

Lanczos 방법에 의한 비비례 감쇠 시스템의 고유치 해석

Solution of Eigenproblems for Non-proportional Damping Systems by Lanczos Method

김만철* · 정형조* · 오주원** · 이인원***

Kim, Man-Cheol · Jung, Hyung-Jo · Oh, Ju-Won · Lee, In-Won

ABSTRACT

A solution method is presented to solve the eigenproblem arising in the dynamic analysis of non-proportional damping systems with symmetric matrices. The method is based on the use of Lanczos method to generate a Krylov subspace of trial vectors, which is then used to reduce a large eigenvalue problem to a much smaller one. The method retains the n order quadratic eigenproblem, without the need to use the method of matrix augmentation traditionally used to cast the problem as a linear eigenproblem of order $2n$. In the process, the method preserves the sparseness and symmetry of the system matrices and does not invoke complex arithmetics, therefore, making it very economical for use in solving large problems. Numerical results are presented to demonstrate the efficiency and accuracy of the method.

1. 서 론

구조물의 동적 거동을 모드중첩법으로 해석하거나, 동조 진동수를 구하기 위해서는 고유치 문제의 해석을 선행해야 한다. 대부분 구조물들의 감쇠 행렬은 결합의 효과가 큰 비비례 감쇠(Caughey 등, 1965)인데도 불구하고, 지금까지의 구조 모델에서는 감쇠 효과를 구조물의 지배방정식에 정확히 묘사할 수 없었기 때문에 비례 감쇠 또는 모드 감쇠로 이의 효과를 고려하였다. 그러나 지반-구조물 상호작용 시스템, 제진 구조물 또는 합성재료로 이루어진 구조물 등과 같이 감쇠 행렬을 좀 더 실질적으로 구성할 수 있는 경우에는 정확한 동특성을 구하기 위해서는 비비례 감쇠 행렬을 고려하는 2차 고유치 문제를 해석해야 한다. 이러한 비비례 감쇠 시스템에 대한 고유치와 고유벡터는 감쇠의 정도에 따라 일반적으로 공액 복소수 짝 또는 실수 짝으로 존재한다. 즉, 비례 감쇠 시스템과는 달리 복소영역에서 해석해야 하기 때문에 2차 고유치 문제에 대한 효율적인 해법의 개발은 매우 중요하다.

* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
** 한남대학교 토목환경공학과 교수
*** 한국과학기술원 토목공학과 교수

Lanczos 방법은 차수가 큰 고유치 문제를 Rayleigh-Ritz 개념을 이용하여 적은 차수를 갖는 삼대각 행렬로 변환함으로써 시스템의 고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 구하는 방법이다. 시스템의 고유벡터들은 Lanczos 알고리즘에서 구해진 Lanczos 벡터들의 선형조합으로 매우 정확하게 근사화 된다. 이 방법은 Lanczos(1950)에 의해 처음으로 개발되었다. 지난 20여년간 Lanczos 방법의 안정성을 저해하는 요소를 해결하기 위하여 많은 연구가 수행되어 왔고, 그 결과 이 방법은 시스템 행렬들이 대칭이고 차수가 매우 큰 비례 감쇠 시스템에 대응하는 고유치 문제에 소수의 저차 고유값을 구하는 데 폭 넓게 사용되고 있다.

최근에 많은 연구들이 Lanczos 방법을 이용하여 비비례 감쇠를 갖는 시스템의 2차 고유치 문제를 해석하는 데 적용하기 위해 수행되고 있다. Chen 등(1988)은 비감쇠 시스템의 선형화된 고유치 문제에 대한 Lanczos 방법을 제안하였다. Rajakumar(1993)는 비대칭 행렬을 갖는 시스템의 2차 고유치 문제를 차수 $2n$ 을 갖는 행렬식으로 증분하지 않고 Lanczos 알고리즘에 2차 고유치 문제를 직접적으로 적용하는 방법을 개발하였다. 이 방법은 시스템 행렬이 비대칭이고 차수 n 인 2차인 고유치 문제에 대해 two-sided Lanczos 벡터들을 구성하여 고유값을 구하는 방법이다.

대칭 행렬들을 갖는 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제는 Rajakumar가 지적한 것처럼 one-sided Lanczos 벡터를 이용하여 시스템의 고유치와 고유벡터를 구할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 비대칭 행렬에 대한 two-sided Lanczos 방법을 변형하여 대칭 행렬을 갖는 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제를 차수 n 에서 직접 해석할 수 있는 one-sided Lanczos 방법을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 Lanczos 알고리즘은 실수 영역에서 모든 Lanczos 벡터를 구할 수 있다.

2. One-sided Lanczos 알고리즘

동하중을 받는 시스템의 동적 거동이나 동특성을 해석하기 위한 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\lambda_j^2 M \phi_j + \lambda_j C \phi_j + K \phi_j = 0 \quad (1)$$

여기서 M , C 와 K 는 차수가 n 이고 대칭인 질량, 감쇠 및 강성 행렬이다. 일반적으로 M 은 양에 반한정 행렬이고 K 은 양에 한정 행렬이다. C 는 다음과 같은 조건을 만족하는 비비례 감쇠 행렬이다.

$$CM^{-1}K \neq KM^{-1}C \quad (2)$$

식(1)에서 λ_j 는 시스템의 j 번째 고유치이고 ϕ_j 는 이에 대응하는 고유벡터이다. 이들 λ_j 와 ϕ_j 들은 감쇠의 정도에 따라 복소값 또는 실수값을 갖는다. ϕ_j 는 다음과 같은 직교성을 만족한다.

$$\phi_j^T M \tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_j^T M \phi_i + \phi_j^T C \phi_i = \delta_{ij} \quad (3)$$

여기서
$$\tilde{\phi}_j = \lambda_j \phi_j \quad (4)$$

이다. ϕ_j 와 $\tilde{\phi}_j$ 는 각각 독립·종속 고유벡터이다. δ_{ij} 는 $i \neq j$ 면 0이고 $i = j$ 면 1의 값을 갖는다.

Lanczos 방법은 시스템 행렬 M , C , K 와 두개의 임의의 벡터 (\hat{v}_1 , \hat{p}_1)가 주어졌을 때 Krylov sequence을 이용한 Rayleigh-Ritz 방법과 유사하다. 독립 고유벡터 ϕ_j 와 종속 고유벡터 $\tilde{\phi}_j$ 에 대한 Krylov sequence는 다음과 같다.

$$\{ \hat{v}_1, \hat{v}_2 = -K^{-1}(C \hat{v}_1 + M \hat{p}_1), \hat{v}_3 = -K^{-1}(C \hat{v}_2 + M \hat{p}_2), \dots \} \quad (5)$$

$$\{ \hat{p}_1, \hat{p}_2 = \hat{v}_1, \hat{p}_3 = \hat{v}_2, \dots \} \quad (6)$$

식(5)과 (6)에서 정의된 Krylov sequence를 이용하여 초기 벡터부터 m 개의 독립 Lanczos 벡터들 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 과 종속 Lanczos 벡터들 $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 을 구하였고, $m+1$ 번째의 독립·종속 Lanczos 벡터를 구한다고 가정하자. 독립 Lanczos 벡터 v_{m+1} 과 종속 Lanczos 벡터 p_{m+1} 을 얻기 위해서 다음과 같이 Krylov sequence에서 \hat{v}_{m+1} 과 \hat{p}_{m+1} 을 계산한다.

$$\hat{v}_{m+1} = -K^{-1}(C v_m + M p_m) \quad (7)$$

$$\hat{p}_{m+1} = v_m \quad (8)$$

일반적으로 이들 벡터들은 기존 모든 Lanczos 벡터들과 $m+1$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터의 성분만을 가지고 있는 벡터의 선형조합으로 표현할 수 있다.

$$\hat{v}_{m+1} = \bar{v}_{m+1} + \alpha_m v_m + \beta_m v_{m-1} + \epsilon_m v_{m-2} + \dots \quad (9)$$

$$\hat{p}_{m+1} = \bar{p}_{m+1} + \alpha_m p_m + \beta_m p_{m-1} + \epsilon_m p_{m-2} + \dots \quad (10)$$

여기서
$$\bar{v}_{m+1} = \gamma_{m+1} v_{m+1} \quad (11)$$

$$\bar{p}_{m+1} = \gamma_{m+1} p_{m+1} \quad (12)$$

이다. 즉, \bar{v}_{m+1} 와 \bar{p}_{m+1} 은 각각 $m+1$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터의 성분만을 가지고 있는 벡터들이고 계수 α_m , β_m 와 ϵ_m 등은 \hat{v}_{m+1} 와 \hat{p}_{m+1} 의 기존 Lanczos 벡터 방향에 대한 성분의 크기를 의미한다. 계수 γ_{m+1} 은 \bar{v}_{m+1} 와 \bar{p}_{m+1} 의 의사길이를 이값은 1 또는 -1로 정규화 하면 $m+1$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터 v_{m+1} 와 p_{m+1} 을 구할 수 있다. $m+1$ 번째 독립·종속 Lanczos 벡터 v_{m+1} 와

p_{m+1} 은 다음과 같은 직교조건을 만족한다.

$$v_i^T M p_{m+1} + p_i^T M v_{m+1} + v_i^T C v_{m+1} = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, m \quad (13)$$

$$v_{m+1}^T M p_{m+1} + p_{m+1}^T M v_{m+1} + v_{m+1}^T C v_{m+1} = \delta_{m+1} \quad (14)$$

여기서 $\delta_{m+1} = \text{sign}(\bar{v}_{m+1}^T M \bar{p}_{m+1} + \bar{p}_{m+1}^T M \bar{v}_{m+1} + \bar{v}_{m+1}^T C \bar{v}_{m+1})$ 으로 1 또는 -1의 값이다.

이들 계수들은 독립·중속 Lanczos 벡터사이의 직교성을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 계수 α_m 를 구하기 위해서 식(9)와 (10)에 각각 $(p_m^T M + v_m^T C)$ 와 $v_m^T M$ 을 전-곱을 하고 두 결과식을 더한다. 그리고 독립·중속 Lanczos 벡터들 사이의 직교성에 관한 식(13)과 (14)를 이용하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_m = (v_m^T M \hat{p}_{m+1} + p_m^T M \hat{v}_{m+1} + v_m^T C \hat{v}_{m+1}) \delta_m \quad (15)$$

식(15)의 \hat{v}_{m+1} 와 \hat{p}_{m+1} 에 대해 식(7)과 (8)을 대입하고 정리하면 α_m 에 관한 식은 다음과 같다.

$$\alpha_m = [- (p_m^T M + v_m^T C) K^{-1} (C v_m + M p_m) + v_m^T M v_m] \delta_m \quad (16)$$

β_m 를 계산하기 위해서는 식(9)와 (10)에 $(p_{m-1}^T M + v_{m-1}^T C)$ 과 $v_{m-1}^T M$ 을 전-곱하고 두 결과식을 더한다. 결과식에 직교조건 식(13)과 (14)을 적용하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\beta_m = (v_{m-1}^T M \hat{p}_{m+1} + p_{m-1}^T M \hat{v}_{m+1} + v_{m-1}^T C \hat{v}_{m+1}) \delta_{m-1} \quad (17)$$

식(17)의 \hat{v}_{m+1} 와 \hat{p}_{m+1} 에 대해 식(7)과 (8)을 대입하면 β_m 은 다음과 같다.

$$\beta_m = [- (p_{m-1}^T M + v_{m-1}^T C) K^{-1} (C v_m + M p_m) + v_{m-1}^T M v_m] \delta_{m-1} \quad (18)$$

$-K^{-1}(C v_{m-1} + M p_{m-1})$ 과 v_{m-1} 에 대한 식(7)과 (8)을 식(18)에 적용하면 식(19)를 얻을 수 있다.

$$\beta_m = [\hat{v}_m^T M p_m + \hat{p}_m^T M v_m + \hat{v}_m^T C v_m] \delta_{m-1} \quad (19)$$

\hat{v}_m 과 \hat{p}_m 에 관한 식(9)와 (10)을 식(19)에 대입하고, Lanczos 벡터들의 직교성을 이용하면 식(19)는 식(20)와 같이 간략화 된다.

$$\beta_m = [\bar{v}_m^T M p_m + \bar{p}_m^T M v_m + \bar{v}_m^T C v_m] \delta_{m-1} \quad (20)$$

식(20)을 $(m+1)$ 번째 벡터에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\beta_{m+1} = [\bar{v}_{m+1}^T M p_{m+1} + \bar{p}_{m+1}^T M v_{m+1} + \bar{v}_{m+1}^T C v_{m+1}] \delta_m \quad (21)$$

v_{m+1} 와 p_{m+1} 은 \bar{v}_{m+1} 과 \bar{p}_{m+1} 은 Lanczos 벡터들의 직교성에 관한 식(14)를 만족하도록 식(11)과 (12)와 같이 정규화된 것이므로 이들 식들을 역-치환하면 식(22)를 얻을 수 있다.

$$\Delta_{m+1} = [\bar{v}_{m+1}^T M \bar{p}_{m+1} + \bar{p}_{m+1}^T M \bar{v}_{m+1} + \bar{v}_{m+1}^T C \bar{v}_{m+1}] \delta_m \quad (22)$$

여기서
$$\Delta_{m+1} = \beta_{m+1} \gamma_{m+1} \quad (23)$$

이다. γ_{m+1} 과 β_{m+1} 을 다음과 같이 설정하면 이들 계수들은 실수이고, 그러므로 독립·중속 Lanczos 벡터들도 실수 영역에서 계산할 수 있다.

$$\gamma_{m+1} = |\Delta_{m+1}|^{1/2} \quad (24)$$

$$\delta_{m+1} = \text{sign}(\Delta_{m+1}) \quad (25)$$

$$\beta_{m+1} = |\Delta_{m+1}|^{1/2} \delta_{m+1} \quad (26)$$

식(9)와 (10)에 $(p_{m-2}^T M + v_{m-2}^T C)$ 과 $v_{m-2}^T M$ 를 전-곱을 하고 두 결과식을 덧셈한다. 그리고 β_m 을 구하기 위한 전개과정을 되풀이하면 ϵ_m 이하의 계수들에 대한 관계 식을 얻을 수 있고 이들은 0의 값을 갖는다. 따라서 식(9)과 (10)은 다음과 같이 세계의 항만을 갖는 Lanczos 순환 식으로 표현 할 수 있다.

$$\bar{v}_{m+1} = \hat{v}_{m+1} - \alpha_m v_m - \beta_m v_{m-1} \quad (27)$$

$$\bar{p}_{m+1} = \hat{p}_{m+1} - \alpha_m p_m - \beta_m p_{m-1} \quad (28)$$

비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제 식(1)을 재정리 하면 식(29)와 (30)과 같다.

$$K \phi_j = -\lambda_j (C \phi_j + M \tilde{\phi}_j) \quad (29)$$

$$\tilde{\phi}_j = \lambda_j \phi_j \quad (30)$$

m 번 반복과정을 수행하여 계산한 m 개의 독립·중속 Lanczos 벡터로 이루어진 집합을 각각 $V = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ 과 $P = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ 라 하면, 독립·중속 벡터들을 Lanczos 벡터들이 스캔하는 부분공간으로 다음과 같이 투영시킬 수 있다.

$$\phi_j = V \psi_j \quad (31)$$

$$\tilde{\phi}_j = P\phi_j \quad (32)$$

식(31)과 (32)를 식(29)와 (30)에 대입하고, $(V^TC + P^TM)K^{-1}$ 과 V^TM 을 전-곱하고 두식을 더하고 정리하면 다음과 같이 3대각 행렬을 갖는 차수가 m 으로 감소된 표준 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\Delta\phi_j = -\lambda_j\Delta T\phi_j \quad (33)$$

또는
$$T\phi_j = \theta_j\phi_j \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= V^TMP + P^TMV + V^TCV \\ &= \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$T = -(V^TC + P^TM)K^{-1}(CV + MP) + V^TMV \quad (36)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & & \\ & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & & \\ & & \gamma_4 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \beta_m & \\ & & & & \gamma_m & \alpha_m & \end{bmatrix}$$

$$\theta_j = \frac{1}{\lambda_j} \quad (37)$$

차수가 감소된 고유치 문제는 QR 방법(Moler 등, 1973)에 의하여 효율적으로 해석할 수 있다. QR 방법에 의해서 구해진 결과들은 식(31), (32)와 (37)의 관계를 이용하여 2차 고유치 문제의 고유치와 이에 대응하는 독립·중속 고유벡터를 얻을 수 있다.

3. 수치해석

제안방법이 효율성을 증명하기 위해 2층과 3층에 집중 감쇠기가 설치된 3차원 뼈대 구조물을 해석하였다. 감쇠기가 설치된 뼈대구조물은 제진 시스템의 전형적인 예이다. 3차원 뼈대 구조물의 기하학적인 형상은 그림 1과 같다. M 은 일관질량행렬이고 C 는 Rayleigh-Ray 감쇠 계수 $\alpha = -0.92$ 와 $\beta = 0.1016$ 값과 집중감쇠기의 감쇠값 1,000을 고려하여 모델링 하였다. 전체 구조물은 1,008의 자유도를 갖는다.

감쇠 시스템에 대해 차수가 10, 20, ..., 100인 10개의 감소 고유치 문제를 구성하였고 IMSL Library의 QR 방법(Moler 등, 1973)을 이용하여 이를 해석하였다. 표 1에 3가지 방법에 대한 해석시간을 비교하였다. 사용된 Lanczos 벡터의 수에 대한 오차정규 10^{-6} 이하를 만족하는 Ritz 짝의 수를 그림 2에 정리하였다. 그림

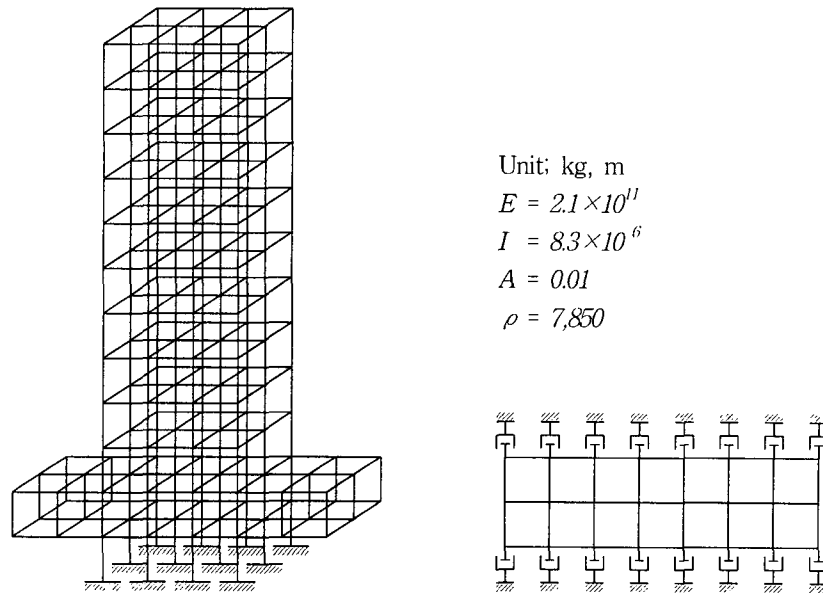


Fig. 1. (a) Three dimensional frame structure (b) damping from two-layer foundation

2에서 초기 부분의 기울기는 약 1/3이다. 즉 6개의 Lanczos 벡터를 이용하면 한쌍의 정확한 공액 복소 고유치와 고유벡터를 구할 수 있다. 이것은 저차 고유치들은 다른 고유치들에 비해 적은 노력으로도 쉽게 구할 수 있다는 것이다. 그림 3은 Lanczos 벡터 수를 증가하였을 때 저차 10개의 Ritz 짝의 오차정규의 변화를 나타낸 것이다. Lanczos 벡터가 증가함에 따라 저차 고유치의 오차가 급격히 감소하였다.

Table 1. CPU time spent in solution of three dimensional frame structure(in seconds)

벡터수	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
제안방법	34.06	65.76	99.70	136.03	173.10	212.97	257.97	310.20	363.54	422.21
(ratio)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)	(1.00)
Chen 방법	189.18	376.79	569.15	768.68	972.44	1161.09	1395.08	1589.98	1824.10	2060.47
(ratio)	(5.55)	(5.73)	(5.71)	(5.65)	(5.62)	(5.45)	(5.41)	(5.13)	(5.02)	(4.88)
Rajakumar 방법	48.42	94.99	144.58	197.09	268.01	322.99	388.92	455.56	525.63	604.98
(ratio)	(1.42)	(1.44)	(1.45)	(1.45)	(1.55)	(1.52)	(1.51)	(1.47)	(1.45)	(1.43)

4. 결 론

시스템 행렬들이 대칭인 비비례 감쇠 시스템의 2차 고유치 문제를 해석할 수 있는 Lanczos 방법을 제안하였다. 제안방법은 2차 고유치 문제를 차수 $2n$ 으로 선형 증분하지 않고 차수 n 에서 해석할 수 있는 방법이 기 때문에 대형 구조물의 고유치 문제를 보다 쉽게 해석할 수 있다. 또한 알고리즘은 시스템 행렬들의 대칭성과 분산성의 장점을 취할 수 있고, 독립·중속 Lanczos 벡터를 구성하여 2차 고유치 문제를 삼대각 행렬을 갖는 표준 고유치 문제로 감소시킬 때까지 복소 연산을 필요로 하지 않는다. 이것은 제안 방법이 다른 방법에 비해 경제적이고 효율적임을 의미한다. 제안방법의 효율성을 예제 구조물의 해석을 통해 증명하였다. 제안방법은 구하고자 하는 고유값의 약 3배의 독립·중속 Lanczos 벡터를 이용하면 오차정규 10^{-6} 을 만족하는 결과들을 얻을 수 있다.

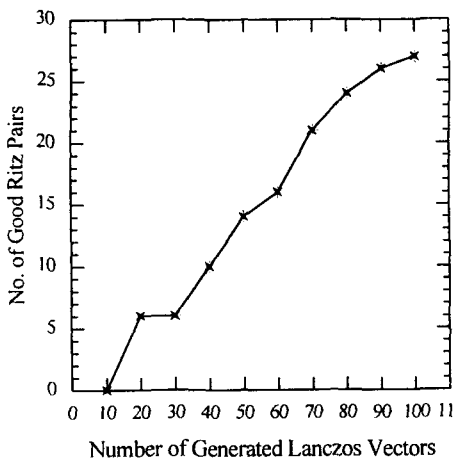


Fig. 2. Number of good Ritz pairs of frame structure

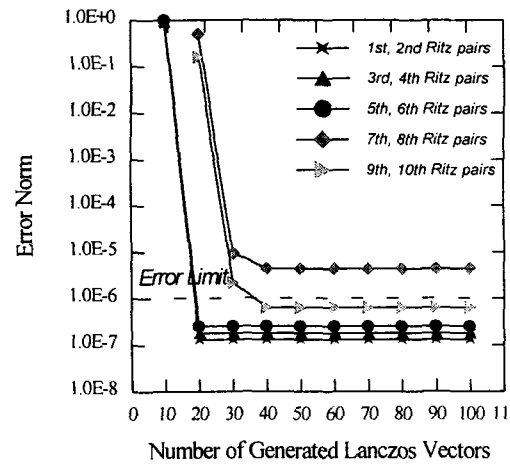


Fig. 3. Variation of error norms of first ten Ritz pairs of frame structure

참고문헌

1. Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. (1965). "Classical normal modes in damped linear dynamic systems." *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 583-588.
2. Chen, H.C. and Taylor, R.L. (1988). "Solution of eigenproblems for damped structural systems by Lanczos algorithm." *Comput. Struct.*, Vol. 30, No. 1/2, pp. 151-161.
3. Moler, C.B. and Stewart, G.W. (1973). "An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems." *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 10, pp. 241-256.
4. Rajakumar, C. (1993). "Lanczos algorithm for the quadratic eigenvalue problem in engineering applications." *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 105, pp. 1-22.