

## 구조계의 동적응답을 이용한 역해석에서의 악조건

### On the ill - condition of reverse process from structural dynamic response data

양 경 택\*  
Yang Kyung-Taek

#### ABSTRACT

An approach to identifying input forces is proposed using measured structural dynamic responses and its analytical model. The identification of input forces is a reverse process and ill-conditioned problem. Its solution is unstable and generally case dependent. In this paper, the ill-condition is described considering characteristic matrix which is defined by reduced dynamic stiffness matrix. Special attention is focused on the condition number of a characteristic matrix used in the solution algorithm of this reverse process. Simple example is presented in support of the ill-condition of a reverse process.

#### 1. 서 론

최근들어 해석적 기법의 개발과 측정장비의 발달에 힘입어 유한요소모델과 실측데이터를 결합하는 시도가 상당부분 진행되어 왔으며 이를 이용한 대상 시스템의 결합색출이나 노후도 진단과 같은 시스템 규명(system identification)기법들이 공학의 여러분야에 적용되고 있다.

해석 및 시스템규명이외에 시스템공학의 또다른 분야는 그림.1과 같이 측정된 응답과 구조시스템의 해석적 모델로부터 입력하중을 규명하는 분야로서 공학적으로 많은 요구가 있음에도 불구하고 불안정한 수학적 특성때문에 사용에 제한을 받아온 것이 현실이다. 기계구조물과 같은 시스템에 작용하는 동적 입력하중을 파악하는 것은 설계나 상태진단에 매우 유용하게 사용될 수 있으며 충격이나 구조진동과 같은 문제에서 주어진 응답레벨을 일으키는 입력하중의 특성을 명확하게 규명하는 것은 필수적이다. 이처럼 구조계의 동적입력하중을 구하는 것은 해석(analysis)의 반대개념인 역해석(reverse process)으로 수학적으로 악조건(ill-condition)이 발생한다고 알려져 있으며 [1, 2] 이는 측정된 응답의 미세한 오차나 시스템의 해석적 모델수립시 발생하는 작은 오차가 입력하중 규명에 많은 오차를 발생시키는 것을 의미하며 이로 인해 이 기법을 공학적 문제에 적용하는데 많은 어려움이 발생하게 된다. 이를 해결하기 위하여 최적제어기법을 이용한 여러가지 시도가 제어공학분야에서 제안되었고 역필터(inverse filter)와 같은 신호처리 기법들이 단일입력/단일출력 시스템에 대하여 제안되었으나 [3] 대부분의 공학적문제는 복수의 입력하중에 대한 복수의 응답문제이므로 실용화에 제한을 받아 왔으며 이에 대한 연구가 현재 활발히 진행중이다 [4, 5].

본 연구에서는 역해석기법을 구조공학문제에 적용하여 유한요소모델과 같은 구조시스템의 해석적모델과 구조계의 부분적인 측정응답을 이용하여 구조계의 입력하중을 추정하는 방법을 제시하였으며 이 때 발생하는 수학적 악조건의 특성을 규명하였다. 또한 구조계의 역해석에서 발생하는 수학적 악조건을 구조계의 모드(mode)와 같은 동적특성과 연관하여 규명하였으며 악조건의 특성을 명확히 예시하기 위하여 간단한 구조계에 대한 수치해석을 통하여 그 결과를 제시하였다.

\* 대림전문대학 메카트로닉스과

## 2. 역해석 모델링

### 2.1 운동방정식

$n$ 개의 자유도를 지닌 비례감쇠 선형구조 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1)$$

여기서  $M$ ,  $C$ ,  $K$ 는 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬로서 유한요소모델이거나 축약된 형태의 등가 모델이다. 식(1)의 운동방정식을 이용하여 모우드해석을 수행한 뒤, 물리좌표계  $x(t)$ 를 모우드좌표계  $\eta(t)$ 로 변환하면 식(2)와 같고

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\xi\omega_n]\{\dot{\eta}(t)\} + [\omega_n^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T f(t) \quad (2)$$

$[\Phi]$ 는 정규화된 모달행렬(normalized modal matrix)로서 다음의 성질을 만족한다.

$$[\Phi]^{-T}[\Phi]^{-1} = [M] \quad (3)$$

측정된 구조계의 부분적인 응답과 구조계의 해석적 모델을 이용하여 입력하중을 추정하는 문제는 역해석(reverse process)으로서 식(1) 또는 (2)의 지배방정식에서 응답벡터  $\{x\}$ 나  $\{\eta\}$ 로 부터 입력하중  $\{f\}$ 를 규명하는 과정이다. 이는 입력과 시스템으로부터 응답을 구하는 승적과는 반대개념인 응답과 시스템으로부터 입력을 구하는 역승적(deconvolution)기법을 사용하여야 한다.

### 2.2 유한요소모델을 이용한 역해석

식(1)을 주파수영역에서 표시하면 식(4)나 식(5)와 같다.

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)X(\omega) = F(\omega) \quad (4)$$

$$\text{또는} \quad D(\omega) \cdot X(\omega) = F(\omega) \quad (5)$$

여기서  $D(\omega)$ 는 구조계의 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)이다.

하중의 입력위치 및 측정이 가능한 응답의 위치에 대한  $m$ 개의 자유도를  $\{X_m\}$ 으로 하고  $(n-m)$ 개의 제거될 자유도를  $\{X_s\}$ 로 구분하여 분리된 행렬 형태로 표현하면 식(6)과 같고

$$\begin{bmatrix} D_{mm}(\omega) & D_{ms}(\omega) \\ D_{sm}(\omega) & D_{ss}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_m(\omega) \\ X_s(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식(6)에서  $\{X_s\}$ 를  $\{X_m\}$ 으로 표현한 뒤

$$X_s(\omega) = -D_{ss}^{-1}(\omega) \cdot D_{sm}(\omega) \cdot X_m(\omega) \quad (7)$$

식(7)을 식(6)에 대입하여 축약된 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$[D_{mm} - D_{ms} D_{ss}^{-1} D_{sm}] X_m(\omega) = I \cdot F_m(\omega) \quad (8)$$

$$\text{또는} \quad D^c(\omega) \cdot X_m(\omega) = I \cdot F_m(\omega) \quad (9)$$

$$(m \times m) \quad (m \times 1) \quad (m \times m) \quad (m \times 1)$$

여기서  $I$ 는 단위행렬이며  $D^c(\omega)$ 는 축약된 형태의 동강성행렬이다.

$F_m$ 의 축약된 하중벡터중에서 실제로 입력하중이 작용하는  $p$ 개의 위치만을 선정하고 입력하중이 영인  $(m-p)$ 개의 하중성분을 제거하면 식(9)는 식(10)과 같다.

$$\begin{matrix} D^c(\omega) & \cdot & X_m(\omega) & = & I_p & \cdot & F_m^p(\omega) \\ (m \times m) & & (m \times 1) & & (m \times p) & & (p \times 1) \end{matrix} \quad (10)$$

여기서  $I_p$ 는 단위행렬  $I$ 의 열중에서 입력하중에 해당하는 열만을 선정한 행렬이며  $F_m^p$ 은 하중벡터  $F_m$ 중에서 하중이 영이 아닌 성분만을 취한 벡터이다. 측정된 구조계의 응답  $X_m$ 으로부터 구조계의 입력하중  $F_m^p$ 를 규명하는 문제는 식(10)으로부터 다음과 같다.

$$F_m^p(\omega) = (I_p)^+ D^c(\omega) \cdot X_m(\omega) \quad (11)$$

여기서  $(I_p)^+$ 는  $I_p$ 의 일반화된 역행렬(generalized inverse)로 식(12)와 같이 정의된다.

$$(I_p)^+ = [[I_p]^T [I_p]]^{-1} [I_p]^T \quad (12)$$

주파수 응답함수의 관점에서 시스템의 입출력을 나타내는 특성행렬의 개념을 도입하여 식(10)과 식(11)을 정리하면 다음과 같다.

$$X_m(\omega) = [A] F_m^p(\omega) \quad (10')$$

$$F_m^p(\omega) = [A]^+ X_m(\omega) \quad (11')$$

$$\text{여기서 특성행렬, } [A] = [D^c(\omega)]^{-1} \cdot I_p \quad (13)$$

### 3. III - Condition

식(14)의 입출력 관계식을 이용하여 추정된 하중벡터의 상대오차범위는 선형대수이론으로부터 식(15)와 같이 표현된다 [6].

$$X_m = A \cdot F_m^p \quad (14)$$

$$\frac{\|\delta F_m^p\|}{\|F_m^p\|} \leq \|A\| \|A^+\| \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \quad (15)$$

여기서  $\|A\|$ 는 구조계의 특성행렬의 norm이며  $\|A\| \|A^+\|$ 는 조건수(condition number)이다.

측정된 구조계의 응답이  $m$ 개이고 입력하중이  $p$ 개인 경우에 특성행렬  $[A]$ 를 특이해분리하면 식(16)과 같다.

$$[A] = [U][\sigma_i][V]^T \quad (16)$$

여기서  $\sigma_i$ 는 특이치(singular value)로 정의되며  $[U]$ 와  $[V]$ 는 좌측특이벡터(left singular vector) 및 우측특이벡터(right singular vector)이다. 특성행렬  $[A]$ 의 조건수는 식(16)의 특이치중 최소의 특이치( $\sigma_{\min}$ )에 대한 최대의 특이치( $\sigma_{\max}$ )의 비로서 최소의 특이치가 영에 근접할 경우에는 식(17)로 정의되는 조건수가 커지게 되어 수학적으로 불안정한 해를 야기시키게 되는 악조건이 발생한다 [7].

$$Cond(A) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min}$$

$$= \|A\| \|A^+\| \quad (17)$$

역해석을 이용한 입력하중의 추정에서 발생하는 오차의 한계는 식(15)에서 처럼 특성행렬의 조건수에 의해 결정되며 구조계의 조건수는 축약된 동강성행렬과 밀접한 관계를 지니고 있으며 식(13)으로부터 특성행렬의 조건수를 식(18)와 같이 표시할 수 있다.

$$\|A\| \|A^+\| \leq \|D^c(\omega)\| \|D^c(\omega)^{-1}\| \|I_p\| \|I_p^+\| \quad (18)$$

추정된 하중벡터의 상대오차는 식(15)와 식(18)로부터 다음과 같이 표시할 수 있으며 축약된 구조계의 동강성행렬의 조건수와 하중의 입력위치에 따라 변화하게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta F_m^p\|}{\|F_m^p\|} &\leq \|A\| \|A^+\| \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \\ &\leq \|D^c(\omega)\| \|D^c(\omega)^{-1}\| \|I_p\| \|I_p^+\| \cdot \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \\ &= \text{Cond}(D^c(\omega)) \cdot \text{Cond}(I_p) \cdot \frac{\|\delta X_m\|}{\|X_m\|} \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4. 수치해석 및 고찰

그림.2과 같은 2개의 자유도를 지닌 구조시스템에 대하여 외부에서 독립된 2개의 입력하중이 작용할 경우 구조계의 응답은 2개의 질량에 대한 변위로서 나타나게 된다. 대상시스템을 모우드해석하면 1차 고유진동수( $f_1$ )는 4.21Hz이며 2차 고유진동수( $f_2$ )는 31.86Hz로서 표.1의 고유벡터에서 알 수 있듯이 1차 모우드는 두 질량사이의 상대운동이 없는 강체운동모우드(rigid body mode)이고 2차모우드는 탄성운동모우드(flexible mode)이다. 전체시스템의 동적특성을 나타내는 주파수응답함수는 그림.3과 같다.

우선 대상시스템에 대한 역해석에서 발생하는 특성을 규명하기 위하여 2개의 입력하중과 2개의 응답에 대해 식(13)으로 정의되는 구조시스템에 대한 특성행렬의 특이치를 식(16)으로부터 구하고 이를 이용하여 조건수를 주파수별로 구하면 그림.4와 같다. 그림에서처럼 대상시스템의 조건수는 2차 고유진동수( $f_2$ ) 근처에서 상당히 크게 나타나고 있으며 1차고유진동수영역( $f_1$ )에서는 조건수가 비교적 작은 값을 취하고 있다. 이는 앞서 모우드해석의 결과에서 처럼 1차모우드는 강체운동모우드로서 구조계의 상대적인 탄성운동에 영향을 미치지 않기 때문으로 판단된다.

##### 4.1 측정잡음과 해석적 모델의 오차가 없는 경우

평균이 영, 크기가 1이고 광대역(wide band)의 주파수특성을 지닌 랜덤하중을 발생시키어 입력하중으로 한 뒤, 구조계의 응답을 구하고 이를 측정된 변위응답으로 가정하여 식(11)로부터 2개의 입력하중을 규명하였다.

측정잡음 및 해석적 모델의 오차가 없는 경우에 본 논문에서 제시된 방법으로 규명된 입력하중은 그림.5과 같이 시간영역에서 실제 입력하중을 정확히 규명하고 있으며 이는 식(15)의 입력추정의 상대오차식에서 예측할 수 있듯이 추정된 입력하중의 상대오차는 영이며 측정된 응답으로부터 입력하중을 추정하는데 대수학적으로 아무런 문제점도 야기시키지 않고 측정점의 수가 입력하중의 수 이상일 경우에는 항상 정확한 결과를 얻을 수 있다.

##### 4.2 측정잡음이 존재하는 경우

현장추정시 발생할 수 있는 측정잡음의 영향을 고려하기 위하여 구조계의 응답에 인위적으로 랜덤한 잡음을 첨가하여 입력하중을 규명하였다. 첨가된 잡음은 정규분포의 특성을 지닌 랜덤잡음이고 잡음비는 정의는 응답신호의 r.m.s값에 대한 측정잡음의 r.m.s비로 정의하였다.

$10^{-7}$ 의 잡음비를 지닌 응답을 이용하여 입력하중을 규명한 뒤, 입력하중의 추정오차를 나타내

면 그림.6과 같고 그 오차의 주파수 성분은 그림.7과 같다. 이는 식(19)에서 처럼 입력하중의 추정 오차는 응답오차와 구조시스템의 조건수에 의해 결정되는데, 응답오차가 작다하더라도 조건수가 큰 경우에는 악조건이 발생하여 입력추정에 많은 오차가 발생하며 그 오차의 주된 주파수 성분은 조건수가 가장 큰 32Hz 근방임을 알 수 있다. 또한 입력하중이 정현파인 경우에도 1%미만의 측정 잡음에 의해 규명된 입력하중은 실제하중과는 그림.8와 같이 많은 차이를 보이게 되며 입력추정 오차의 주된 영향은 조건수가 큰 32Hz성분이 된다.

## 5. 결 론

- 1) 구조계의 입력하중을 추정하기 위한 역해석에서는 측정된 응답의 수가 구조계가 발현하는 모우드의 수 이상이어야 하며 또한 모우드의 수는 입력하중의 수 이상이어야 한다.
- 2) 제시된 방법은 측정잡음이 없는 경우에는 완벽하게 입력하중을 규명할 수 있으나 역해석 문제의 수학적 특성상 작은 측정잡음이나 구조계의 모델링 오차에도 민감하게 해의 불안정성을 나타내고 있다.
- 3) 역해석시 발생하는 악조건은 대상 구조계를 묘사하는 축약된 질량, 강성, 감쇠행렬로 구성되는 특성행렬의 조건수에 따라 결정되며 조건수가 큰 경우에는 악조건이 발생해 역해석 결과가 실제 입력하중을 묘사하지 못하므로 특성행렬의 조건수가 작아지도록 주자유도(master degree of freedom)를 설정하여야 한다.
- 4) 역해석 방법을 실제 공학문제에 적용하기 위하여는 역해석의 특성인 수학적 악조건을 개선시켜야 하며 이를 위하여 주파수영역의 적절화방법(regularization)이나 시간영역의 적응예측기법(adaptive prediction)을 역해석 알고리즘에 반영하는 시도가 추가로 연구되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

1. J. T. Kim, *Source and Path Recovery from Vibration Response Monitoring*, Ph.D Thesis, Department of Mechanical Engineering, MIT, 1987.
2. J. A. Fabummi, "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by Pseudo Inverse Technique", *AIAA Journal*, Vol.24(3), 1986, pp. 504 - 507.
3. J. K. Hammond and P. M. Clarkson, "Optimal Control Deconvolution for Velocity Meter Signals", *ASME Trans. J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol.110, 1988, pp. 17 - 23.
4. B. J. Dobson and E. Rider, "A Review of the Indirect Calculation of Excitation Forces from Measured Structural Response Data", *Part C. Imech Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol.204, 1990, pp. 69 - 75.
5. J. K. Lee and Y. S. Park, "Response Selection and Dynamic Damper Application to Improve Multiple force Identification", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.8(6), 1994, pp. 649 - 664.
6. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1985.
7. E. Routhwell and B. Drachman, "A Unified Approach to Solving Ill-Conditioned Matrix Problems", *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol.28, 1989, pp. 609 - 620.

	$f_n$ (Hz)	Mode shape		remarks
		$x_1$	$x_2$	
1st Mode	4.21	0.71	0.71	rigid body mode
2nd Mode	31.86	1.0	-0.001	flexible mode

Table.1 Modal parameters.

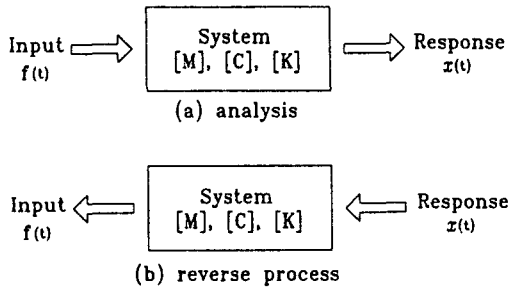


Fig.1 Analysis and reverse process.

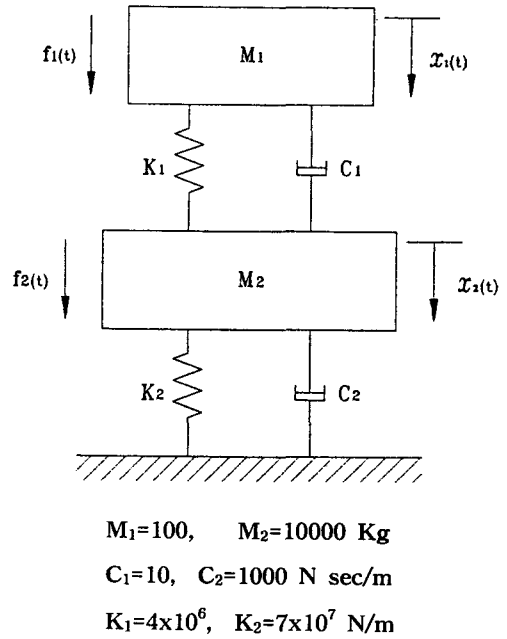
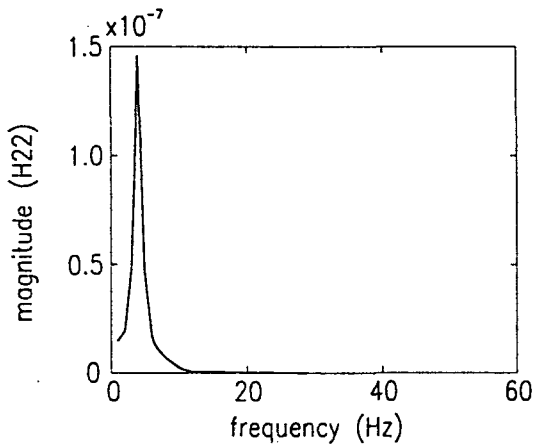
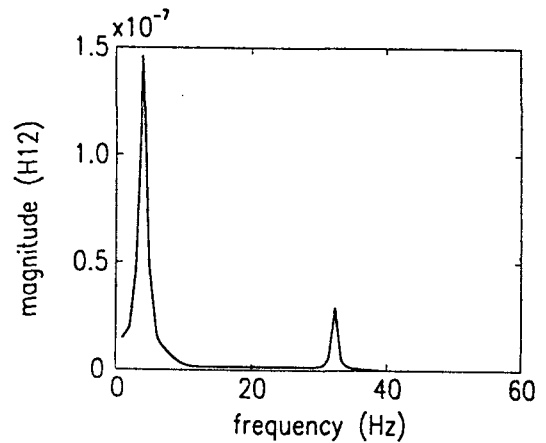


Fig.2 2 dof example structure.

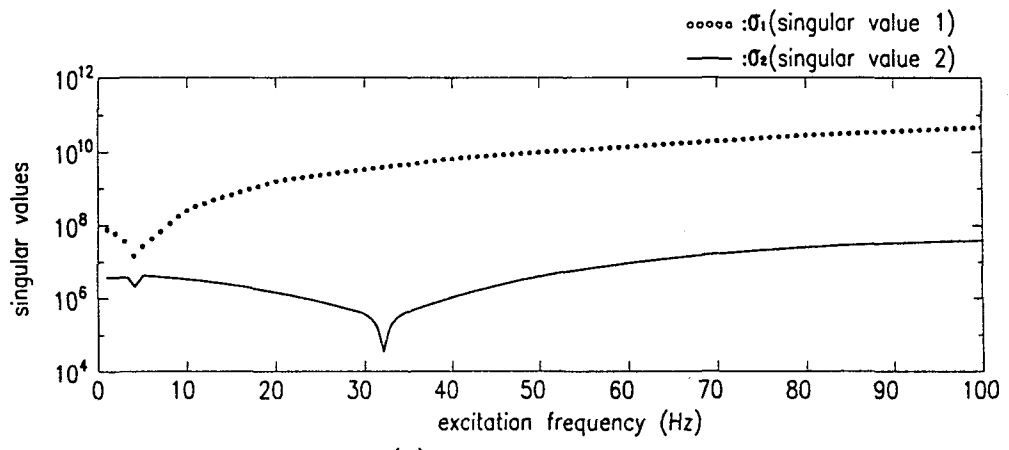


(a) magnitude (H22)

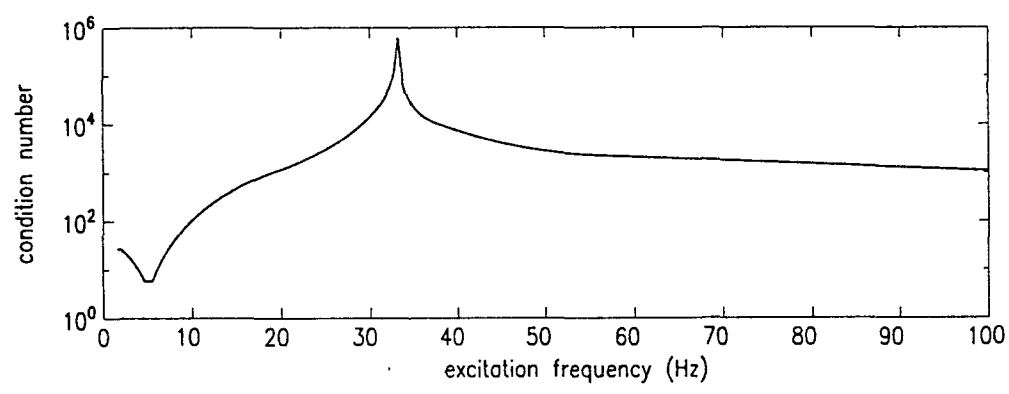


(b) magnitude (H12)

Fig.3 Frequency Response Functions.

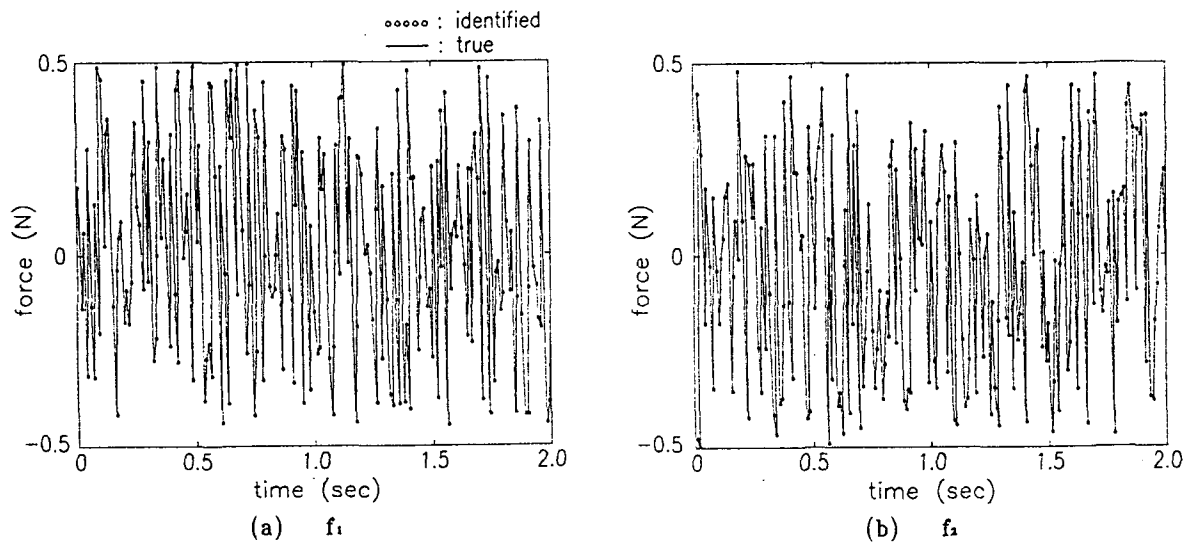


(a) singular values



(b) condition number

Fig.4 Singular values and condition numbers.



(a)  $f_1$

(b)  $f_2$

Fig.5 Comparisons of true and identified input forces.  
 ( random input forces )

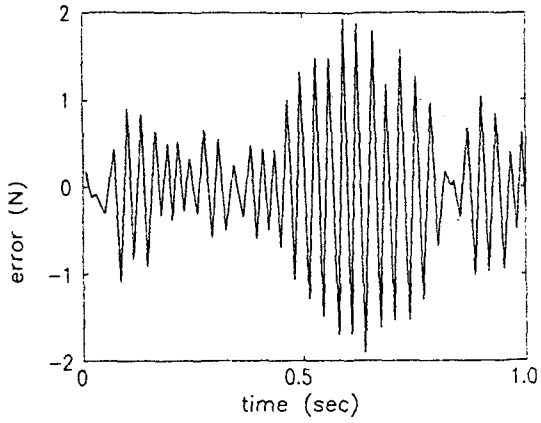


Fig.6 Input identification error due to measurement noise.

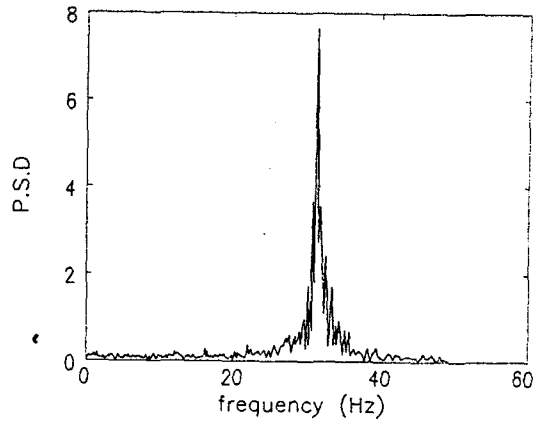


Fig.7 Frequency components of error signals

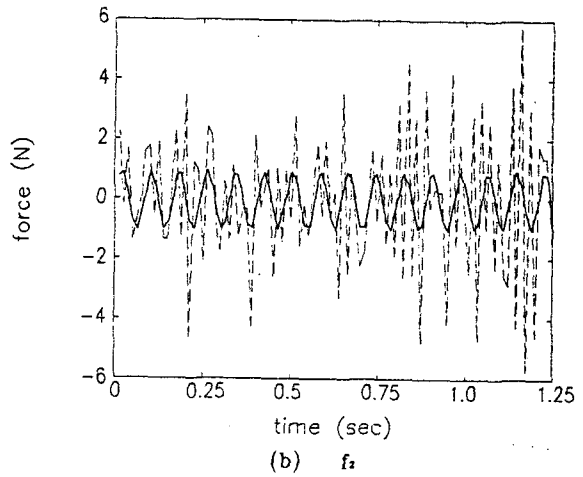
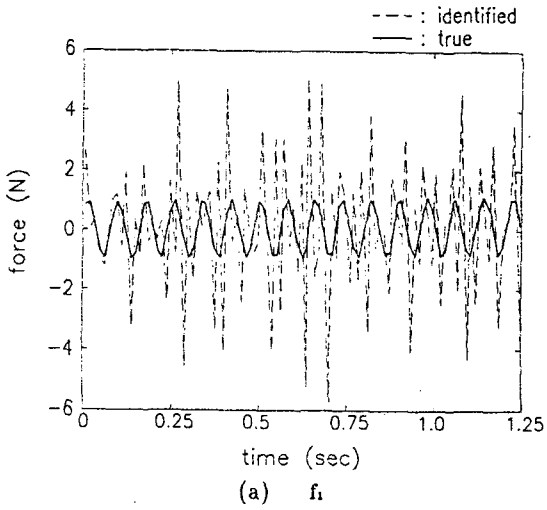


Fig.8 Comparisons of true and identified input forces.