

다 경간 압축재의 하중-진동수 관계

Load-Frequency Relationships of Continuous Compression Members

이 수 곤* 김 순 철** 임 동 혁***
Lee, Soo-Gon Kim, Soon-Chul Lim, Dong-Hyuk

ABSTRACT

The apparently different physical problems of lateral vibration and elastic stability of a linear member are limiting cases of a single phenomenon, the more general expression being the mode of vibration with end thrust. For a single-span beam-column, it is generally known that the square of the frequency of lateral vibration is approximately linearly related to compressive axial force. In this paper the relationship between the frequency and axial force of multi-span compression members is investigated by means of the finite element method.

1. 서 론

어떤 탄성 구조계(structural system)의 정적 안정(static stability)과 관련된 임계하중 P_E 와 동적 안정(dynamic stability)과 관련된 고유진동수 ω_0 는 별개의 물리현상으로 보일 수 있다. 그러나 이는 하나의 일반적 현상 즉, 일정한 크기의 정적 축 방향력과 동적 횡 하중의 조합 상태에서 하나의 극한상태로 이해할 수 있다.

등단면 또는 변단면등의 단면형태나 부재 양단의 경계조건에 관계없이 단일 선형부재의 임계하중과 고유진동수는 해석적 방법이나 수치해석법을 써서 산정할 수 있다. 또한 이런 부재에 작용하는 하중과 진동수를 제공한 것을 대체로 직선관계를 유지하는 것으로 알려졌다. 이와 같은 직선관계는 비단 선형 부재뿐 아니라 평면골조, truss등에서 성립됨이 실험적으로 해석적으로 연구를 통하여 확인되었다.

그러나 중간지점을 갖는 연속보에 축력이 가해질때 즉, 다 경간 beam-column의 임계하중이나 고유진동수 산정은 고전적 방법 - 미분방정식으로 표시되는 평형방정식 또는 에너지 원리의 이용 - 의 응용이 불가능하게 된다. 여기에서는 수치 해석법의 하나인 유한 요소법을 이용하여 먼저 다 경간 부재의 임계하중과 고유진동수를 별도로 구하기로 한다. 다음으로 부재에 작용하는 압축하중을 점차 증가시킬 때 진동수가 어떻게 변화하는가를 고찰함으로써 압축하중-진동수 관계식을 유도하기로 한다.

* 전남대학교 건축학과 교수
** 동신대학교 건축학과 부교수
*** 전남대학교 대학원 석사과정

2. 단일 압축재의 안정성 해석

아래와 같은 단일 등단면 beam-column의 정적 및 동적 안정은 다음식으로 지배된다.

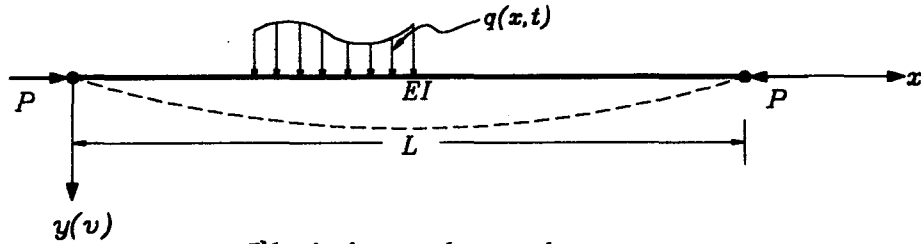


그림1. single-span beam-column

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1)$$

윗식에서 EI , P 및 ρ 는 각각 부재의 휨 강성, 축 방향력 및 단위 길이당의 밀도를 표시한다. 위의 (1)식에서 동적 거동과 관련된 $\partial^2 v / \partial t^2$ 을 무시하고 $q(x, t) = q(x)$ 로 놓으면 임계하중 P_E 를 산정할 수 있다. 비슷한 방법으로 $P = q(x, t) = 0$ 으로 놓으면 고유진동수 ω_o 를 산정할 수 있다.

정적 하중 상태 즉 $q(x, t) = q(x)$ 에서의 처짐 v_{st} 와 휨 모멘트 M_{st} 는 축방향력 P 로 인하여 다음과 같이 확대되는 것으로 알려져 있다.⁽¹⁾

$$v = v_{st} / (1 - P/P_E) \quad (2-a)$$

$$M = M_{st} / (1 - P/P_E)$$

윗식에서 임계하중 P_E 는 다음과 같은 일반식으로 표시된다.

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}, \quad (K = \text{경계조건에 따른 유효 길이 계수}) \quad (3)$$

축 방향력 P 가 $P=0$ 일때 즉 진동수 ω 를 갖은 동적 휨 하중으로 인한 보의 처짐과 휨 모멘트 역시 다음과 같이 확대된다.⁽²⁾

$$v = v_{st} / \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right\} \quad (2-b)$$

$$M = M_{st} / \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right\}$$

여기서 고유진동수 ω_o 는 다음과 같은 일반식으로 표시할 수 있다.

$$\omega_o = k \pi^2 \left(\frac{EI}{\rho L^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (k = \text{경계조건에 따른 계수}) \quad (4)$$

(2-a)과 (2-b)식에서의 두 분모(分母)는 소위 확대계수(magnification factor)로 그림.1과 같은

beam-column에서는 2개의 확대계수를 곱한 변형이나 휨 모멘트의 결과치를 가지고 단면 설계를 하게 되면 보다 안전측의 구조설계가 되겠다.

이때 beam-column에 작용시킬 수 있는 축 방향력 P 와 횡 하중 $q(x, t)$ 의 진동수 ω 는 독립적인 변수가 아니고 대체로 다음과 같은 관계식을 갖는 것으로 알려지고 있다.⁽³⁾

$$\frac{P}{P_E} + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 = 1.0 \quad (5)$$

앞에서 언급한바와 같이 관계식 (5)는 그림1과 같은 단일 압축재에서 뿐만 아니라 골조 구조물(framed structure), truss 구조물 등에도 근사적으로 성립함이 실험적으로도 확인되었다.

여기에서는 다음의 표1과 같은 연속 압축재에서 (5)식으로 주어지는 축 하중-진동수 관계가 성립하는 가?를 검토하기로 한다.

3. 연속 압축재의 고유치

다음의 표1로 주어지는 연속 압축재의 두개의 고유치 즉 탄성 임계하중 P_E 와 고유진동수 ω_o 의 산정은 평형방정식인 (1)식 또는 에너지 원리인 Ritz법을 적용해도 거의 불가능에 가깝게 된다. 따라서 이때에는 수치해석 방법에 의존할 수 밖에 없다.

수치해석법으로는 유한 요소법을 채택하기로 하는데 이때의 요소는 그림2에서와 각 절점(node)에서의 자유도가 2개인 선형요소(linear element)를 택한다.

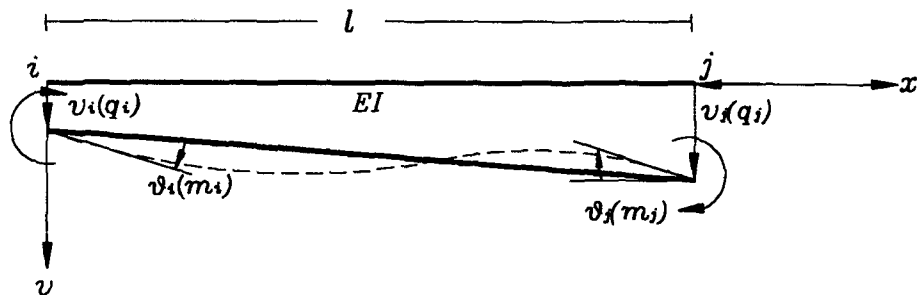


그림2. 선형 요소의 변형과 내력성분

여기에 대응하는 처짐함수 $v(x)$ 는 다음과 같은 다항식을 가정한다.

$$v(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \quad (6)$$

윗식의 미지계수 A_0, \dots, A_4 는 절점 변형성분 v_i, \dots, θ_j 로 표시할 수 있는데 그 결과는 다음과 같은 행렬형으로 표시할 수 있다.

$$v(x) = \{N\}^T \{\delta\} \quad (7)$$

윗식에서 $\{\delta\}$ 는 절점 변형 vector이고, $\{N\}$ 은 형상함수(shape function)로

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \quad (8-a)$$

이다. 단 $N_i(i=1\cdots 4)$ 는 각각 다음식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_2 &= x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_4 &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \quad (8-b)$$

순수 휨에 의한 요소의 휨 강성행렬 $[K_b]$, 일정 축 방향력 P 에 의한 기하 강성행렬(geometric stiffness matrix) $[K_g]$ 및 consistent mass matrix $[m]$ 의 유도과정은 여러 문헌⁽⁴⁾에 자세히 소개되어 있으므로 생략한다.

요소의 행렬을 조합하면 압축재 전체에 대한 $[K_b]$, $[K_g]$ 및 $[M]$ 이 얻어지고 total potential energy가 정류치(stationary value)를 갖을 조건으로 부터 다음식을 얻는다.

$$([K_b] + P[K_g] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{Q\} \quad (9)$$

위식에서 $\{\Delta\}$ 와 $\{Q\}$ 는 각각 부재의 변형 및 외력 vector이다. 또한 P 와 ω 는 부재에 작용하는 축 방향력과 등 하중의 진동수를 표시한다.

(9)식에서 $\omega=0$, $\{Q\}=\{0\}$ 으로 놓으면 임계 하중 P_E 산정을 위한 다음과 같은 고유치 방정식을 얻는다.

$$([K_b] + P[K_g])\{\Delta\} = \{0\} \quad (10-a)$$

같은 방법으로 $P=0$, $\{Q\}=\{0\}$ 으로 놓으면 고유진동수 ω_0 는 다음식으로 부터 얻을 수 있다.

$$([K_b] - \omega^2[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (10-b)$$

차원이 큰 (10-a) 또는 (10-b)식으로 부터의 고유치 산정은 computer를 이용한 반복법(iteration method)이용이 편리하다. 그러나 1차 좌굴 mode에 대응하는 최소의 임계하중 산정을 위하여는 (10-a)식을 다음과 같이 변환시켜야 한다.

$$([K_g][K_b] + (1/P)[I])\{\Delta\} = \{0\} \quad (11)$$

물론 (10-b)식으로 부터 기본 고유진동수를 산정할 때도 똑같은 방법을 이용한다. 이 같은 변환 후 반복법을 적용하여 산정한 고유치를 정리하면 다음 표1과 같다.

표1. 다 경간 압축재의 임계하중 (P_E) 및 고유진동수 (ω_o)

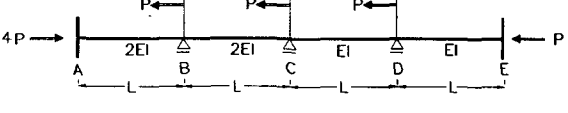
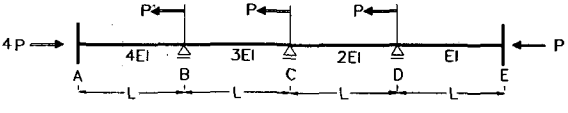
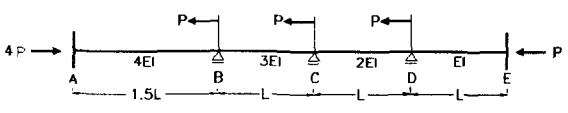
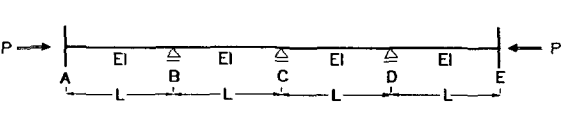
| Loading Conditions | B.C | P_E (EI/L^2) | ω_o ($(EI/\rho L^4)^{1/2}$) |
|---|----------------------------|-----------------------|---|
|  <p>CASE (I)</p> | $f_A = 0.0$ $f_E = 0.0$ | 5.6469 | 9.8696 |
| | $f_A = 0.0$ $f_E = 1.0$ | 5.7210 | 10.1390 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 0.0$ | 7.1344 | 10.5072 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 1.0$ | 7.5877 | 11.5142 |
|  <p>CASE (II)</p> | $f_A = 0.0$ $f_E = 0.0$ | 9.8698 | 9.8697 |
| | $f_A = 0.0$ $f_E = 1.0$ | 10.2131 | 10.0692 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 0.0$ | 11.2439 | 10.6586 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 1.0$ | 12.6132 | 11.4223 |
|  <p>CASE (III)</p> | $f_A = 0.0$ $f_E = 0.0$ | 5.8583 | 5.2832 |
| | $f_A = 0.0$ $f_E = 1.0$ | 5.8746 | 5.2856 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 0.0$ | 9.4843 | 7.6570 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 1.0$ | 9.7372 | 7.6695 |
|  <p>CASE (IV)</p> | $f_A = 0.0$ $f_E = 0.0$ | 9.8696 | 9.8696 |
| | $f_A = 0.0$ $f_E = 1.0$ | 10.6221 | 10.3047 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 0.0$ | 10.6221 | 10.3047 |
| | $f_A = 1.0$ $f_E = 1.0$ | 12.7801 | 11.5242 |

표1에서 f_a 는 경계조건의 표시로 $f_a(a = A \text{ or } E) = 0.0$ 은 단순지지단을, $f_a = 1.0$ 은 고정단을 뜻한다. 고유진동수 산정에서 필요한 부재의 단면적 A 는 단면 2차모멘트 I 의 1/4 승에 비례 즉, $A = k(I)^{0.25}$ 로 가정하였다.

두개의 고유치 상호간의 관계를 알아 보기 위하여 (9)식을 다음식으로 변형한다.

$$([K_b] + RP_E[K_g] - \omega^2[M])\{A\} = \{0\} \quad (12)$$

여기서 R 은 축 방향력의 비 즉,

$$R = P/P_E \quad (13)$$

로 위의 (12)식에서는 $R=0.1, 0.2, \dots, 1.0$ 으로 놓고 여기에 대응하는 진동수 ω 를 산정한다. 그 결과로부터 얻어진 축하중 P 와 진동수 ω 의 관계를 그림으로 표시하면 다음의 그림3 과 같이 된다.

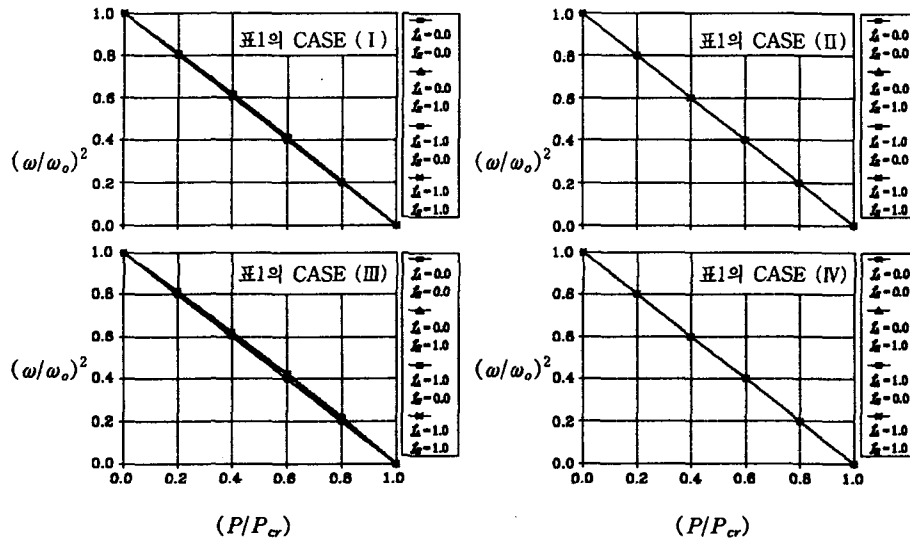


그림3. 축하중 (P) 과 진동수 (ω) 와의 관계

4. 결 론

유한 요소법을 이용한 다 경간 압축재의 축력과 진동수의 상호관계를 분석한 결과

1. 산정된 고유진동수가 정해치에 어느 정도 접근하는지는 확인할 수 없으나 임계하중은 수정 모멘트 법에 의한 정해치와 일치한다. 또한 단부 구속도가 증가함에 따라 두개의 고유치 역시 증가현상을 보인다.
2. 선형부재는 물론 골조구조물 및 평면 truss 등에서 성립하는 하중과 진동수 관계가 (5)식 즉, 선형 관계를 유지한다는 이론은 다 경간 압축재에도 똑같이 적용된다.

참고문헌

- (1) 李 守 坤 “構造物の 安定理論” (1995, 全南大學校 出版部)
- (2) M. Paz “Structural Dynamics” (1985, V.N.R Co.)
- (3) 金 淳 哲 “構造物の 靜的安定과 固有 振動數와의 關係” (1991, 全南大學校 大學院)
“Journal of Applied mechanics” (JUNE,1952, ASME)
“Frequency-Dependent Matrices for Tapered Beams” (JANUARY,1986, ASCE)
- (4) A. Chajes “Principles of structural stability theory” (1974, Prentice-Hall International, INC.,)