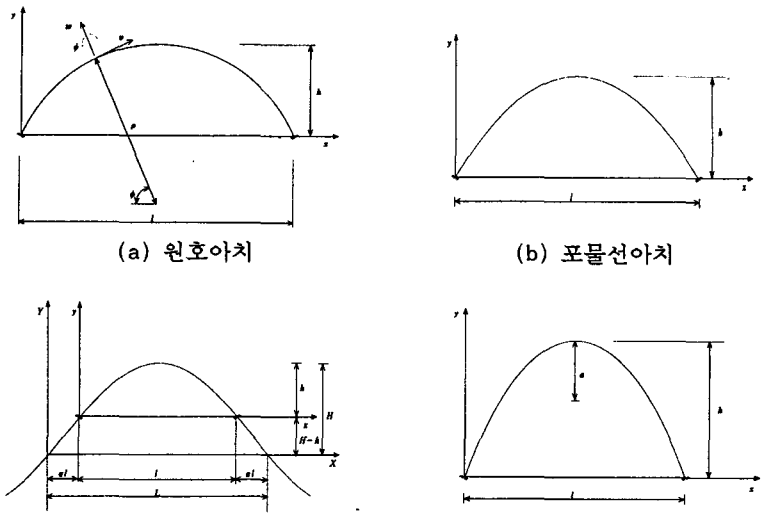


그림 3 보요소의 절점력 계산절차

여기서 γ는 단위체적당 질량이며, ω_n은 n차 고유진동수(natural frequency), 세장비(slenderness ratio) s는 부재단면의 크기를 정의해주는 변수로서 회전반경 r에 대한 지간길이 l의 비이다.

해석에 사용된 아치의 제원은 지간길이 $l=27.010m$, 탄성계수 $E=2.058\times10^{11}N/m^2$, 단위체적당 질량 $\gamma=7850N\cdot\sec^2/m^4$, 단면 2차모멘트 $I=8.318\times10^{-3}m^4$, 단면의 회전반경 $r=0.2m$이며, 지간길이에 대한 높이비 f를 직선보의 경우인 0.0부터 0.05씩 증가시켜가며 $f=0.5$까지의 아치형상에 대하여 각각 4차 모드까지 단부조건에 따라 해석을 수행하였다.

단부조건에 따른 고유진동수는 고정단-고정단, 고정단-회전단, 회전단-회전단 순으로 작아짐을 알 수 있으며, 높이가 증가함에 따라 고유진동수는 역대칭모드 경우는 단조 감소하고, 대칭모드 경우는 일시 증가 후 감소하는 경향을 보였다. 높이비 $f=0$ 즉, 직선보일 때는 모드 차수가 증가함에 따라 '대칭-역대칭-대칭-역대칭'의 순서로 모드형상을 나타내었으나, 아치의 종류에 따라 약간 차이는 나지만 높이비 f가 0.05~0.20 사이에서 단부조건에 따라 모드형상의 전이현상이 나타났으며, 높이비가 더 증가하게 되면 모드 차수가 증가함에 따라 '역대칭-대칭-역대칭-대칭'의 순으로 모드형상을 나타냄을 알 수 있었다. 또한, 다른 아치에 비하여 높이비가 증가함에 따라 원호아치의 고유진동수가 크게 감소하는 것을 알 수 있었으며, 전반적으로 '원호아치-현수아치-포물선아치-정현아치' 순으로 고유진동수가 커지는 것을 알 수 있었다. 그림 5와 그림 6은 단부조건과 높이변화에 따른 원호아치의 고유진동특성과 양단이 회전단인 아치의 고유진동특성을 도시하였다.



(a) 원호아치 (b) 포물선아치

(c) 정현아치 (d) 현수아치

그림 4 아치의 기하학적 형상

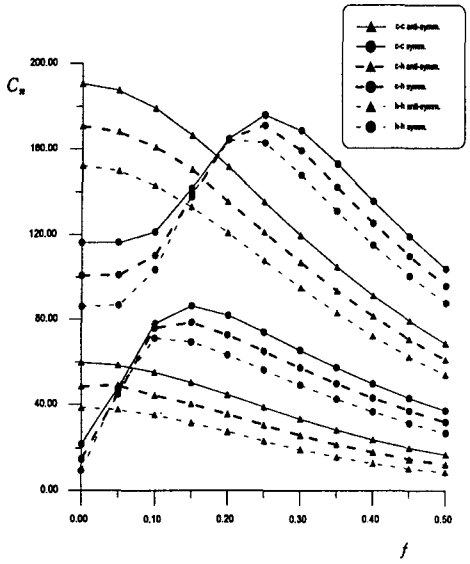


그림 5 단부조건와 높이변화에 따른 원호아치의 고유진동특성

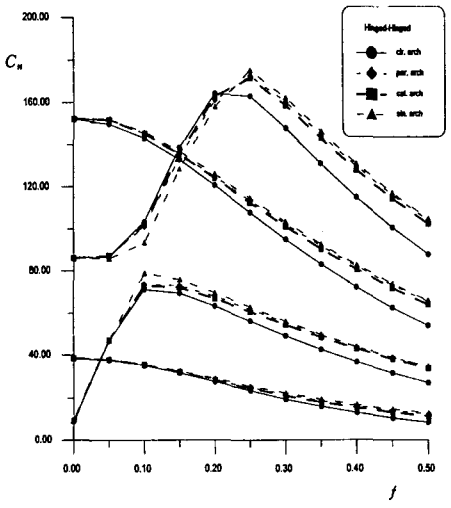


그림 6 회전단-회전단 아치의 고유진동특성

4. 충격하중을 받는 아치의 비선형 동적해석

본 연구에서 개발된 비선형 동적해석 프로그램의 정확성을 참고문헌 4)와 bench mark 문제를 통해 검증하였으며 이를 이용하여 아치의 기하학적 형상에 따른 원호아치, 포물선아치, 정현아치, 현수아치의 단부조건

변화 및 충격하중 위치변화에 따른 비선형 동적 과도해석을 수행하여 그 결과를 비교·분석하였다.

아치의 단부조건과 높이변화에 따라 동적 과도해석에 의한 아치의 동적 거동을 알아보기 위하여 단부조건의 변화와, 높이비 f를 0.1부터 0.1씩 증가시켜가며 0.5인 아치까지 높이변화에 따라 충격하중에 대한 기하학적 비선형을 고려한 동적 과도해석을 수행하였다. 아치에 재하하는 충격하중은 해석기간동안 일정한 값을 유지하는 집중하중을 사용하였다. 충격하중의 재하위치는 대칭과 역대칭형태의 모드형상을 야기시킬 수 있는 아치의 중앙과 단부로부터 지간의 1/4인 지점으로 하였다. 자유진동해석에 사용했던 아치의 제원과 동일하며, 아치의 단면은 가로 $0.3m \times 0.7m$의 거형단면을 사용하였다. 아치에 재하하는 충격하중은 $P_1 = 1 \times 10^7 N$이며, 단부조건 중 고정단-회전단의 경우는 회전단에 인접한 지간의 1/4인 지점에 하중을 재하하였다. 아치를 100개의 보요소로 나누어 수행한 해석에서 시간증분은 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$sec를 사용하였다.

그림 7~그림 10에서 보듯이 아치 중앙에 충격하중 재하시 아치 중앙의 수직 처짐값은 단부조건이 고정단에서 회전단으로 갈수록 최대처짐값과 처짐주기가 커짐을 알 수 있었다. 높이비가 증가함에 따라 원호아치, 포물선아치와 정현아치, 현수아치는 각각 다른 동적 거동을 보였으나, 동일 조건하에서 아치의 종류에 따라 중앙의 수직처짐값은 '정현아치-포물선아치-현수아치-원호아치' 순으로 증가하고 원호아치의 경우 높이비가 커짐에 따라 처짐값이 크게 증가하여 자유진동해석의 강성결과와 일치하는 것을 알 수 있었다. 아치의 1/4 지점에 충격하중을 재하하면 고정단-고정단의 경우 높이비가 커짐에 따라 1/4지점 수직처짐이 커지나 고정단-회전단, 회전단-회전단에서는 직선보에 가까운 낮은 아치에서 고정단-고정단인 경우에 비해 처짐이 크게 증가하는 것을 알 수 있었다. 고정단-회전단의 1/4지점에서의 처짐은 회전단이 인접한 경우가 고정단이 인접한 경우보다 크게 나타나지만, 중앙점에서의 처짐은 고정단이 인접한 경우가 회전단이 인접한 경우보다 큰 처짐폭을 나타내었다

아치의 기하학적 형상에 따라 높이비 $f = 0.1, 0.2, 0.5$에서 양단 고정단과 양단 회전단인 단부조건을 갖는 원호아치, 포물선아치, 정현아치, 현수아치에 대해 아치 중앙의 충격하중에 대한 중앙 수직처짐과 아치의 1/4 지점 하중에 대한 1/4지점의 수직처짐을 그림 11과 그림 12에 도시하였다.

다음으로 재료 및 기하학적 비선형성을 모두 고려한 아치의 동적 과도해석을 수행하였다. 재료의 비선형성을 고려하기 위하여 소성변형을 야기시킬 수 있는 충격하중으로 $P = 1.1 \times 10^7 N$을 사용하였으며 하중작용시간을 해석시간 0.15 sec까지 일정하게 재하하는 방법(하중 1)과 해석시간 0.075 sec까지 일정하게 재하 후 작용하중을 제거시키는 방법(하중 2)으로 나누어 아치의 중앙에 재하시켰다. 해석대상아치는 아치 중앙에 충격하중 재하시 중앙처짐에 있어 상대적으로 가장 차이가 났던 원호아치와 정현아치에 국한하여 재료의 비선형성을 고려하여 작용하중 종류에 따른 차이를 분석하였다. 재료의 비선형성은 응력과 변형률의 관계가 탄성영역과 소성영역에서 각각 선형 관계를 갖는 bilinear 모형을 사용하였다. 본 연구에서 탄성계수는 $E = 2.058 \times 10^{11} N/m^2$, 선형탄성계수에 대한 접선탄성계수의 비는 $E_T / E = 0.03$, 항복응력은 $\sigma_Y = 4.9 \times 10^8 N/m^2$이다.

하중 1과 하중 2에 대하여 재료 및 기하학적 비선형성이 고려된 높이비 $f = 0.3$인 경우의 원호아치 및 정현아치의 동적 과도해석의 결과(중앙재하-중앙수직처짐)를 그림 13에 나타내었다. 가는 실선과 가는 점선은 각각 원호아치의 기하학적 비선형성을 고려한 해석결과와 재료 및 기하학적 비선형성을 모두 고려한 해석결과이며, 굵은 실선과 굵은 점선은 정현아치에 해당된다. 결과에 나타나듯이 하중 1의 조건하에서 재료 및 기하학적 비선형성이 모두 고려된 해석시 최대처짐값은 원호아치의 경우 1.63배, 정현아치의 경우 1.43배 증가하였다. 원호아치의 최대처짐은 정현아치에 비해 기하학적 비선형성만 고려한 경우 2.18배, 재료의 비선

형성까지 고려한 경우에는 2.50배 증가치를 나타내었다. 하중 2의 조건하에서는 충격하중이 제거된 후 영구변형분을 제외한 탄성적 거동을 나타내고 있으며, 동일조건하에서 원호아치가 정현아치에 비해 6배 크기의 영구변형을 나타내었다. 그러나 기하학적 scale효과에 대한 비선형 거동 특성은 좀 더 다양한 예제에 대한 분석이 필요할 것으로 사료된다.

5. 결 론

본 연구에서는 명시적 시간적분법인 중앙차분법을 사용하여 재료 및 기하학적 비선형성을 고려한 동적 과도해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하고 이를 이용하여 아치의 단부조건 및 높이변화와 작용하중에 대한 재료 및 기하학적 비선형성을 고려한 아치의 동적거동에 관해 연구하였다.

아치의 비선형 동적 과도해석결과 아치 중앙에 충격하중 재하시 중앙의 수직처짐은 단부조건이 고정단에서 회전단으로 갈수록 최대처짐값과 처짐주기가 커지고, 높이비가 증가함에 따라 원호아치, 포물선아치, 정현아치, 현수아치는 각각 다른 동적거동을 보이나, 자유진동해석의 강성결과와 같이 수직 처짐값은 '원호아치-현수아치-포물선아치-정현아치' 순으로 작아짐을 알 수 있었다. 아치 지간의 1/4지점에 충격하중 재하시 그 지점의 처짐은 고정단-고정단일 경우 높이비가 증가함에 따라 커지나, 단부가 회전단인 경우 직선보에 가까운 낮은 아치에서는 고정단인 경우에 비해 처짐이 크게 증가하는 것을 알 수 있었다. 1/4지점 충격하중 재하시 고정단-회전단의 1/4지점에서의 처짐은 회전단이 인접한 경우가 고정단이 인접한 경우보다 크게 나타나지만, 중앙점에서의 처짐은 고정단이 인접한 경우가 회전단이 인접한 경우보다 큰 처짐폭을 나타내었다.

비선형성을 고려한 동적해석시 최대처짐과 영구변형량의 크기는 아치의 형상에 따른 강성에 의해 좌우되지만, 기하학적 scale 효과에 따른 동적 비선형 거동 특성을 명확히 파악하기 위해서는 다양한 case study가 필요할 것으로 사료된다.

5. 참고문헌

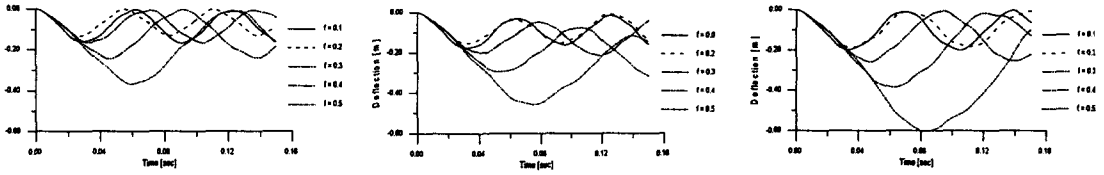
1. Belytschko, T. and Hsieh, B. J. (1973), "Non-linear Transient Finite Element Analysis with Convected Co-ordinates", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7, pp. 255-271.

2. 이병구 (1987), "양단힌지 정현아치의 자유진동에 관한 연구", 대한토목학회 논문집, 제7권, 3호, pp. 101-109.

3. 이병구 (1984), "양단힌지 포물선 아치의 자유진동에 관한 연구", 연세대학교 대학원, 박사학위논문.

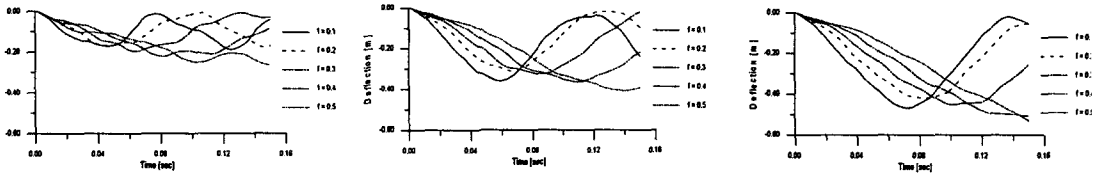
4. 김연태 (1990), "낮은 원호 아치의 비선형 동적거동에 대한 연구", 연세대학교 대학원, 박사학위논문.

5. Belytschko, T. and Hughes, T. J. R. (1983), Computational Methods for Transient Analysis, Elsevier Science Publisher B. V., North-Holland.



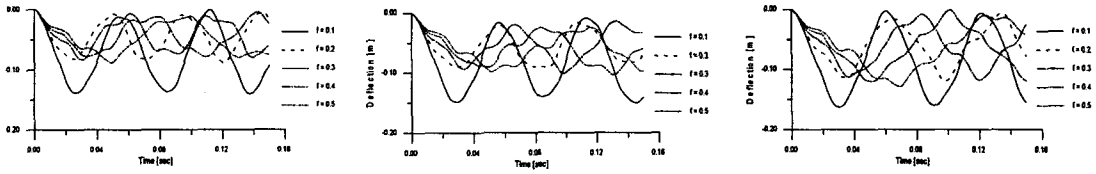
(a) 고정단-고정단 (b) 고정단-회전단 (c) 회전단-회전단

그림 7 원호아치의 과도해석 결과(중앙하중-중앙처짐)



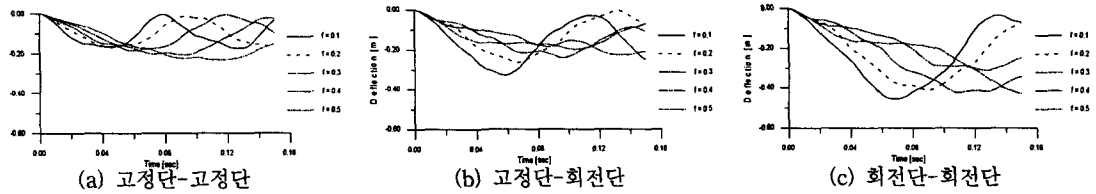
(a) 고정단-고정단 (b) 고정단-회전단 (c) 회전단-회전단

그림 8 원호아치의 과도해석 결과(1/4하중-1/4처짐)



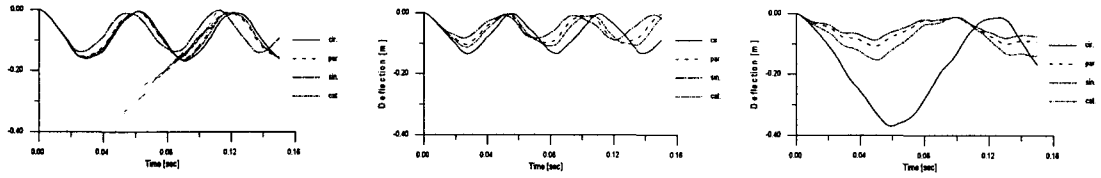
(a) 고정단-고정단 (b) 고정단-회전단 (c) 회전단-회전단

그림 9 정현아치의 과도해석 결과(중앙하중-중앙처짐)



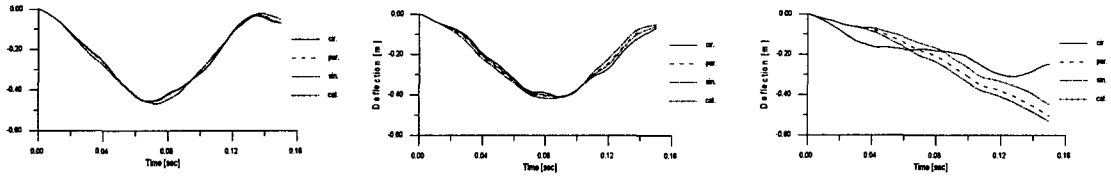
(a) 고정단-고정단 (b) 고정단-회전단 (c) 회전단-회전단

그림 10 정현아치의 과도해석 결과(1/4하중-1/4처짐)



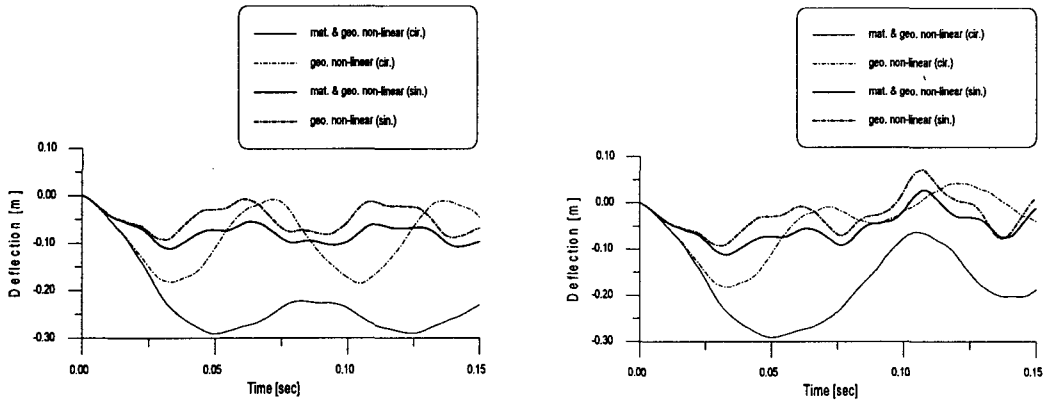
(a) $f=0.1$ (b) $f=0.2$ (c) $f=0.5$

그림 11 아치형상에 따른 과도해석 결과(양단고정, 중앙하중-중앙처짐)



(a) $f=0.1$ (b) $f=0.2$ (c) $f=0.5$

그림 12 아치형상에 따른 과도해석 결과(양단힌지, 1/4하중-1/4처짐)



(a) 하중 1의 경우 (b) 하중 2의 경우

그림 13 작용하중에 따른 재료의 비선형성을 고려한 과도해석 결과