

유한대판법을 사용한 강상판 교량의 해석

Analysis of the Steel Deck Bridges using the Finite Strip Method

최 창 근*
Choi, Chang-Koon

홍 현 석**
Hong, Hyun-Seok

ABSTRACT

The finite strip method is presented for the analysis of steel deck bridges. Like the Pelikan-Esslinger design method for the steel deck bridges, steel deck is treated as an equivalent orthotropic plate. In the presented method, the deck is discretised by finite strips in the longitudinal direction and the effect of main girder or floor beam deflection can also be accounted for. In this method, the terms of harmonic series at elastically support such as transverse floor or diaphragm in steel deck become coupled. Solutions of this method are compared with other available analytical and numerical solution, and good agreement is observed.

1. 서 론

강상판의 해석법을 크게 분류하면 격자이론을 사용한 방법과 판이론을 사용한 방법으로 분류할 수 있다. 격자이론을 사용한 방법은 통상의 교량해석에 널리 사용되는 방법이지만 강상판의 경우에는 판의 유효 강성계수를 산정하는데 어려움이 따르므로 판이론을 적용한 해석법이 널리 사용되어 오고 있다. 판이론을 사용하는 방법은 강상판을 등가의 직교이방성판으로 치환하여 사용하는 방법과 평판 셸구조로서 정밀 해석하는 방법이 있으며 직교이방성 판이론을 사용하여도 실용적으로 충분히 만족하므로 여기서는 직교이방성 판이론에 근거한 방법을 소개하기로 한다.

한편, 유한대판법은 한쪽 방향의 단면계수 및 재료성질이 일정한 구조물의 해석에 유효한 방법으로서 절판구조 및 박스거더 교량해석에 널리 사용되었다. 본 논문에서는 기존의 반-해석적인 유한대판법을 중심으로 유한대판법을 사용한 강상판 해석법을 소개한다. 여기서는 강상판을 종방향의 대판요소로 분할하여 주형 및 가로보의 탄성 처짐을 고려한다. 이때, 횡형요소는 스트립과 주형요소를 횡단하므로 종방향 급수의 조화 항간에 연성이 발생하게 된다.

2. 직교이방성 판이론의 적용

리브로 보강된 평판 시스템에서 리브의 휨작용이 평판에 완전히 포함되도록 보강 리브의 간격이 길이에 비해 충분히 작다면 교차의 복잡한 구조계를 간단한 등가의 직교이방성 평판시스템으로 이상화할 수 있다. 현재의 표준적인 강상판 교량에서는 종리브가 촘촘히 배치되지만 가로보는 넓은 간격으로 배치됨으로써 종리브의 강성은 강상판의 강성으로 치환되고 상판은 가로보로 분리되는 패널로 가정한다. 종래의 Pelikan-Esslinger 방법에서는 주형과 가로보에 의해서 구분되어지는 상판을 주형과 가로보에 지지된 연속적인 직교이방성판으로 간주하였다. 이때, 휨모멘트는 대체된 직교이방성판으로 계산하고

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

이 값을 가지고 실제 상판의 리브와 가로보에서의 모멘트와 응력을 얻을 수 있다.

직교이방성 판이론을 사용하는 해석에서 평판이 사각형이고 양단이 단순지지 되어 있다는 제한조건은 미분방정식의 해를 단순화 시킬 수 있다. 평판이 단순지지라고 가정하면 Fourier 급수를 사용한 Levy 형태의 해가 정식화되며 Levy 형태의 해는 유한대판법과 조합된다.

유한대판법의 사용에 있어 종래의 Pelikan-Esslinger 방법에 근거한 방법은 강상판이 주형에서 단순지지 조건을 만족하는 직교이방성의 연속적인 판으로 간주하며 이때, 스트립은 주형사이의 교축직각방향으로 분할된다. 따라서 주형의 탄성처짐의 영향을 고려할 수 없고 강상판의 캔틸레버부의 해석을 위해서는 다른 방법이 모색되어야 한다. 또한 주형의 수가 많은 경우에도 해석상의 가정으로 인한 오차를 피할 수 없게 된다. 반면에 강상판이 교축방향의 지점부에서 단순지지 조건을 만족한다고 할 때 스트립을 강상판의 교축방향으로 분할하는 경우에는 주형 및 가로보의 탄성 처짐의 영향뿐 아니라 교량의 횡단면의 형태에 무관하게 해석을 수행할 수 있으며 캔틸레버부의 해석도 가능하게 된다(그림 2.1).

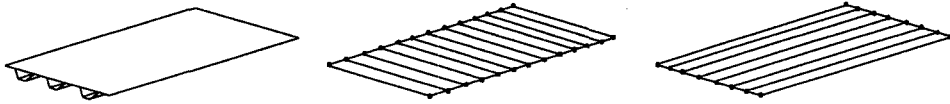


그림 2.1 강상판의 실제계와 유한대판해석을 위한 상판의 분할방법

3. 유한대판요소 정식화

3.1 대판요소 강성행렬

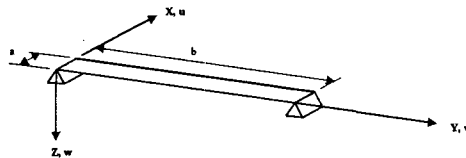


그림 3.1 스트립 요소

하나의 strip 에 대한 변위함수는 x 방향의 다항식과 y 방향의 급수의 곱으로 표현될 수 있다(그림 3.1)

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^r X_m(x) Y_m(y) = w(x, y) = \sum_{m=1}^r [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4] \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_m \cdot Y_m(y) \quad (1)$$

이때 급수항으로 일반적인 보 진동함수를 사용하며 단순지지의 경우 $Y_m(y)$ 는 다음과 같다.

$$Y_m(y) = \sin \frac{\mu_m y}{b}, \mu_m = \pi, 2\pi, \dots, m\pi \quad (2)$$

이러한 조화함수는 다음과 같이 중요한 직교성질이 있으며 이것은 서로 다른 조화항간에 연성을 유발시키지 않는다.

$$\left. \begin{array}{l} \int Y_m Y_n dy = 0 \\ \int Y_m'' Y_n'' dy = 0 \end{array} \right\} \text{for } m \neq n \quad (3)$$

또한, 강상판의 각 스트립은 Kirchhoff의 얇은 판이론을 만족시켜야 하므로 횡방향의 다항식은 유효요소법에서의 보요소와 같은 Hermite 다항식을 사용하게 된다.

$$C_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, C_2 = x - 2\xi x + \xi^2 x, C_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3, C_4 = -\xi x + \xi^2 x \quad (4)$$

직교이방성 판의 변형률 행렬과 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\{ \chi \}_m = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{ \Delta \}_m, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [D] \{ \varepsilon \} \quad (5)$$

여기서, D_x 는 판의 x방향 휨강성이고 D_y 는 y방향 휨강성, D_{xy} 는 비틀림 강성이다. 강상판의 경우에 D_y 는 리브 하나의 관성모멘트를 리브의 간격으로 나눈값이고 유효비틀림 강성은 Pelikan-Esslinger에 의해 반-합리적인 방법이 제안되었다.

스트립 요소의 강성행렬은 조화 공간에 연성되지 않으므로 다음과 같이 단순화 된다.

$$[K]_{mn} = \int [B]_m^T [D] [B]_n dV = \begin{bmatrix} \frac{13ab}{70} \alpha^4 D_y + \frac{12b}{5a} \alpha^2 D_{xy} & & & & & & & & \\ & \text{symm.} & & & & & & & \\ + \frac{6b}{5a} \alpha^2 D_1 + \frac{6b}{a^3} D_x & & & & & & & & \\ \frac{11a^2 b}{420} \alpha^4 D_y + \frac{b}{5} \alpha^2 D_{xy} & \frac{a^2 b}{210} \alpha^4 D_y + \frac{4ab}{15} \alpha^2 D_{xy} & & & & & & & \\ \frac{3b}{5} \alpha^2 D_1 + \frac{3b}{a^2} D_x & + \frac{2ab}{15} \alpha^2 D_1 + \frac{2b}{a} D_x & & & & & & & \\ \frac{9ab}{140} \alpha^4 D_y - \frac{12b}{5a} \alpha^2 D_{xy} & \frac{13a^2 b}{840} \alpha^4 D_y - \frac{b}{5} \alpha^2 D_{xy} & \frac{13a^2 b}{70} \alpha^4 D_y + \frac{12b}{5a} \alpha^2 D_{xy} & & & & & & \\ -\frac{6b}{5a} \alpha^2 D_1 - \frac{6b}{a^3} D_x & -\frac{b}{10} \alpha^2 D_1 - \frac{3b}{a^2} D_x & + \frac{6b}{5a} \alpha^2 D_1 + \frac{6b}{a^3} D_x & & & & & & \\ -\frac{13a^2 b}{840} \alpha^4 D_y + \frac{b}{5} \alpha^2 D_{xy} & -\frac{3a^2 b}{840} \alpha^4 D_y - \frac{ab}{15} \alpha^2 D_{xy} & -\frac{11a^2 b}{420} \alpha^4 D_y - \frac{b}{5} \alpha^2 D_{xy} & \frac{a^2 b}{210} \alpha^4 D_y + \frac{4ab}{15} \alpha^2 D_{xy} & & & & & \\ + \frac{b}{10} \alpha^2 D_1 + \frac{3b}{a^2} D_x & -\frac{ab}{30} \alpha^2 D_1 + \frac{b}{a} D_x & -\frac{3b}{5} \alpha^2 D_1 - \frac{3b}{a^2} D_x & + \frac{2ab}{15} \alpha^2 D_1 + \frac{2b}{a} D_x & & & & & \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.2 주형의 강성행렬

입의의 조화항에 대한 주형 보요소의 휨에 관한 강성행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$K_{mn}^b = \int B^T D B dV = \begin{bmatrix} EI_y \int \frac{\partial^2 Y_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} dy & 0 \\ 0 & GJ \int \frac{\partial Y_m}{\partial y} \frac{\partial Y_n}{\partial y} dy \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서, EI_y, GJ 는 보의 휨 강성과 비틀림 강성이다.

휨과 전단을 받는 처짐을 동시에 고려하면 휨과 변위와의 관계는 $F = K_B U_B$, $F = K_S U_S$ 이 되며 각각 휨

과 전단력의 항이 된다. 전체 변형량은 U_b 와 U_s 의 합이 되므로 주형의 강성행렬은 다음과 같이 된다.

$$K_{mn} = [K_b^{-1} + K_s^{-1}]^{-1} = \frac{b}{2} \begin{bmatrix} \frac{\alpha^6 EI_y GA}{\alpha^4 EI_y + GA\alpha^2} & 0 \\ 0 & GJ\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서, A는 전단력에 저항하는 면적

3.3 횡리브의 강성행렬

상판을 교축 방향의 스트립으로 분할하는 경우, 횡리브의 변위함수는 종방향 스트립 급수의 횡리브 위치에서의 값과 다항식의 곱으로 된다. 이때 급수간의 연성이 발생하게 된다. 이 방법은 합성 유한대판법(compound finite strip method)이라고도 불리우며 부재의 저장된 포텐셜 에너지의 최소화를 통하여 강성행렬을 구할 수 있게 된다.

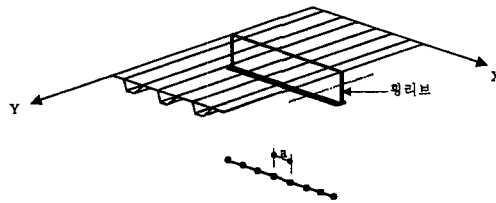


그림 3.2 횡리브의 모델링

횡리브의 휨에 관한 변위함수는 상판과의 접합을 고려하여 다음과 같이 가정한다.

$$w(x) = \sum_{m=1}^r X_m(x) Y_m(y) = \sum_{m=1}^r [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4] \{\Delta\}_m \cdot Y_m(y) \quad (9)$$

단순지지의 경우 $Y_m(y)$ 는 횡리브 위치에서의 상수값이 된다.

$$Y_m(y) = \sin \frac{\mu_m y}{b}, \mu_m = \pi, 2\pi, \dots, m\pi \quad (10)$$

그러므로 횡리브 요소의 변형률 행렬은 다음과 같다.

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} -C_1'' Y_m & -C_2'' Y_m & -C_3'' Y_m & -C_4'' Y_m \\ C_1' Y_m' & C_1' Y_m' & C_3' Y_m' & C_4' Y_m' \end{bmatrix} \{\Delta\}_m = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\Delta\}_m \quad (11)$$

횡리브의 임의의 조화 항에 대한 보의 강성행렬은 다음과 같이 휨과 비틀림의 성분으로 구분된다.

$$K_{mn} = \int B_m^T D B_n dV = K_{mn}^b + K_{mn}^t \quad (12)$$

여기서

$$K_{mn}^b = EI \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r Y_m Y_n \int_0^a \begin{bmatrix} C_1'' C_1'' & C_1'' C_2'' & C_1'' C_3'' & C_1'' C_4'' \\ & C_2'' C_2'' & C_2'' C_3'' & C_2'' C_4'' \\ & & C_3'' C_3'' & C_3'' C_4'' \\ \text{symm.} & & & C_4'' C_4'' \end{bmatrix} dx \quad K_{mn}^t = GJ \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r Y_m' Y_n' \int_0^a \begin{bmatrix} C_1' C_1' & C_1' C_2' & C_1' C_3' & C_1' C_4' \\ & C_2' C_2' & C_2' C_3' & C_2' C_4' \\ & & C_3' C_3' & C_3' C_4' \\ \text{symm.} & & & C_4' C_4' \end{bmatrix} dx$$

따라서 전체 강성행렬은 위와 같이 각 조화 항에 대해 연성된 결과를 보인다.

3.4 등가 접선 외력

윤하중은 에너지가 등가인 등가 접선의외력으로 바꾸어 윤하중 위치가 대판요소의 임의의 위치에 올 수 있도록 한다. 대판요소의 장변 방향에 해당하는 Fourier 급수전개와 분포하중 Q는 다음과 같다.

$$Q = \sum_{m=1}^r Q_m \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (13)$$

여기서

$$Q_m = \frac{2}{b} \int_{y_1}^{y_2} Q \sin \frac{m\pi y}{b} dy \quad (14)$$

위 식으로 접선의외력을 나타내면 다음과 같다.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} Q_{im} \\ M_{im} \\ Q_{jm} \\ M_{jm} \end{Bmatrix} = \int_0^b \int_{x_1}^{x_2} \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^r Q_m \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} dx dy \quad (15)$$

여기서, C_i 는 Hermite 다항식

4. 해석 예제

4.1 등방성의 보강판 해석

그림 4.1 과 같은 보강판이 가로보에 의해 3 개의 패널로 분리되고 보강판의 중앙점에 1 개의 윤하중을 재하 시켰을 때의 해석을 수행한다. 이때, 하중조건을 변화시켜 가면서 유한요소 해석의 결과와 비교하였다. 마지막으로 등방성의 보강판에 한 개의 윤하중이 작용하는 경우의 해석을 수행하였다.

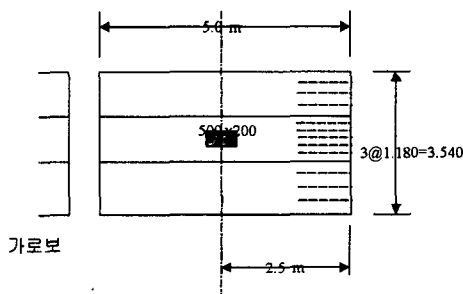


그림 4.1 보강판 평면 및 하중 재하 위치

표 4.1 보강판의 단면성질 및 하중조건

단면성질 및 하중	크기
Dx	1786t·m
Dy	1786t·m
H	-
가로보의 휨강성	0.001847m ⁴
차량 윤하중 q	134.4t/m ²
조화 항	20 개

각각의 하중 조건은 그림 4.2 과 같이 4 개의 경우에 대해서 구별하였고 가로보가 없는 경우와 가로보가 존재하는 경우로 구분하였다. 모든 경우에 대해 판의 비틀림 강성은 없다고 가정한다. 해석 결과는 표 4.2 과 같으며 유한요소 해석 결과와 근사한 값을 보인다.

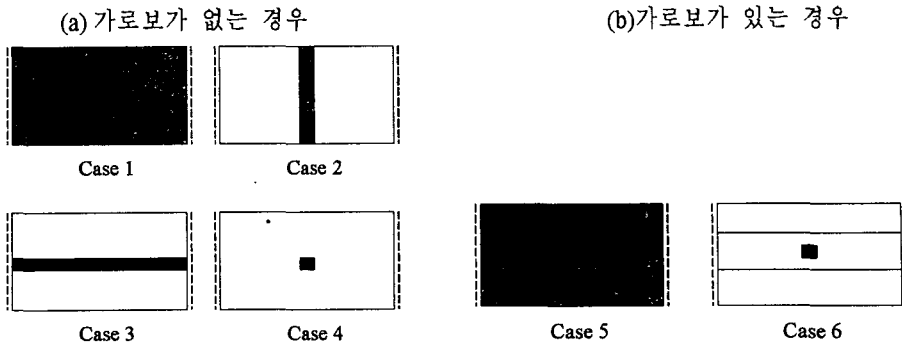


그림 4.2 하중 재하 조건에 따른 해석 구분

표 4.2 주형 보강판의 중앙점 변위 해석 결과

하중조건		Dx (t·m)	Dy (t·m)	H (t·m)	유한요소법 (SAP90)	유한대판법 (m)	비고
가로보가 없는 경우	Case 1	1786	1786	-	0.615	0.612	등방성
	Case 2	1786	1786	-	0.0950	0.0975	등방성
	Case 3	1786	1786	-	0.0340	0.0369	등방성
	Case 4	1786	1786	-	0.00432	0.00603	등방성
가로보가 있는 경우	Case 5	1786	1786	-	0.00394	0.003994	등방성
		-	1786	-	-	0.004020	직교이방성
	Case 6	1786	1786	-	0.00031	0.0001991	등방성
		-	1786	-	-	0.0003869	직교이방성

4.2 2 주형 강상판 교량

그림 4.3 은 교폭이 12m 인 20m 지간의 단순보의 경우에 대한 해석 예이다. 지점부에 수직 브레이싱이 설치되고 중간 10m 지점에도 강성이 큰 수직 브레이싱이 설치되며 가로보는 5m 간격으로 설치된다. 유효하중은 DB24 의 표준트럭하중을 교축 직각방향으로 2 대를 지간 중앙에서 가장 불리한 부재력이 발생하도록 재하한다. 하중재하 상태는 그림 4.4 와 같고 페리브와 기타 부재들의 제원은 표 4.3 및 그림 4.5 와 같다.

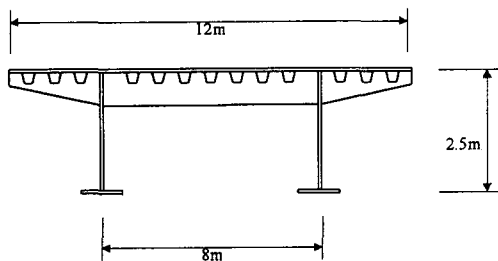


그림 4.3 2 주형의 강상판 교량

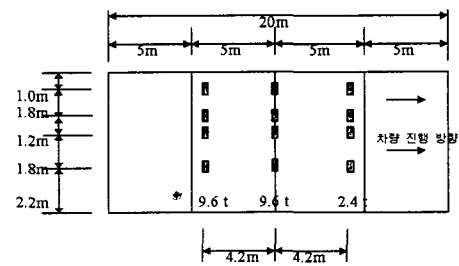


그림 4.4 차량 하중 재하 위치

표 4.3 폐단면 리브의 단면 제원

항 목		제 원
폐단면 리브	상판 두께	12mm
	상부 플랜지 폭	32cm
	하부 플랜지 폭	22cm
	리브의 높이	24cm
	리브의 두께	6mm
	리브의 중심간 간격	64cm
가로보	단면 2 차 모멘트	0.02m ⁴
브레이싱	단면 2 차 모멘트	0.10m ⁴

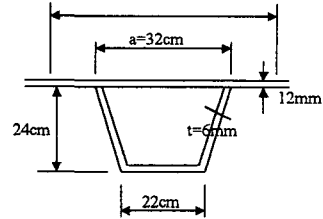


그림 4.5 폐단면 리브의 제원

유한요소 분할 및 대판요소 분할은 각각 그림 4.6, 그림 4.7 과 같으며 유한대판 해석에 사용된 조화 함수의 전개항수는 50 개로 한다.

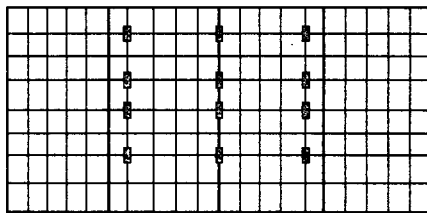


그림 4.6 유한 요소 분할

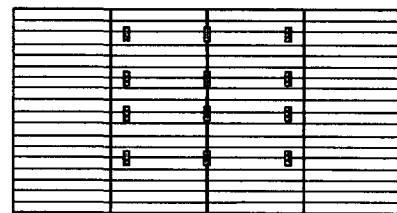


그림 4.7 대판 요소 분할

Pelikan-Esslinger 방법에 기초한 유한대판법의 경우 주형의 탄성 처짐을 고려할 수 없는 반면, 종방향의 분할에 의한 유한대판법은 주형의 영향을 고려할 수 있다. 그림 4.8 과 그림 4.9 에서는 등방성의 판인 경우에 있어서 주형의 탄성 처짐을 고려하지 않는 경우와 탄성 처짐을 고려한 경우로 구분하여 나타내었다. 각각의 경우에 있어서 유한대판법에 의한 해석결과는 유한요소법에 의한 해석결과와 유사한 값을 보임을 알 수 있다.

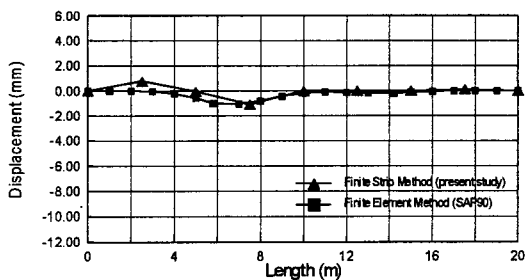


그림 4.8 주형의 탄성처짐을 고려하지 않는 경우
(주형의 I=100)

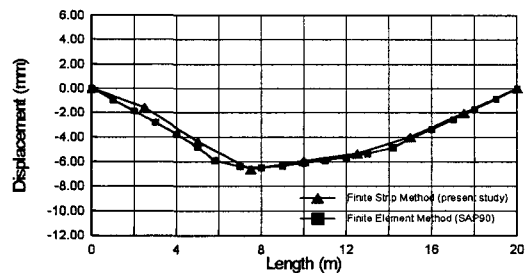


그림 4.9 주형의 탄성처짐을 고려하는 경우
(주형의 I=0.05)

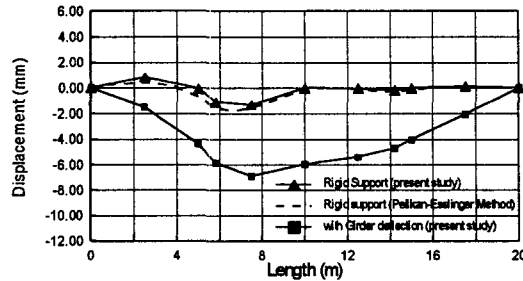


그림 4.10 직교이방성 판이론을 적용한 경우의 주형 처짐의 영향

5. 결 론

강상판 교량을 해석하기 위해서 유한대판법을 사용하는 경우 기존의 해석법과 같이 주형에서 단순 지지 조건을 만족하는 직교이방성의 연속판으로의 접근보다는 종방향의 경계조건을 만족시키는 구조로서 접근하는 것이 보다 효율적이다. 이는 기존의 Pelican-Esslinger 방법에 기초한 유한대판법의 경우, 주형의 탄성 처짐을 고려할 수 없는데 반하여 여기서 제시된 방법은 주형에 의한 영향을 모사할 수 있으며 앞서 지적한 바와 같이 여러 가지 해석상의 제한조건을 많이 완화 시킬 수 있기 때문이다. 또한, 강상판 해석을 위한 스트립의 종방향 분할에 의한 결과는 유한요소의 결과와 거의 비슷한 결과를 보이고 있음을 알 수 있으나 조화 항간의 연성이 발생하게 되므로 해석시간이 길어지게 된다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부의 96 연구개발사업의 연구비 지원과 참여기업인 LG 건설의 연구비 지원에 의해 이루어졌음을 밝히며 이 지원에 깊이 감사한다.

참 고 문 헌

1. Design Manual for Orthotropic Steel Plate Deck Bridges. American Institute of Steel Construction, New York, 1963.
2. Troitsky, M. S., Orthotropic Bridges Theory and Design. James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, Ohio, 1987.
3. Powell, G. H. and Ogden, D. W., "Analysis of Orthotropic Steel Deck Bridges," Journal of Structural Division, ASCE, vol.95, No. ST5, May 1969.
4. Cheung, Y. K., The Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon, New York, 1976.
5. Cusens, A. R. and Pama, R. P., Bridge Deck Analysis. John Wiley and Sons, New York, 1975.
6. Willam, K. J. and Scordelis, A. C. "Analysis of Orthotropic Folded Plates with Eccentric Stiffeners" SESM Report No. 70-2. Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1970.
7. Bouwkamp, J. G. and Powell, G. H. "Structural Behavior of an Orthotropic Steel Deck Bridge" SESM Report No. 67-27. Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1967.
8. 松田正弘, "Finite Strip Method による張出し鋼床版の解析" 일본 토목학회지(昭 53.6)
9. 今北ら, "張出し部を有する多主型鋼床版の Finite Strip Method による解析", 橋梁と基礎, vol 31, No. 9, 1976.