

막 구조물에 관한 형상 탐색과 재단도 결정법

A Shape Finding and Cutting Pattern Determination for Membrane Structures

최 호¹⁾ 이 장 복²⁾ 김 재 열³⁾ 서 삼 열⁴⁾ 권 택 진⁵⁾
Choi, Ho Lee, Jang-Bog Kim, Jae-Yeol Sur, Sam-Uel Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

The object of this study is shape finding and cutting pattern generation of membrane structures under the following assumptions : (1) material is linearly elastic (2) stress state is plane stress.

Cable and membrane structures should introduce the nonlinear analysis considering geometric nonlinearity because these structures deform largely under the external loads. The analysis procedure is consisted of three steps considering geometric nonlinearity unlike any other structures. First step is the shape finding analysis to determine the initial equilibrium shape. Second step is the stress-deformation analysis to investigate the behaviors of structures under various external loads. Once a satisfactory shape has been found, a cutting pattern based on the shape finding analysis may be generated from the view point of construction.

In this paper, (1) shape finding analysis formulation and an example, (2) cutting pattern determination procedure using weighted least-square minimization flattening method and some results are presented.

1. 서 론

대공간 구조물 중에서도 연성구조의 일종인 막구조, 케이블 구조물은 곡률을 이용하여 면내력만으로 외부 하중에 저항하는 형태 저항형 구조물로서 경제적으로 대공간을 만들 수 있는 장점이 있다. 또한 주로 사용되는 재료의 연성 특성상 초기장성을 갖기 전에는 불안정한 상태를 나타내지만, 초기장력의 도입과 함께 안정상태가 된다.

형상해석은 일반적으로 복잡한 3차원 곡면으로 이루어진 등장력 평형형상을 구하는 것으로서 일반 구조물의 구조설계 해석과 다르다. 즉 유한요소 모델에 기초를 두고 평평하게 펼쳐진 상태에서 요소분할을 하고 초기장력을 도입한 후 목적형상을 찾기 위한 해석과정을 막구조물 특유의 형상해석이라 한다. 초기 평형형상이 결정된 후에 일반 구조해석과 같이 다양한 외력이 작용하였을 때 막과 케이블의 변형, 응력 분포 등을 파악하는 응력-변형해석을 수행하게 된다.¹⁾

해석적 관점에서, 막구조물은 압축과 휨강성이 적은 구조재료를 사용함으로써 대변형 거동을 하기 때문에 해석과정에서는 대변형을 고려한 기하학적 비선형 해석을 해야하며 다음과 같은 가정을 도입한다.

- 1) 성균관대학교 건축공학과, 석사과정
- 2) 정희원, 삼성물산(주) 건설부문 기술연구소, 전임연구원
- 3) 성균관대학교 과학기술연구소 특별연구원, 공학박사
- 4) 정희원, 대림전문대학 건축설비과 조교수, 공학박사
- 5) 정희원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사

- 1) 재료는 선형탄성, 등질·등방성이다.
- 2) 응력상태는 평면응력으로 한다.

시공적 관점에서, 형상해석이 완료되고 응력-변형 해석을 하기 전 형상해석에서 얻어진 복잡한 3차원 형상을 2차원 막재단도로 만들어야 한다. 이러한 재단도의 중요성은 형상해석에서 얻어진 초기장력의 분포와 실제 시공시 도입된 장력의 상태가 근접하도록 하여 응력-변형 해석이 합리적인 해석결과가 되도록 하는데 있다.

본 연구는 막구조물의 등장력 평형상태에 관한 형상해석과 시공시 이론과 근접한 형상을 실현하는데 필요한 재단도를 구하는데 그 목적이 있다.

2. 형상해석

형상해석은 처음 평면상에 요소분할을 하고 초기 응력을 도입한 다음 등장력 곡면을 구하는 문제로서 구조물의 크기, 곡률, 재료 강성 등에 따라 크게 변하게 된다. 따라서 적절한 재료상수의 결정과 초기응력의 크기 등이 중요한 변수가 되며, 형상해석방법에 따라 설계에서 의도한 목적형상과는 크게 다를 수 있기 때문에 반복적인 경험이 요구된다.

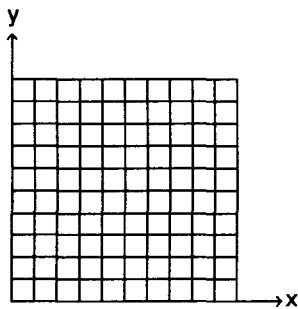


그림 1. 평면 분할 예¹⁾

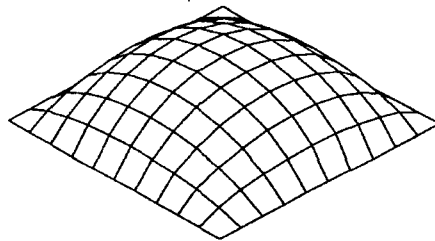


그림 2. 형상 해석 결과 예¹⁾

본 연구에서는 몇 가지 수치해석 방법 중 초기 평형형상을 결정하기 위한 방법으로 유한요소법을 이용하고 비선형 해석에 따른 오차를 최소화하기 위해 Newton-Raphson 반복법을 사용하였다. 또한 경우에 따라 재료의 강성이 없는 완전한 등장력 곡면의 해석이 불가능할 경우 재료의 강성을 약간 도입하는 방법을 이용하여 목적형상에 근접한 평형형상을 찾는 방법을 적용하였다.^{1),2),3)}

2.1. 케이블 요소의 정식화

케이블 구조물에서 케이블 요소의 변형은 미소하다고 고려될 수 있으나 회전의 효과는 무시될 수 없다. 따라서 이런 구조물은 미소변형, 유한회전의 문제로 정의할 수 있다. 따라서 국소좌표계에서의 케이블 부재의 변형도-변위 관계식은 2차항까지를 고려한 식(1)과 같이 된다.

$$\epsilon_a = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (1)$$

연속변위 함수 u, v 를 x 의 선형함수로 정의하여 변형도를 절점변위로 표현하면 식(2)와 같이 된다.

$$\epsilon_a = \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2 \quad (2)$$

ϵ_0 를 초기상태에서의 균등한 변형도로, ϵ_a 를 최종상태에서의 추가적인 변형도로 정의하고, 선형의 응력도-변형도 관계식을 대입하면 케이블 요소의 변형도 에너지 U는 식(3)과 같이 된다.

$$U = EA \int_0^L \frac{1}{2} \epsilon_a^2 dx + EA \int_0^L \epsilon_0 \epsilon_a dx \quad (3)$$

여기서, E : 탄성계수, A : 단면적

부재의 초기력 F_0 는 $F_0 = A E \epsilon_0 = A \sigma_0$ 인 관계를 이용하고, 식(2)를 식(3)에 대입하여 적분한 후 매트릭스 형태로 나타내면 식(4)와 같이 된다.

$$U = \frac{1}{2} [u_1 \ u_2] [k_E] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [v_1 \ v_2] [k_G] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

따라서,

$$[k] = [k_E] + [k_G] \quad (5)$$

여기서, $[k_E]$: 탄성 강성 매트릭스

$[k_G]$: 기하 강성 매트릭스

2.2. 막 요소의 정식화

막은 일반화된 평면응력 상태에 있다고 가정하고 변형도-변위 관계식은 각 유한요소에서 국소좌표계에 대한 연속변위 성분을 1개의 다항함수로 가정하면 식(6)과 같이 단순화된다.

$$\{\epsilon\} = [A] \{u\} \quad (6)$$

여기서, $\{u\}$: 국소좌표계에서의 절점변위 벡터

$\{\epsilon\}$: 변형도 벡터

$[A]$: 변형도와 변위에 관계된 계수 매트릭스

국소좌표계에서의 기하학적 강성매트릭스는 식(7)과 같이 쓸 수 있다.

$$[k_G] = [\{k_{G1}\} \{k_{G2}\} \cdots \{k_{Gn}\}] \quad (7)$$

$$\{k_{Gi}\} = [\partial[T]^T / \partial U_i] \{f\} \quad (8)$$

여기서, $[T]$ 는 변위변환 매트릭스, U_i 는 전체좌표계에서의 변위, $\{f\}$ 는 요소 절점력 벡터를 나타낸다.

식(8)에 정의된 변위변환 매트릭스 [T]를 구하기 위해 그림과 같이 막 요소의 기본 벡터와 기본량을 정의한다.

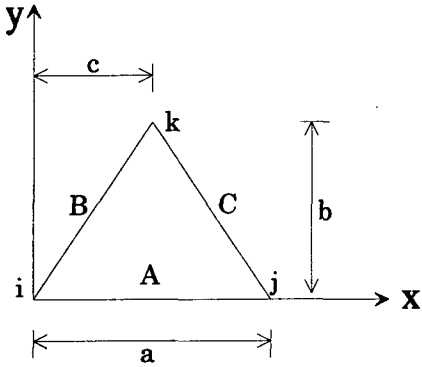


그림 3. 삼각형 요소의 기본벡터(A,B,C)와 기본량(a,b,c)

$$\begin{aligned} a &= P \\ b &= (R + S + T)/P \\ c &= \sqrt{\{(PQ)^2 - (P + S + T)^2\}/P^2} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \\ Q &= \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2} \\ R &= (X_3 - X_1)(X_2 - X_1) \\ S &= (Y_3 - Y_1)(Y_2 - Y_1) \\ T &= (Z_3 - Z_1)(Z_2 - Z_1) \end{aligned} \quad (10)$$

막요소의 전체 강성매트릭스는 식(11)과 같다.

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (11)$$

여기서, $[K_E]$: 탄성 강성 매트릭스

$[K_G]$: 기하 강성 매트릭스

3. 재단 패턴 분할(Cutting Pattern Generation)

형상해석에서 구한 초기평형 상태의 구조물은 일반적으로 등장력 곡면이 되나 2차원으로 전개할 수 없는 3차원 형상이기 때문에 다음과 같은 방법을 통하여 재단도를 구해야 한다.

- (1) 실제 생산되는 막재의 최대폭을 고려하여 공간상에서 몇 개의 큰 조각으로 분할한다.
- (2) 각각의 막요소에 대한 3차원 데이터를 2차원의 평면형상으로 바꾼다.

공간상에서 재단도 분할은 제한된 막 재료폭 때문에 천 폭당 하나의 요소 배치를 사용해야 한다. 이것은 이중곡면으로 이루어진 막의 형상을 정확하게 묘사하고 알맞은 재단도 데이터를 만들기 위해서 천이 몇 개의 요소 조각으로 구성되어야 함을 뜻한다. 3차원 곡면을 2차원 바닥에 평평하게 펼치기 위하여 길이의 변화가 최소화되어야 한다는 경계조건을 이용한 최소자승법을 사용한다.⁴⁾

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \phi_i^2(x) \quad (12)$$

여기서, m : 한 조각에 있는 요소의 수, x : 평면 막의 좌표 벡터

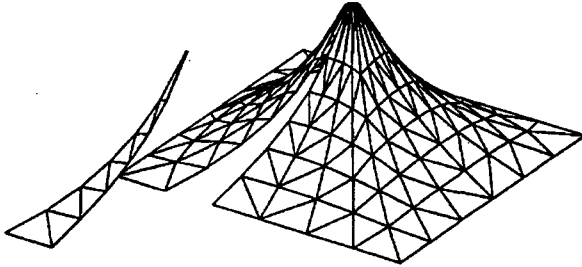


그림 4. 막 추출의 예¹⁾

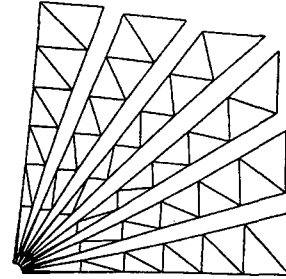


그림 5. 재단도 예¹⁾

$$\phi_i(x) = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,2})^2 + (y_{i,1} - y_{i,2})^2} - d_i \quad (13)$$

여기서, $(x_{i,1}, y_{i,1}), (x_{i,2}, y_{i,2})$: i 번째 요소에 대한 평면에서의 미지 좌표

$$d_i = \sqrt{(X_{i,1} - X_{i,2})^2 + (Y_{i,1} - Y_{i,2})^2 + (Z_{i,1} - Z_{i,2})^2} \quad (14)$$

여기서, d_i : 형상 탐색 과정에서 결정된 삼차원 절점좌표 $(X_{i,1}, Y_{i,1}, Z_{i,1})$ 와 $(X_{i,2}, Y_{i,2}, Z_{i,2})$ 를 가진 i 번째 요소의 실제 길이

막재료 조각이 바닥에 평평하게 펼쳐진 후에도 인접 조각과의 적합성을 유지하기 위하여, 모든 접합부 경계 길이는 변하지 않는다는 경계조건을 이용한다.

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \phi_i^2(x) \quad (15)$$

여기서, $\omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 다른 요소의 '가중치'를 결정하는 인자

ϕ_i 가 2차 함수이므로 수치계산을 수행하기 위하여 ϕ_i 를 선형화 한다. 초기값 x_0 를 가정하여, 근사해에 대해서 Taylor series로 ϕ_i 를 전개하고 선형항만 취하면 식(16)을 얻을 수 있다.

$$\phi_i(x) = \phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x_0)(x - x_0) \quad (16)$$

식(15)에 식(16)을 대입하면 식(17)과 같다.

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \left[\phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x_0)(x - x_0) \right]^2 \quad (17)$$

x 에 관한 식(17)의 최소값에 대한 필요조건은 식(18)과 같다.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^m \omega_i \left[\phi_i(x_0) + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x_0)(x - x_0) \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x_0) = 0 \quad (18)$$

그러므로, 최소자승법에 의해 구해진 (18)식을 매트릭스 형태로 표현하면 식(19)와 같이 선형방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \quad (19)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_m]_{x_0}^T, \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

식(19)는 유한 요소 방정식과 비슷하게 식(20)의 형태로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{R} \quad (20)$$

여기서,

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \quad (21)$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{C} \quad (22)$$

하나의 요소는 트러스 요소와 비슷하며 아래와 같이 각 요소를 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= [\partial \phi_i / \partial x_{i,1} \quad \partial \phi_i / \partial y_{i,1} \quad \partial \phi_i / \partial x_{i,2} \quad \partial \phi_i / \partial y_{i,2}] \\ &= [(x_{i,1} - x_{i,2})/l \quad (y_{i,1} - y_{i,2})/l \quad (z_{i,2} - x_{i,1})/l \quad (y_{i,2} - y_{i,1})/l] \end{aligned}$$

$$l = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,2})^2 + (y_{i,1} - y_{i,2})^2}$$

$$\mathbf{K}_i = \omega_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_i = -\omega_i \phi_i \mathbf{A}_i^T$$

여기서 전체 매트릭스 \mathbf{K} 와 \mathbf{R} 은 모든 요소매트릭스를 조합함으로써 얻을 수 있다. 이때 반복법이 식 (20)의 수렴해를 얻기 위하여 적용된다. 반복법에 관한 과정을 살펴보면 다음과 같다.

- (1) 긴 막 재료 조각을 X-Y 평면 위에 투영시킨 초기해 x_0 가정
- (2) \mathbf{K} , \mathbf{R} 을 구하고 Δx 를 계산
- (3) $x_1 = x_0 + \Delta x$
- (4) 최적해 x_1 사용. $\frac{|\Delta x|^2}{|x|^2} \leq \epsilon$ 일 때까지 (2), (3) 단계 반복 ($\epsilon = 10^{-6}$)

3.1. 평면 좌표 결정 예

형상해석을 수행한 후 최소 자승법, Newton-Raphson법을 이용하여 3차원상의 좌표를 평면상의 좌표로 변환한다.

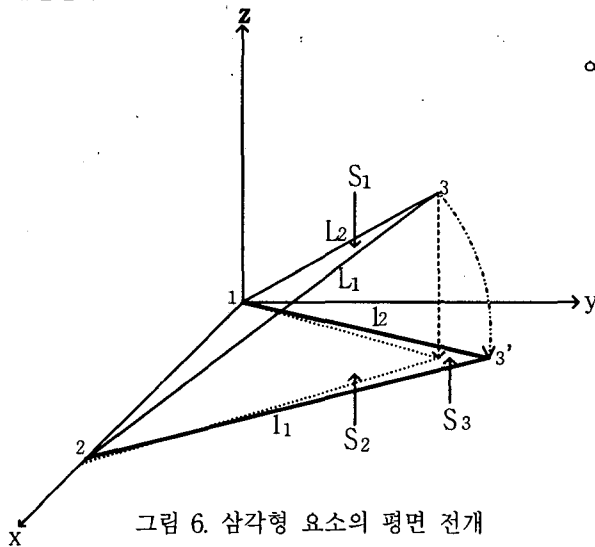


그림 6. 삼각형 요소의 평면 전개

- 여기서, S_1 : 3차원 공간상의 삼각형 요소
 S_2 : S_1 을 평면상에 투영시킨 삼각형 요소
 S_3 : 길이 변화 없이 투영시킨 삼각형 요소
 절점 1의 좌표 : (0, 0, 0)
 절점 2의 좌표 : (7, 0, 0)
 절점 3의 좌표 : (2, 9, 6)
 절점 3의 투영된 좌표 : (2, 9, 0)

3차원 공간상의 삼각형 요소의 두 길이 L_1, L_2 를 평면상에 투영시킨 후에도 길이 변화가 없어야 하므로 결국 식(24)가 만족되어야 한다.

$$L_1 = l_1, \quad L_2 = l_2 \quad (24)$$

식(23)을 만족하기 위하여 수식 전개 과정에서 최소자승법과 Newton-Raphson법이 도입된다. 식(23)에서 \mathbf{K}_i 와 \mathbf{R}_i 를 구한 후 전체 매트릭스 \mathbf{K} 와 \mathbf{R} 은 모든 요소매트릭스를 조합함으로써 얻을 수 있다. 이렇게 구한 \mathbf{K} 와 \mathbf{R} 로 Δx 를 구한 후 Newton-Raphson법을 이용하여 $|\Delta x|^2 / |x|^2 \leq \epsilon$ ($\epsilon = 10^{-6}$)일 때까지 x 를 증가시키면 식(24)를 만족하는 절점 3'의 좌표를 얻을 수 있다. 이 때 경계조건으로 절점 1, 2는 변화하지 않는다는 가정이 필수적이다.

표1에서 보듯이 간단한 삼각형 요소이므로 3번의 반복으로 수렴을 하였고, 공간상의 3차원 좌표가 세 변의 길이 변화 없이 평면상에 펼쳐지는 것을 볼 수 있다. 절점 3'의 좌표는 (2, 10.81665, 0)이고 ϵ_1, ϵ_2 는 $|\Delta x|^2 / |x|^2 \leq \epsilon$ 을 두 변에서 측정할 것이다. 두 변이 동시에 위의 조건을 만족할 때까지 반복 수행한다.

<표 1. 해석 결과>

| | | 초기값 (L_1, L_2) | 투영값 | 해석 결과 (Iter. 3) | 오차(ϵ) |
|---------------|-----|-----------------------|---------|--------------------|------------------------|
| l_1 | | 11.9164 | 10.2956 | 11.9164 | 8.35×10^{-12} |
| l_2 | | 11.0000 | 9.2159 | 11.0008 | 4.81×10^{-11} |
| 3 - 3' 좌 표 | x | 2 | 2 | 2 | - |
| | y | 9 | 9 | 10.8166 | |
| | z | 6 | 0 | 0 | |

4. 결 론

단순한 삼각형 요소를 예를 들어, 공간상의 3차원 좌표가 요소의 길이 변화 없이 평면상에 펼쳐지는 것을 볼 수 있었다. 절점 1, 2는 변화하지 않는다는 가정과 삼각형 요소의 길이는 변화하지 않는다는 가정을 도입하면 평면상의 절점 1, 2는 이미 기지의 값이므로 절점 3이 평면상의 어느 점으로 수렴되는지 찾으려 한다. 여기서, 최소 자승법과 Newton-Raphson법을 사용하여 공간상의 점 (2,9,6)이 평면상의 점 (2, 10.81665, 0)으로 수렴됨을 볼 수 있다. 각각의 요소를 국소 좌표계로 해석하고 이것을 전체 좌표계로 변환하면 우리가 원하는 재단도를 얻을 수 있다.

지금까지는 형상해석 결과를 가지고 위치 변환만을 통해 2차원 전개도를 구하였다. 그러나, 추후에는 전개도와 더불어 응력함수를 도입하여 초기강성에 따른 막재의 신율을 고려하여야 하며 또한 실제 시공시 초기 장력 도입 방법과 해석시 등장력 곡면과의 차이점을 줄이기 위한 연구를 하여야 한다.

감사의 글

“ 본 연구를 지원해 주신 초대형 구조 시스템 연구센터(STRESS)에 감사드립니다. ”

참 고 문 헌

1. 서삼열, “막구조물의 반복적 최적 형상탐색 “해석에 관한 연구”, 성균관대학교 대학원 박사논문, 1991
2. 고영준, 서삼열, 권택진, “케이블의 길이 제한성을 고려한 케이블 보강 막구조물의 형상해석 및 응력-변형 해석에 관한 연구,” *대한건축학회 추계학술발표대회 논문집*, 제17권, 제2호, 통권 제34집, 1997, 10, pp. 991-994.
3. Barnes, M. R., “Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes,” *Computers & Structures*, Vol. 30, 1988, pp. 685-695.
4. Tabarrok, B. and Qin, Z. “Form Finding and Cutting Pattern Generation for Fabric Tension Structures,” *Microcomputers in Civil Engineering 8*, Elsevier Science Pub. Ltd, 1993, pp. 377-384.
5. 坪田張二, 膜構造の竣工釣り合状態と最適裁断圖の決定法, 京都大學 博士學位論文, 1991.